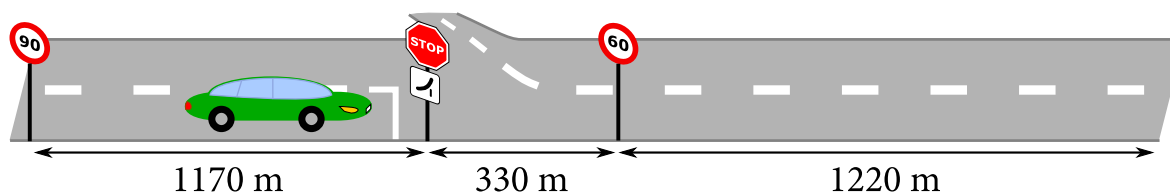


Feladatok

- 1** Márton egy új autót vett, ami képes 0-ról 100 km/h-ra gyorsítani 10 másodperc alatt és 100 km/h-ról 0-ra lassítani 6 másodperc alatt. Mi legrövidebb lehetséges utazási idő, ami alatt Márton végigmehet a képen lévő úton, ha betartja az összes közlekedési szabályt?

Természetesen az út elején és végén az autója nem mozoghat. A közlekedési táblákon a megengedett maximális sebesség km/h-ban van megadva.



- 2** Kati talált egy jó kis autópályaszakaszt, amely egy vasútvonal mellett halad. Néha itt szokott versenyezni a gyorsvonattal. A gyorsvonatnak a lendülete 150-szer, de a mozgási energiája csak 100-szor akkora, mint Kati autójának. Milyen a vonat és az autó tömegaránya?

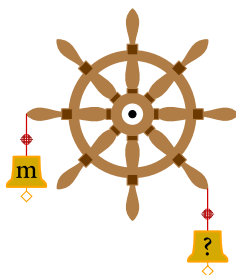
- 3** Máté a vásárban sétált, amikor meglátott egy óriási héliummal töltött lufit, amelynek a sugara 50 cm, és a tömege üresen 20 g. Nagyon megszerette és egyből meg is vette... de egyszer csak elkezdett aggódni, hogy a lufi elszállhat.

Az, hogy valamihez hozzákösse túl unalmasnak tűnt. Ezért úgy döntött, hogy felfúj (levegővel) néhány kisebb lufit, melyeknek a tömegük 10 g üresen, és sugaruk 20 cm, ezután hozzákötötte őket a héliumos lufihoz. Legalább hány kisebb lufira van szüksége, hogy megakadályozzák a nagyot az elrepüléstől?

A lufik nyúlékonysága elhanyagolható.

- 4** Julcsi tengeri utazáson volt. Hazatérve magával hozott egy dísz hajókormányt. Szöveget vert a falba, majd felakasztotta rá a kormányt a közepénél fogva. Mivel nem volt már hely a falon több dekorációnak, így egy m tömegű kínai csengettyűt akasztott a kerék bal szélső fogantyújára.

Ez természetesen kissé elforgatta a kormánykereket, ezért ellensúlynak ráakasztott egy másik csengettyűt a jobb alsó fogantyúra. Mekkora legyen a második csengettyű tömege, hogy a kormány visszaforduljon az eredeti pozíciójába?



- 5** Két skót vitatkozik egy egypennysen. Mindkettejük a pénzdarab egyik végét húzza, amíg egyszer csak egy r sugarú, l hosszúságú, és R ellenállású vezeték nem formálódik, azonban ez nem állítja meg őket ab-

ban, hogy tovább húzzák. Mekkora lesz az ellenállása a vezetéknek, ha megduplázódik a hossza a húzás következtében?

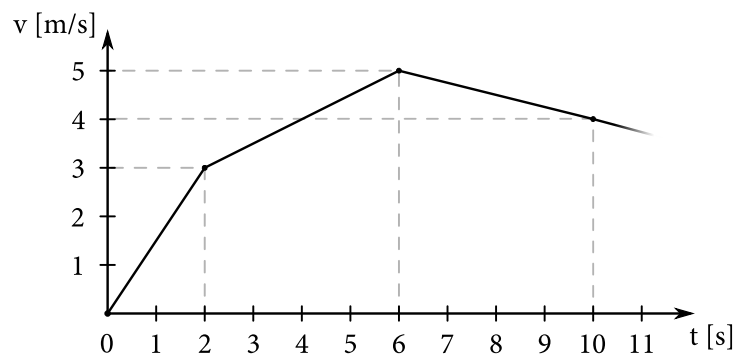
A pénzérme térfogatát tekintjük állandónak a folyamat során.

6 Teri szereti a zászlókat, ezért eldöntötte, hogy megvarrja otthon a Seychelle-szigetek zászlaját. Amikor elkészült, észrevette, hogy a tömegközéppont nem pontosan a zászló geometriai középpontjában helyezkedik el. Megmérte a felhasznált anyagok tömegét és arra jutott, hogy balról jobbra haladva a sűrűségük 600, 400, 300, 500 és 900 g/m². Milyen messze van Teri zászlójának tömegközéppontja a geometriai középponttól, ha a zászló mérete 180 cm × 90 cm?

A varrások széle a zászló felső és jobb oldalának harmadolópontjaiban helyezkedik el.

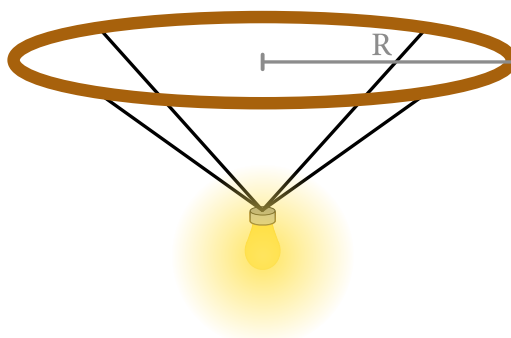


7 Jóska F állandó erővel húzza Terit a szánkóján. A szánkónak Terivel együtt a tömege $m = 60$ kg. Jóska először súrlódás nélkül húzza a szánkót a befagyott tavon át. Aztán a havas talajon húzza, a szánkó és a hó közötti $f > 0$ súrlódási együttható mellett. Egy idő után Peti is a szánkóra ugrik. A szánkó sebességét a grafikon mutatja. Mekkora Peti tömege?



8 Martin egy új apartmanba költözött. Csillagászként nincs túl sok pénze, és mivel néha enni is szeretne, úgy döntött, hogy saját maga építi meg a csillárjait.

A csillárja egy $R = 24$ cm sugarú karikából áll, ami a plafonról lóg. Ezután hozzácsatolja a $m = 1$ kg tömegű villanykörtét négy egyenletesen elhelyezett, tömeggel nem rendelkező fonállal. A kis költségvetése miatt a fonalak nem túl erősek, csak $F = 6,5$ N (húzó) erőt bírnak ki. Mi a legkisebb magasság (azaz a karikától való távolság), amellyel a villanykörte a karika alatt lóghat, anélkül, hogy a fonalak elszakadnának?



9 András egy magas zászlórudat állított Pozsonyban. A tetején egy hatalmas zászló leng, aminek 10 m^2 a területe. Mekkora a zászló árnyéka a földön az őszi napéjegyenlőség napján délben, ha a szél északnyugatról fúj?

Pozsony az északi szélesség 48. fokán fekszik.

10 Jakab vonattal utazott a nagyszüleit meglátogatni. Ahogy elunta magát, elkezdte számolni az autókat, amelyek elhaladtak a vasút mellett az autópályán. Időegységengént négyszer annyi autót látott a saját mozgásával ellentétes irányban, mint az azzal megegyezőben. Milyen lehetséges sebességekkel utazhatott Jakab vonata?

A forgalom az autópályán mindkét irányban egyenlő, az autók sebessége pedig 90 km/h volt.

11 Két m tömegű hold ugyanazon a pályán kering egy $2m$ tömegű bolygó körül. Mindhárom test egy egyenesre illeszkedik bármelyik időpillanatban.

Kata megmérte, hogy a holdak pályájának sugara R . Mennyi idő alatt kerülnek meg a bolygót?

12 Meleg nyári éjszakákon kóbor macskák dorbézolnak a kóli ablakai alatt. Egy különösen forró és álmatlan éjszakán Tamás elvesztette a türelmét, kiment a föld fölött H magasan lévő erkélyre, és záptojásokkal kezdte dobálni a macskákat. Minden tojásnak ugyanakkora a v kezdősebessége, de különböző α szögek alatt vannak eldobva.

Mi az a legkisebb sebesség, ami egy tojásnak a földet érés pillanatában lehet, ha elhanyagoljuk a légellenállást?

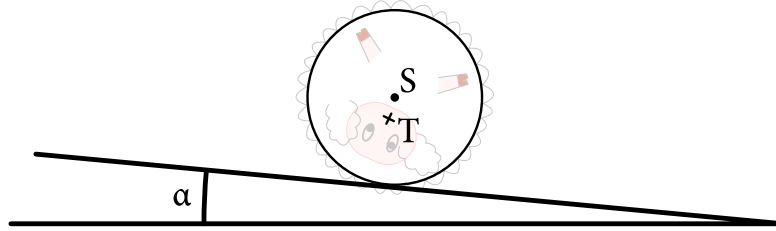
13 Andris és Dani nemrég szereztek meg a hajóvezetői engedélyeiket. Csónakokat béreltek, majd nekivágtak a tengernek. Azonban, mivel még nem voltak túl gyakorlottak, biztonságosabbnak ítélték, ha kizárólag állandó sebességgel haladnak előre.

- Amikor Andris keresztezte Dani útvonalát, $3d$ távolság volt közöttük.
- t idő elteltével Dani is keresztezte Andris útvonalát, ekkor $4d$ távolságra voltak egymástól.
- $5t$ idő elteltével mindkettőjüknek elfogyott az üzemanyaga, és azonnal megálltak egymástól $21d$ távolságban.

Mekkora szöget zár be egymással a két hajó útvonala?

14 Gyuri juhásztörekvései nagyon különösnek tűnnek a külső megfigyelőknek, mióta megszerezte a mester diplomáját fizikából. A birkáit homogén hengerekhez közelíti, R sugárral és m tömeggel. Amikor egy birka végez a legeléssel a dombtetőn, behúzza a lábait, majd legurul róla.

Ez azonban nem olyan egyszerű. Miután egy birka eleget evett, a T tömegközéppontja $R/4$ távolságra csúszik az S középponttól sugárirányban. Mekkora lehet a legkisebb szögű lejtő, amin még biztosan le tudnak gurulni a birkák, függetlenül attól, hogy milyen szögben álltak induláskor?



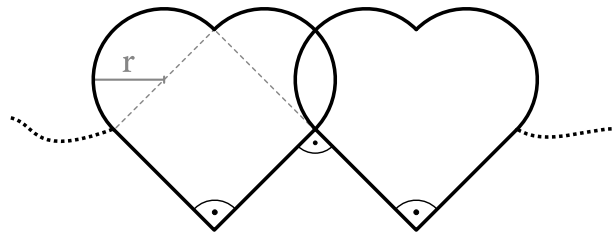
15 A Kis Hercegnő a P-314 kisbolygóján üldögél, és nagyon morcos. A bolygó csillaga csak 60 óránként megy le, tehát ahhoz, hogy elég romantikus naplementét lásson, folyton arrébb kell tennie a nehéz székét. Másfelől viszont, az év mindössze 300 óra hosszú, így legalább sokszor tud szülinapozni.

Az egyik szülinapja után a bolygó éjszakai oldalára húzta a székét, és felnézett a csillagokra. Egy idő után észrevette, hogy a távoli csillagok a saját napjától eltérő periódussal keringenek a bolygó körül. Mi a saját tengelye körüli keringési ideje a bolygónak?

Vegyük úgy, hogy a bolygó ugyanabban az irányban kering a csillaga körül, mint a saját tengelye körül, és a pályája kör alakú. A forgástengelye a keringés síkjára merőleges.

16 Teri egy nyakláncot kapott születésnapjára Feritől, ami két ugyanolyan, szimmetrikus szívből áll. Teri természetesen nagyon örült, de fizikusként az ékszer szépsége mellett annak elektromos tulajdonságait is értékelte.

Megállapította, hogy a nyaklánc drótjának egység hosszankénti ellenállása ρ . Mekkora az ékszer teljes ellenállása azok között a pontok között, ahol az ékszer találkozik a láncsal, ha tudjuk, hogy a nyaklánc kör alakú részeinek sugara r ?



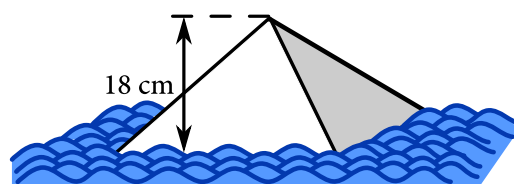
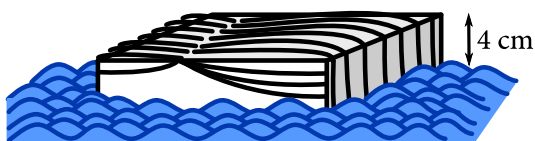
17 Lukács szeret otthon elektromos szerkezeteket építeni. Legutóbb talált 3 ellenállást, melyek ellenállásai 20, 30 és 60 Ω voltak, és összerakott belőlük egy elektromos fűtőberendezést. Sajnos a praktikus terméktervezés nem az erőssége. Mikor meg szeretné változtatni a melegítés erősségét (a berendezés teljesítményét), szét kell szednie, majd újra csatlakoztatnia az ellenállásokat. Hány különböző teljesítményt tud összesen beállítani (a kikapcsolt állapoton kívül), ha a főmegszakító a házban 15 A-t bír?

A hálózati feszültség 230 V. Nem muszáj az összes ellenállást minden alkalommal felhasználnia.

18 Krisztiánnak van egy szép faliórája. Az órának csak egy óramutatója és egy percmutatója van, amelyek minden másodpercben kissé elmozdulnak. Az óramutató hossza d és tömege $2m$, a percmutató hossza $2d$ és tömege m . A nap melyik másodpercben fejtenek ki a mutatók maximális forgatónyomatékokat az óra középpontjára?

Keress legalább egy megoldást! Az eredményt HH:MM:SS_ formában add meg! Használj bátran számológépet!_

19 Dezső, a kocka, szeret a medence vizén lebegni. Ha úgy lebeg, hogy az alapja párhuzamos a víz felszínével, 4 cm-rel lóg ki a vízből. Ha megfordul úgy, hogy az egyik testátlója merőleges lesz a víz felszínére, a vízből kilátszó része egy 3 oldalú piramis, ami 18 cm magasra nyúlik. Mennyi Dezső sűrűsége?



20 Matyi elhelyezett egy m tömegű követ egy L hosszúságú és M tömegű gördeszka elülső végén. Nincs súrlódás a gördeszka és a talaj között, viszont a kő és a deszka között a súrlódási együttható μ . Matyi meglökte a gördeszkát, amely hatására az v sebességgel kezdett mozogni a hossz tengelye irányában. Mekkora a legnagyobb lehetséges v sebesség, amelynél a kő még a gördeszkan maradt?

Vegyük úgy, hogy a gördeszka azonnal felgyorsult, miközben a kő nyugalomban maradt Matyihoz képest az első pillanatban.

21 Tomi véletlenül leverte az óriási, $l = 16$ cm magas okostelefonját az asztról. Szerencsére sikerült egy kicsit megpörgetnie, mielőtt túl késő lett volna. Mivel a modern telefonjának a kijelzője az egész előlapot eltakarja, az egyetlen reménye, hogy a telefon pont a hátlapjára esik, ellenkező esetben a kijelző valószínűleg eltörik.

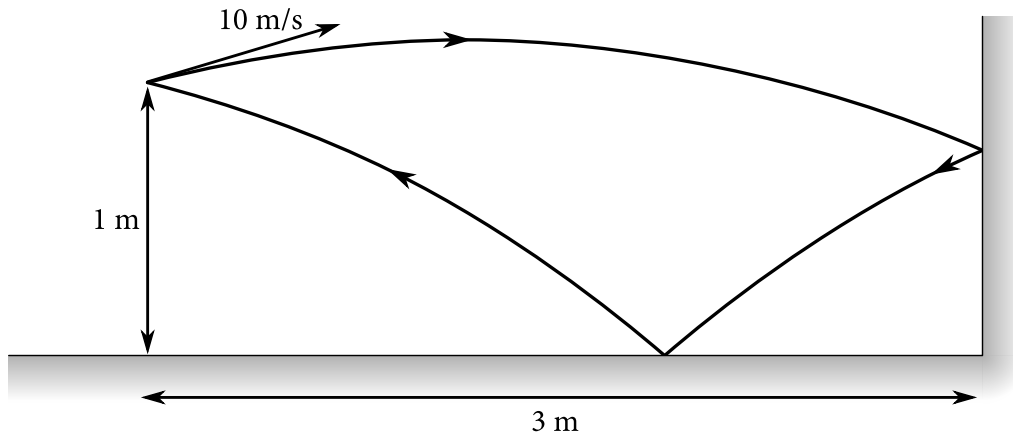
Az asztal magassága $h = 0,8$ m, és a telefon eredetileg a hátoldalán nyugodott. Legfeljebb hány fordulatot hajthatott végre a telefon a levegőben, ha a hátoldalára érkezett?

Feltételezzük, hogy a telefon nem kapott függőleges irányú lendületet a megpörgetéskor.

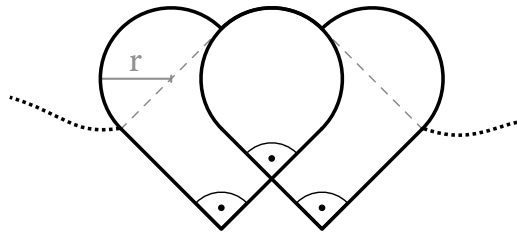
22 Irén elhelyezett két tükröt az asztalon úgy, hogy a tükröző felületeik által bezárt szög α legyen. Ezután egy lézertollat irányított a tükrök felé úgy, hogy a lézersugár a tükrök valamelyikével párhuzamos legyen. Azt tapasztalta, hogy a lézersugár ugyanazon a pályán tért vissza, mint amelyiken beérkezett. Mik α szög lehetséges értékei?

23 Karcsi váratlanul egy pattogós labdát talált a zsebében, és gondolkodás nélkül elhajította $h = 1$ m magasságból, egy $d = 5$ m távolságra lévő fal felé. A dobás (kezdő) sebessége $v = 12$ m/s.

A pattogós labda egyszer pattant a falon majd a padlón, és pontosan visszaérkezett Karcsi kezébe. Mennyi ideig tartott a mozgása, ha minden ütközés teljesen rugalmas volt?



24 Teri annyira örült az ajándéknak, hogy még jobban beleszeretett Feribe. Ezért nyilvánvaló okokból változtatásokra volt szükség a nyakláncan. Továbbra is ugyanaz a két szimmetrikus szív van rajta. Az egység hosszönkénti ellenállás is megmaradt ρ -nak, a kör alakú részek sugara pedig továbbra is r . Számold ki az ellenállást ezúttal a nyaklánc két vége között!

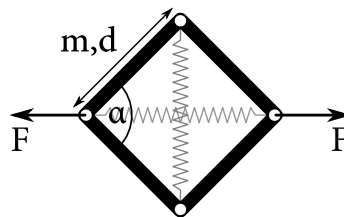


25 Matyinak van egy nagy fémhordója, félig tele meleg teával. A hordó alján van egy csap, amelyen ki lehet csapolni a teát. Az hordó magassága 1 m. Matyi elkezdte csapolni a teát, de egy idő után nem folyt ki több, mivel nem tudott a levegő bejutni. Mennyivel tudott a tea magassága lejjebb menni anélkül, hogy bármennyi levegő a hordóba jutott volna? A hordóban a csap kinyitása előtt sztenderd légköri nyomás uralkodott.

Az eredményt 1 mm pontossággal add meg!

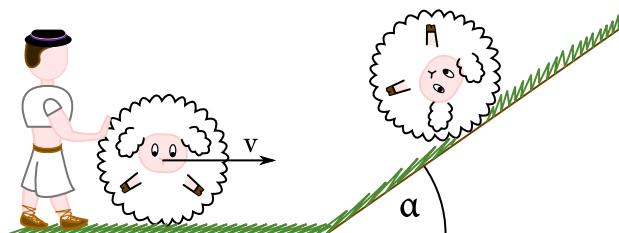
26 Marcsi imád mechanikai rendszereket készíteni rugókból. Vett egy négyzetes keretet, amelynek minden oldala m tömegű és d hosszúságú. A keret oldalai csuklókkal csatlakoznak a sarkoknál, tehát amikor a keret meghajlik, az oldalai ugyanabban a síkban maradnak.

Marcsi vízszintesen elhelyezte a keretet a talajon. Ezután vett két 0 kezdeti hosszúságú és k rugóállandójú rugót, majd a keret átlói mentén kihúzva rögzítette őket. Ezután elkezdte egymástól távolítva húzni a keret két szemközti sarkát. Milyen F erővel kell húznia a sarkokat, hogy a kezéhez legközelebbi belső szög α legyen?

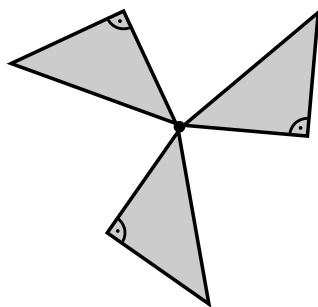


27 Amikor Gyuri megtudta, hogy a birkák biztonságban le tudnak gurulni a dombról, újabb ötlete támadt a birkák hengerverszerű alakjának felhasználására. v sebességgel gurítani kezdi a birkákat egy vízszintes síkban. A sík lassan egy domboldalba megy át, α szögű emelkedéssel.

A síktól számítva milyen magasságban lesz még lelapítva a fű, amikor a birkák abbahagyják a gurulást? Egy éhes birka sugara r .

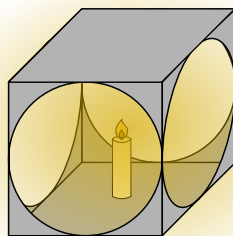


28 Sztella alternatív energiaforrásokat tanulmányoz. Ehhez sok fémlapot vásárolt egy kiárusításon, és egyszerű struktúrájú propellert fabrikált belőlük. A fémlapok felületi tömegsűrűsége σ . A propellernek 3 szárnya van, mind egyenlő szárú derékszögű háromszög formájúak. A háromszögek szára a hosszúságú, és úgy vannak a középponthoz csatolva, hogy magasságvonalaik 120° fokot zárnak be egymással. Mekkora Sztella propellerének tehetetlenségi nyomatéka a középpont tengelyére vonatkoztatva?



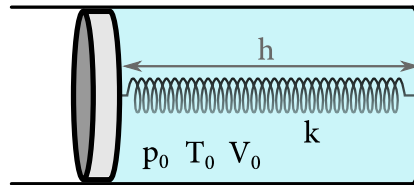
29 Huba talált egy 1 m hosszú rugót. Bizonyos tudományos módszereket alkalmazva megállapította, hogy a rugó merevsége (rugóállandója) 70 N/m. Több kisebb, egyenlő hosszúságú darabra akarja vágni a rugót úgy, hogy egy 10 kg tömegű fa emelvényt helyezhessen rájuk. Hány kisebb darabra kell vágnia a rugót, hogy Hubával együtt az emelvényt a föld fölött tartsa? Huba tömege 100 kg.

30 Ricsi talált egy csodalámpát a rendetlen szobájában. Kocka alakja van, és csak a négy oldalán található, beírt kör alakú nyílásokon keresztül bocsált ki fényt. Mekkora térszöget tudunk megvilágítani a lámpával, ha a fényforrás pont a lámpás közepében van?



31 Olivér egy hosszú, hengeres tartályt egy dugattyúval zárt le. A dugattyút egy k rugóállandójú, 0 nyugalmi hosszú rugóval rögzítette a tartály aljához. A tartályban így V_0 térfogatú, p_0 nyomású, T_0 hőmérsékletű ideális gáz rekedt.

Rögtön rájött, hogy a rugó hossza (h) kiváló állapotjelző, és azonnal felrajzolta a dugattyúval bezárt ideális gáz adiabatikus folyamatának h - T diagramját. Feltételezve, hogy a belső gáz nyomásán és a rugón kívül nem hat semmilyen külső erő a dugattyúra, rajzold fel a diagramot, és jelöld meg minden fontos értéket!



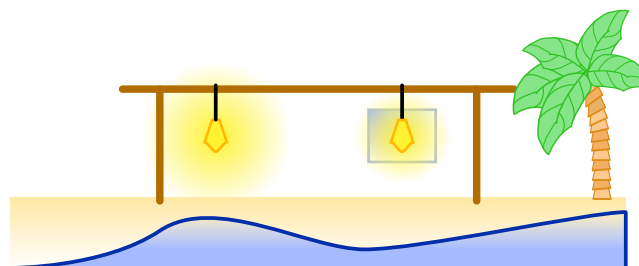
32 Simonnak sürgősen vízszintesen polarizált fényre lenne szüksége. Azonban, csak egy fényforrás áll rendelkezésére, amely függőlegesen polarizált fényt ad I_0 intenzitással, és 10 tökéletesen polarizáló szűrő. Olyan módon akarja őket elrendezni, hogy elfordítsa a polarizáció síkját. Mi a vízszintesen polarizált fény legnagyobb elérhető intenzitása, ha a fény nem tartalmazhat függőlegesen polarizált komponentst?

Tökéletesen polarizáló az a szűrő, amely az összes fényt átengedi a polarizáció irányában, és az összes erre merőlegest eltávolítja.

33 Ádám úgy döntött, hogy elpusztítja az egyik intézményt a környékén. A legjobb módszer erre, ha egy ágyút használ. Az ágyú csövének hossza L , keresztmetszete S . Belehelyezett egy m tömegű lövedéket úgy, hogy a csőben maradt még V_0 térfogatú, p_0 nyomású levegő a lövedék mögött. A megmaradt levegő a lőporrobbanás következtében E energiát kapott. A levegő adiabatikusan tágulni kezdett, kilökve a lövedéket. Mekkora volt a lövedék sebessége, mikor elhagyta az ágyú csövét? Tekintsünk a levegőre ideális kétatomos gázként!

34 Hanna és Nina két szirén, akik éppen néhány csóri tengerészt próbálnak magukhoz csábítani a két azonos lámpásuk segítségével. Nina egy tartóra akasztotta a lámpását, ahonnan az P teljesítménnyel izotrópikusan ragyog. Azonban Hanna az ő lámpását berakta egy n törésmutatójú üvegből készült kockába, és úgy helyezte el, hogy az egyik oldala a tenger felé nézzen.

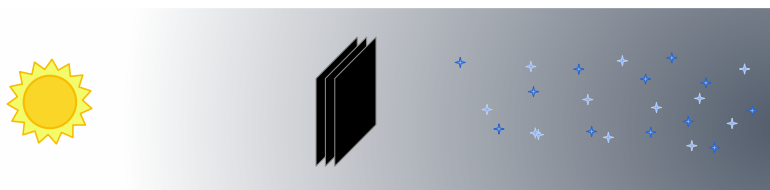
Mely lámpást és pontosan mennyivel fogják fényesebbnek látni a tengerészek, ha a partra merőlegesen nézik nagy távolságról?



35 Julcsi szeret részecskékkel játszani. Beüzemelte saját ködkamráját és $B = 10$ T erősségű mágneses mezőbe helyezte. Észrevette, hogy egy bizonyos pillanatban egy proton és egy müon lépett be a kamrába, két koncentrikus félkör nyomát hagyva maguk után a ködben. Mindkét részecske $v = 0,99c$ sebességgel mozgott a mező irányára merőlegesen. Pályájuk párhuzamos volt, mielőtt a kamrába léptek. Mekkora volt a köztük lévő távolság ekkor?

A müonnak ugyanakkora a töltése mint az elektronnak, de 207-szer nehezebb.

36 Három nagy, tökéletesen fekete takaró szárad kötelekre terítve egy úrállomás ablaka mögött. A Nap merőlegesen süt az első takaróra $F_{\odot} = 1370 \text{ W/m}^2$ felületegységenkénti teljesítménnyel. Mi a harmadik takaró egyensúlyi hőmérséklete, ha kizárólag üres külső űr van mögötte?



37 Mátyás eldöntötte, hogy végigmegy a híres Kis-Kárpátok Borúton. De már az első borpincében jobban lenyűgözték a boros hordók, mint azok tartalma. Hengeres alakúak voltak, alapjuk sugara 0,5 m, magasságuk pedig 1,6 m volt. A hordók egyenes lécekből álltak, melyeket fémgyűrűk fogtak össze. Azon gondolkodott, vajon legalább hány fémgyűrűre lehet szükség ahhoz, hogy a hordó ne essen szét az alapjára állítva.

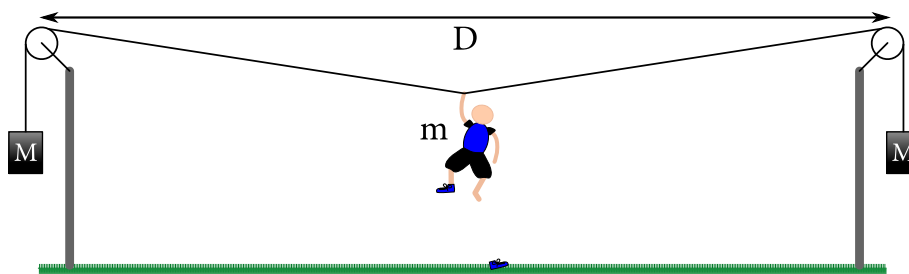
A fémgyűrűk végső szakítószilárdsága 20 MPa, keresztmetszetük 30 mm^2 és a bor sűrűsége 1000 kg/m^3 .

38 Simon továbbra is polarizációs szűrőkkel játszik. Természetesen ennyi kísérlet után kissé összepiszkolódtak. Így mindegyik csak 90 %-át engedi át a polarizáció síkjában beérkező fénynek (de továbbra sem engednek be arra merőlegesen polarizált fényt).

Mi a legnagyobb erősségű vízszintesen polarizált fény amit Simon elő tud állítani? A beérkező fény továbbra is függőlegesen polarizált és az erőssége I_0 . Simonnak továbbra is 10 polarizációs szűrő áll rendelkezésére, de nem szükségeses mindet felhasználnia.

39 Mari szappanbuborékokat fúj. Mivel ő egy jólelkű, empatikus személy, így zavarta, hogy a buborékon belül a levegő elnyomás alatt van. Ezért úgy döntött, hogy a buborékra töltést visz fel. Mekkora töltést kell, hogy adjon egy 4 cm sugarú buborékra, hogy atmoszférikus nyomás legyen benne? Tekintsük a szappanos víz felületi feszültségét a sima víz felületi feszültségének $\frac{1}{3}$ -adának. Az eredményt 2 tizedesjegyre pontossággal add meg (3 értékes jegyig)!

40 János folyamatosan újítgatja kedvenc életnagyságú vasútmodelljét. Legutóbb felsővezetékekkel kísérletezett. A tartókábel a póznák tetején elhelyezett két-két csigán keresztül vezetve van felakasztva, valamint a két végére erősített nehéz súlyok feszítik ki. A kábelek egy rutinellenőrzése során János egy furcsa balesetet szenvedett, melynek következtében pontosan két pózna között pontosan középen hintázva ott maradt a tartókábelen. Számold ki János függőleges mozgásának periódusidejét! Tegyük fel, hogy $\frac{M}{m} = \frac{41}{18}$ és a póznák $D = 25 \text{ m}$ távolságra vannak egymástól.



Megoldások

1 Elsőnek kifejezzük az autó gyorsulását és lassulását könnyebben használható mértékegységekben:

$$a_+ = \frac{100 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = 10 \frac{\text{km/h}}{\text{s}} \quad \text{a} \quad a_- = \frac{100 \text{ km/h}}{6 \text{ s}} = \frac{100 \text{ km/h}}{6 \text{ s}}.$$

Hogy elkerüljük a csúnya számok használatát, a gyorsulásokat ebben az alakban hagyjuk, és az időt alakítjuk ehhez illő mértékegységekre. Ezáltal, amikor a gyorsulás és idő van megadva, az at^2 kifejezés egységei a következők:

$$\frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot \text{h} \cdot \text{s} \equiv \frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} \cdot \text{s}.$$

Az átláthatóság kedvéért osszuk fel az utat a közlekedési táblák közti részekre:

I. Először nyugalomból kell 90 km/h-ra gyorsulnunk, ami 9 s-ig tart. Ez alatt az idő alatt a megtett távolság:

$$s_{\text{Ia}} = \frac{1}{2} a_+ t^2 = 112,5 \text{ m}.$$

Meg kell állnunk az első szakasz végén. A lassítás 5,4 s-ig tart és a távolság:

$$s_{\text{Ic}} = v_1 t - \frac{1}{2} a_- t^2 = 60 \text{ km/h} \cdot \frac{5,4 \text{ s}}{3600 \text{ s/h}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100 \text{ km/h}}{6 \text{ s}} \right) \cdot \frac{(5,4 \text{ s})^2}{3600 \text{ s/h}} = 67,5 \text{ m}.$$

Az első szakasz maradék $s_{\text{Ib}} = 990 \text{ m}$ részét állandó sebességgel tesszük meg. Ezáltal az első szakaszra kapott utazási idő:

$$t_{\text{I}} = 9 \text{ s} + \frac{s_{\text{Ib}}}{v_1} + 5,4 \text{ s} = 54 \text{ s}.$$

II. A kezdés ugyanolyan mint az első szakaszon. Ez azt jelenti, hogy 9 s-ig gyorsulunk és megteszünk $s_{\text{IIa}} = 112,5 \text{ m}$ távolságot. A végén le kell lassítanunk 60 km/h-ra. Ez 1,8 s-ig tart, és az autó megteszi a következő távolságot:

$$s_{\text{IIc}} = 90 \text{ km/h} \cdot 1,8 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{100 \text{ km/h}}{6 \text{ s}} \cdot (1,8 \text{ s})^2 = 37,5 \text{ m}.$$

A szakasz maradék részét állandó sebességgel haladva tesszük meg, így a kapott idő:

$$t_{\text{II}} = 9 \text{ s} + \frac{s_{\text{IIb}}}{v_1} + 1,8 \text{ s} = 18 \text{ s}.$$

III. Az út végi lassulás 3,6 s-ig tart, és az ehhez tartozó távolság:

$$s_{\text{IIIb}} = v_{\text{III}} t - \frac{1}{2} a_- t^2 = 30 \text{ m}.$$

A szakasz maradék része $s_{\text{IIIa}} = 1190 \text{ m}$ hosszú. Állandó sebességgel haladunk rajta, így a harmadik szakaszon a következő ideig leszünk:

$$t_{\text{III}} = \frac{s_{\text{IIIa}}}{v_{\text{III}}} + 3,6 \text{ s} = 75 \text{ s}$$

Összesítve, a teljes utazás 147 s-ig tart.

2 Legyen a vonat tömege M , a vonat sebessége V , Kati autójának tömege és sebessége pedig rendre m és v . A feladat szövegéből tudjuk, hogy a lendületük aránya:

$$\frac{MV}{mv} = 150, \quad (2.1)$$

amelyből kiszámolhatjuk a sebességük arányát:

$$\frac{V}{v} = 150 \frac{m}{M}. \quad (2.2)$$

A mozgási energiák aránya:

$$\frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 100. \quad (2.3)$$

Ha a sebességek arányát a 2.2 egyenletből behelyettesítjük a 2.3 egyenletbe, megkapjuk, hogy

$$\frac{M}{m} = 100 \frac{v^2}{V^2} = \frac{100}{150^2} \frac{M^2}{m^2}, \quad \text{from where} \quad \frac{M}{m} = 225.$$

3 Jelöljük a héliumos lufi tömegét M -el, a kisebbeket m -el, valamint a sugarukat R -el és r -el. Az összekötött lufik nem szállnak el, ha az együttes súlyuk nagyobb, mint a rájuk ható eredő felhajtó erő. Ha észre vesszük, hogy a kisebb lufikban lévő levegő súlya kiegyenlíti a rájuk ható felhajtó erőt, akkor megkapjuk az el nem szállás egyenletét

$$M + Nm + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{He}} \geq \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a.$$

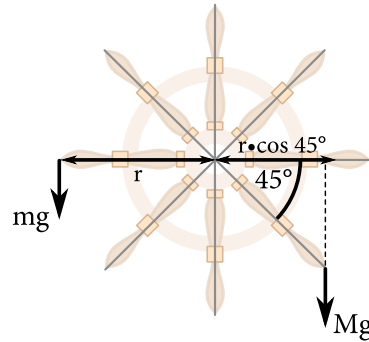
A lehető legkevesebb lufik számát kifejezve

$$N = \left\lceil \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_{\text{He}}) - M}{m} \right\rceil.$$

Ha beírjuk az ismert adatokat, akkor megkapjuk, hogy $N = 6$.

4 Ahhoz, hogy a kerék ne forduljon el, a forgatónyomatékok a kormány tengelyére ható összegének nullának kell lennie. Ebből következően:

$$mgr = Mgr \cos 45^\circ \quad \Rightarrow \quad M = m \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}m.$$



5 Egy vezeték ellenállása a hosszától (l), a keresztmetszetétől (S) és az anyagi minőségétől (vezetőképesség, ρ) függ, méghozzá a következő módon:

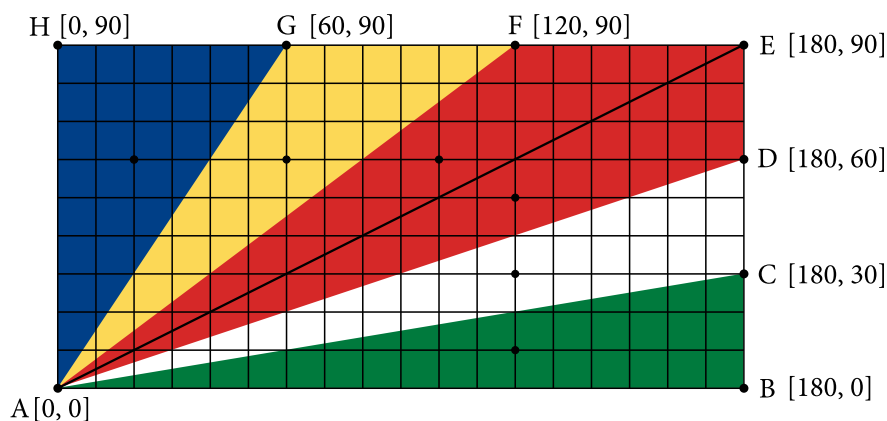
$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

A vezeték plasztikus deformációja nem változtatja meg sem annak térfogatát, sem a vezetőképességét. Amennyiben tehát a hossza kétszeresére változik a húzás következtében, a keresztmetszete felére kell, hogy csökkenjen az említett térfogatmegmaradás miatt. A megnyújtott vezető ellenállása tehát

$$R' = \rho \frac{2l}{\frac{S}{2}} = 4\rho \frac{l}{S} = 4R.$$

6 Jelölje az egyes háromszögek felületi tömegsűrűségeit balról jobbra σ_1 - σ_6 . A tömegeik egyszerűen úgy számíthatóak ki, hogyha megszorozzuk a sűrűségeket a felületükkel. Ebből

$$m_1 = 162 \text{ g}, \quad m_2 = 108 \text{ g}, \quad m_3 = 81 \text{ g}, \quad m_4 = 81 \text{ g}, \quad m_5 = 135 \text{ g}, \quad m_6 = 243 \text{ g}.$$



Ábra 6.1: Zászló négyzetrácsal

Ezután megkeressük az egyes háromszögek tömegközéppontjait. Kezdjük az $\triangle AGH$ háromszöggel. Egy háromszög tömegközéppontja a súlyvonalainak metszéspontjainál található, a súlyvonalak harmadolópontjánál. Amennyiben a háromszöget egy derékszögű koordinátarendszerbe helyezzük, összekötjük az A csúcsát a GH szakasz felezőpontjával és megkeressük a GH szakaszhoz közelebb eső harmadolópontját a berajzolt

szakasznak, láthatjuk, hogy a középpont koordinátái [20 cm; 60 cm]. Hasonlóan a többi háromszög esetén:

$$T_1 = [20 \text{ cm}; 60 \text{ cm}], \quad T_2 = [60 \text{ cm}; 60 \text{ cm}], \quad T_3 = [100 \text{ cm}; 60 \text{ cm}],$$

$$T_4 = [120 \text{ cm}; 50 \text{ cm}], \quad T_5 = [120 \text{ cm}; 30 \text{ cm}], \quad T_6 = [120 \text{ cm}; 10 \text{ cm}].$$

Ezután meg kell találnunk a teljes zászló tömegközéppontját. Általánosan, ennek X koordinátája m_1, m_2, \dots, m_n tömegű objektumok esetén, ahol ezek x koordinátája rendre x_1, x_2, \dots, x_n a következőképpen számítható ki:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

A mi esetünkben ez $X = 90 \text{ cm}$

Ezt hasonló módon számíthatjuk ki az y koordinátára is, ez pedig

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \doteq 39 \text{ cm}.$$

Ezek alapján a zászló geometriai középpontjától a tömegközéppont távolsága kb. 6 cm.

7 A szánkó gyorsulása az egyes szakaszokban meghatározható a grafikonról:

$$a_1 = 1,5 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = 0,5 \text{ m/s}^2, \quad a_3 = -0,25 \text{ m/s}^2.$$

Az első szakaszban Jóska F erővel húz. Newton II. törvénye szerint

$$m = \frac{F}{a_1}. \quad (7.1)$$

A második szakaszban $F_{t1} = fmg$ súrlódási erő is hat, ahol f a súrlódási együttható a szánkó és a talaj között. Tehát a szánkóra ható erők eredője

$$F - F_{t1} = F - fmg = ma_2. \quad (7.2)$$

Az utolsó szakaszban két különbség van – nagyobb az $m + M$ össztömeg és nagyobb a $F_{t2} = f(M + m)g$ súrlódási erő. Megkapjuk, hogy

$$F - F_{t2} = F - f(M + m)g = (M + m)a_3. \quad (7.3)$$

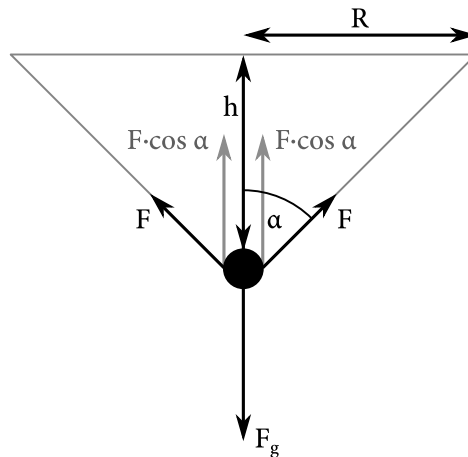
Most már mindent meg tudunk határozni, ami érdekel minket. Az 7.1 egyenletből behelyettesítjük m -et a 7.2 egyenletbe, és azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{a_1 - a_2}{g}.$$

Aztán behelyettesítjük f -et 7.3-be, így végül megkapjuk Peti tömegét úgy, mint

$$M = m \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1 - a_3} = 60 \text{ kg}.$$

8 Mivel a csillár sugárirányban szimmetrikus, ezért egy egyszerűbb kétdimenziós problémaként tekinthetünk rá:



Mindegyik fonálban fellépő feszítő erő függőleges komponense $F \cos \alpha$. Hogy megakadályozzuk a csillár leesését, a villanykörtére ható eredő erőnek nullának kell lennie. Mivel négy fonál van ráerősítve, megkapjuk a

$$4F \cos \alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{mg}{4F}.$$

egyenletet.

A h magasságot keressük. A fenti egyenletből kifejezhetjük

$$\tan \alpha = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{mgR}{\sqrt{16F^2 - m^2g^2}}.$$

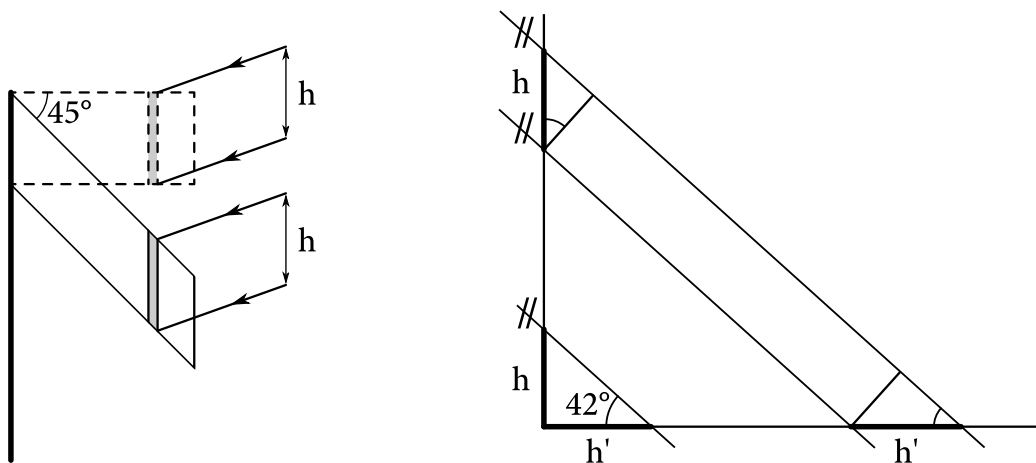
A behelyettesítés után megkapjuk, hogy $h = 10$ cm.

9 Elsőnek számoljuk ki a Nap magasságát az égen Pozsonyban. Délben a Nap pontosan délről süt. A napéjegylenlőség napján a Nap pontosan az egyenlítő felett van. A Föld Naphoz legközelebbi pontja az egyenlítő és a Pozsonyon áthaladó meridián metszéspontjánál van. A fénysugarak $90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$ szög alatt érkeznek be Pozsonyba az helyi felszínhez viszonyítva.

Mínt hogy a szél északnyugatról fúj, így a zászló délkeleti irányban áll és a fénysugarakhoz viszonyítva 45° -os szögben áll. Ezáltal az effektív keresztmetszete a zászlónak kisebb a Nap felől nézve. Ha elforgatnánk a zászlót kelet-nyugati irányba, elég lenne mindössze egy $\cos 45^\circ \cdot 10 \text{ m}^2$ területű zászló, hogy eltakarjon ugyanannyi fénysugarat, ahogyan az a kép felén látszik **9.1**.

A napsugarakat levetítjük a földre. Az árnyék hossza kelet-nyugati irányban változatlan, míg az észak-déli irányban h'/h -szorosára nyúlik. A következőt kapjuk:

$$h = h' \tan 42^\circ \quad \Rightarrow \quad h' = h \cot 42^\circ.$$



Ábra 9.1: A zászló vetülete kelet-nyugati irányban és a földön

Ezáltal a földön lévő árnyék területe $\frac{\cos 42^\circ}{\sin 42^\circ} \cdot \cos 45^\circ \cdot 10 \text{ m}^2 = \cot 42^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot 10 \text{ m}^2 \doteq 7,85 \text{ m}^2$ lesz.

Észrevehetjük, hogy ez érvényes bármilyen nem téglalap alakú zászlóra is - bármilyen alakot tetszőlegesen jól közelíthetünk nagy számú nem átfedő téglalappal.

10 Legyen az átlagos távolság két egymás utáni autó között d . Ekkor az eltelt idő két egymás utáni autóval találkozás között $t = \frac{d}{w}$, ahol w az autók és a vonat közös sebessége. A frekvencia az átlagos időnek az inverze.

Legyen v az autók sebessége, u pedig a vonat sebessége. Ekkor az ellenkező irányban haladó autókval való találkozás frekvenciája $f^+ = \frac{v+u}{d}$ a megegyező irányba haladók esetén pedig $f^- = \frac{|v-u|}{d}$.¹ Nyilvánvalóan, $f^+ > f^-$. Feltesszük, hogy f^+ k -szor nagyobb, mint f^- . Ekkor

$$v + u = k|v - u|.$$

Meg kell találnunk a vonatnak azt az u sebességét, amely a fenti egyenletet kielégíti. Két esetet kell figyelembe vennünk. Ha $v > u$, akkor $v + u = k(v - u)$, tehát emiatt

$$u = \frac{k-1}{k+1}v.$$

Ha $v < u$, akkor $v + u = k(u - v)$, innentől fogva

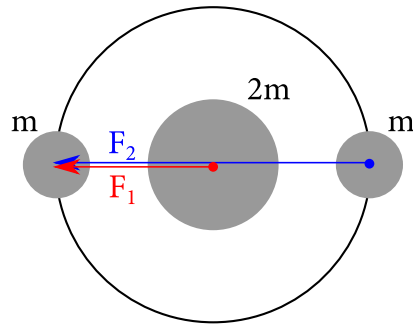
$$u = \frac{k+1}{k-1}v.$$

Amennyiben $k = 4$ és $v = 90 \text{ km/h}$, két lehetséges értéket kapunk a vonat sebességére: $u = 54 \text{ km/h}$ és $u = 150 \text{ km/h}$.

11 Mindkét holdat vonzza a másik hold és a bolygó gravitációs ereje. Annak érdekében, hogy körpályán mozogjanak, a holdra ható eredő erőnek az R sugarának megfelelő centripetális erőnek kell lennie.

$$F_1 + F_2 = G \frac{Mm}{R^2} + G \frac{m^2}{4R^2} \stackrel{!}{=} \frac{mv^2}{R}.$$

¹Az abszolútérték biztosítja, hogy a frekvencia mindig pozitív legyen, mivel a vonat lehet gyorsabb és lassabb is az autóknál.



Hogy kiszámoljuk a keringési időt, ki kell fejeznünk a holdak sebességét. Ebből következően a keringési időt megkaphatjuk a megtett út és a hold sebességének hányadosaként.

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Ezért:

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{9Gm}{4R}}} = \frac{4\pi R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{Gm}}.$$

12 A esés során csak a gravitáció hat a tojásra, ami konzervatív – emiatt leírható potenciállal. Ezáltal a probléma a mozgási és potenciális energia vizsgálatával is megoldható.

Tamás mindig ugyanakkora kezdősebességgel dobja a tojást, az iránytól függetlenül. Ezáltal a tojás mozgási energiája mindig a következő:

$$E_k(H) = \frac{1}{2}mv^2$$

a potenciális energiája pedig:

$$E_p(H) = mgH$$

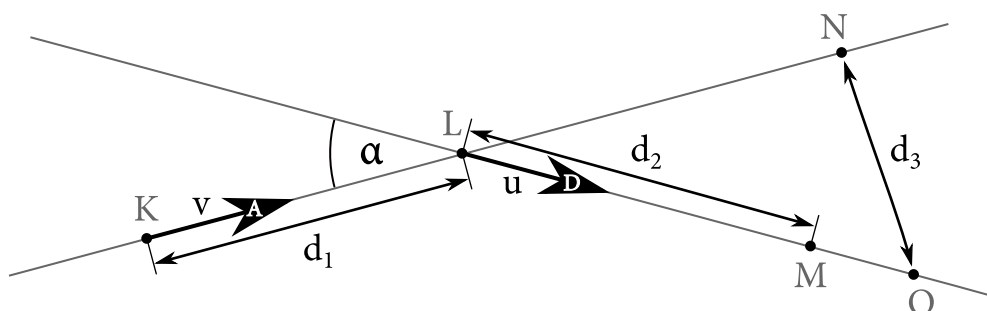
(a földet véve a potenciális energia nullszintjének).

A mozgási és potenciális energia összege megmarad, így nulla magasságban a föld felett a következőt kapjuk:

$$E_k(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv^2(0) + mg \cdot 0 \stackrel{!}{=} E_k(H) + E_p(H) = \frac{1}{2}mv^2 + mgH.$$

Ezáltal $v(0) = \sqrt{v^2 + 2gH}$ adódik a kezdeti szögtől függetlenül.

13 Rajzoljuk fel a hajók útvonalait:



Legyen $d_1 = 3d$, $d_2 = 4d$ és $d_3 = 21d$. Láthatjuk, hogy

- A hajó K pontból L pontba t idő alatt jut el és d_1 távolságot tesz meg. A sebességét a következőképp számíthatjuk ki: $v = \frac{d_1}{t} = \frac{3d}{t}$.
- D hajó L pontból M pontba szintén t idő alatt jut el, miközben $d_2 = 4d$ távolságot tesz meg. A sebessége: $u = \frac{d_2}{t} = \frac{4d}{t}$.
- A hajónak L pontból N pontba eljutni $5t$ időbe telik, miközben $s_1 = v \cdot 5t = 5d_1 = 15d$ utat tesz meg.
- D hajónak L pontból O pontba eljutni $6t$ időbe telik, miközben $s_2 = u \cdot 6t = 6d_2 = 24d$ utat tesz meg.

Keressük α szöget. Kiszámítottuk $\triangle LON$ háromszög minden oldalának a hosszát, így a koszinusz tételt alkalmazva megállapíthatjuk a keresett szög nagyságát.

$$d_3^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2 \cos \alpha,$$

amiből következik, hogy

$$\alpha = \arccos \frac{s_1^2 + s_2^2 - d_3^2}{2s_1s_2} = \arccos \frac{25d_1^2 + 36d_2^2 - d_3^2}{60d_1d_2}.$$

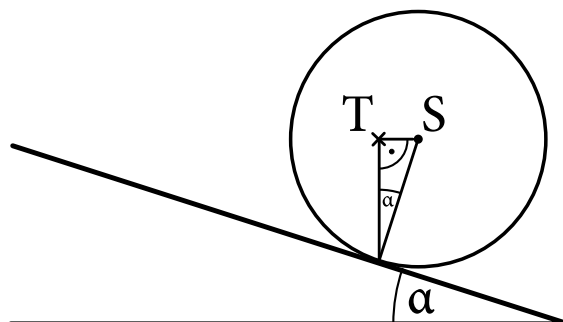
Behelyettesítve d_1 -et, d_2 -t és d_3 -at:

$$\alpha = \arccos \frac{225d^2 + 576d^2 - 441d^2}{720d^2} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

14 Amennyiben egy birka fel tud mászni a dombra, akkor elegendően nagy súrlódásnak kell lennie közte és a domb között, hogy ne csússzon le. Tehát ahhoz, hogy a birka mozogni tudjon, képesnek kell lennie elfordulnia egy dombbal való érintkezési pontja körül. Ahhoz, hogy a birka nyugalomban maradjon az szükséges, hogy a dombbal való érintkezési pontra ható forgatónyomatéka ne legyen negatív, azaz a domb irányába mutasson. A forgatónyomatékok összegét három, a birkára ható, erő határozza meg:

- a tömegközéppontra ható gravitációs erő;
- a tartóerő, amely az érintkezési pontban hat;
- a súrlódási erő, amely szintén az érintkezési pontban hat.

Az érintkezési pontban ható erők nem befolyásolják a forgatónyomatékok összegét, mivel a hozzájuk tartozó erőkar nulla hosszúságú. Az egyetlen erő, amellyel számolni kell, az a gravitációs erő. Ahhoz, hogy a birka a hegyen maradjon a forgatónyomatéknak nullának kell lennie. Mivel a gravitációs erő iránya mindig lefelé mutat, ezért a birka tömegközéppontjának közvetlenül az érintkezési pont felett kell elhelyezkednie.



A birka geometriai középpontja és az érintkezési pont közötti legnagyobb távolság, és így a legmeredekebb lejtő annak az esetnek felel meg, amikor a birka tömegközéppontja egyenlő magasan van a geometriai

középpontjával. Ebben a szélső esetben a birka tömegközéppontja, érintkezési pontja és geometriai középpontja közötti szög megegyezik a lejtő α szögű meredekségével. Ebből következően:

$$\sin \alpha = \frac{R/4}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \leq \arcsin \frac{1}{4} \doteq 14,48^\circ.$$

15 Jelöljük az egyes időket így:

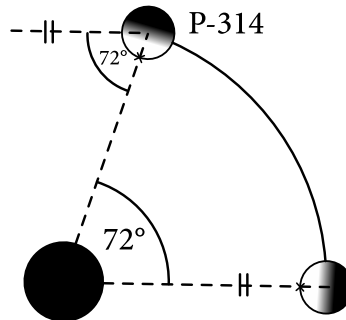
- t_1 a két naplemente között eltelt idő;
- t_2 az év hossza;
- t a keresett tengely körüli forgás ideje.

A bolygó két egymás utáni naplemente között $\frac{t_1}{t}$ forgást hajt végre és $\frac{t_1}{t_2}$ részét járja be a pályájának. Ez megegyezik azzal az állapottal, amelyben újra ugyanabban az irányban áll a bolygó a napjához képest. A kép mutatja, hogy a bolygó egy teljes és még egy törtfordulatot hajtott végre, amely tört rész pontosan megegyezik a teljes nap körüli keringési pálya és bejárt pálya arányával. Matematikailag

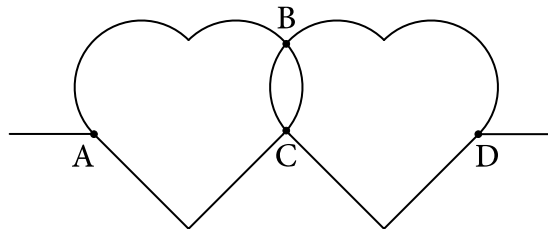
$$\frac{t_1}{t} = 1 + \frac{t_1}{t_2}.$$

Amiből következik, hogy

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_2 + t_1} = 50 \text{ h.}$$



16 Jelöljük a nyaklánc négy pontját A , B , C és D -ként.



Ábra 16.1: A nyaklánc 4 fontos pontja

Az eredő ellenállás az A és B pontok között $\frac{3}{2}\pi r\rho$, a szimmetria miatt pedig, az ellenállás a B és D pontok között ugyanennyi. Hasonlóképp az ellenállás A és C között, ahogy C és D pontok között is, $4r\rho$.

Kimondhatjuk továbbá, ismét kihasználva a szimmetriát, hogy B és C pontokban azonos a potenciál, így az őket összekötő drótot figyelmen kívül hagyhatjuk. Így két párhuzamos drótot kapunk, egyiknek $8r\rho$ ellenállása, a másiknak $3\pi r\rho$.

A teljes áramkör ellenállása ez alapján:

$$\frac{1}{\frac{1}{8r\rho} + \frac{1}{3\pi r\rho}} = \frac{24\pi}{3\pi + 8} r\rho \doteq 4,327r\rho.$$

17 Mivel a feszültség az áramkörben állandó, a fűtőberendezés teljesítménye csak az ellenállásától függ. A teljesítmény kifejezhető a feszültségből és az áramból, de ez esetben az áramkörön átfolyó áram meghatározható, mint $I = U/R$. Ezért

$$P = UI = \frac{U^2}{R}.$$

Ha összeszámoljuk az összes lehetséges összeállítást, azt találjuk, hogy összesen 18 féle képpen tudja Lukács összeszerelni a berendezést: - nincs ellenállás (1 eset) - 1 db ellenállás (3 eset) - 2 ellenállás sorba kapcsolva (3 eset, a sorrendjük nem számít) - 3 ellenállás sorba kapcsolva (1 eset, a sorrendjük nem számít) - 2 ellenállás párhuzamosan kapcsolva (3 eset, melyik marad ki) - 2 ellenállás párhuzamosan, és 1 sorba kapcsolva hozzájuk (3 eset) - 2 ellenállás sorba, és 1 párhuzamosan kapcsolva hozzájuk (3 eset) - 3 ellenállás párhuzamosan kapcsolva (1 eset)

Hogy ne tegyük tönkre a biztosítékot a teljes ellenállás nem lehet kevesebb, mint $\frac{230\text{ V}}{15\text{ A}} \doteq 15,5\ \Omega$. Az ellenállás nélküli eset rövidre zárja a fűtőberendezést és kivágja a biztosítékot. Az eset a 3 db párhuzamos ellenállással pedig összesen csak

$$R = \frac{1}{\frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} + \frac{1}{60\ \Omega}} = 10\ \Omega,$$

ellenállást termel, ami túl kevés, így ez is tönkreteszi a biztosítékot. Ugyanez igaz a 20 a 30 Ω -os és a 20 a 60 Ω -os ellenállásokra is, mikor párhuzamosan kapcsoljuk azokat: az ellenállásuk csak 12 Ω és 15 Ω egyenként. Az összes többi megoldás biztonságos.

Vagyis már csak 14 eset maradt. Viszont ezek közül kettőnek ugyanannyi az ellenállása: ha párhuzamosan kapcsoljuk a 2. és 3. ellenállást, $R = 20\ \Omega$ ellenállást kapunk, ami megegyezik azzal, mintha csak az első ellenállást használnánk.

Ennek következtében csak 13 lehetséges módon tudja Lukács beállítani a fűtőberendezés teljesítményét.

18 Mivel a két kar konstans átlagos szögsebességgel mozog és a XII-es jelzésen egyidejűleg haladnak át, ezért pontosan két hasonló megoldás van, melyek csak a nyomaték irányában térnek el egymástól; és mindkettő egyenlő távolságra van éjfélről vagy déltől. Mi most csak azt az esetet fogjuk elemezni, amikor az erőóramutató járásával ellentétes irányba mutat, ami este történik. A reggeli megoldás ennek a tükörképe a függőleges tengelyre.

Először észre kell vennünk, hogy a percmutató kétszer olyan hosszú, mint az óramutató, de tömege csak felakkora, tehát mindkét mutató egyenlő nyomatékot gyakorol egyenlő szögek esetén. Az óramutatónak egy teljes kör megtételéhez szükséges idő 43200 másodperc, és 3600 másodperc a percmutatónak. A nyomatékokat a szögekkel fejezzük ki (a XII-es jeltől mérve)

$$M = M_{\text{hour}} + M_{\text{min}} = 2md \sin\left(\frac{2\pi t}{43\ 200\ \text{s}}\right) + 2md \sin\left(\frac{2\pi t}{3600\ \text{s}}\right). \quad (18.1)$$

A maximum meghatározásához differenciálnunk kell ezt a függvényt. Ha erre nem vagyunk képesek vagy hajlandók, akkor viszonylag egyszerű, ha gondolkozunk egy kicsit, és a számológépünk segítségével próbálkozás útján jutunk el a megoldáshoz. A d és m értékek állandók, és mivel mi csak a nyomaték idejére, és nem nagyságára vagyunk kíváncsiak, így mindkettőt figyelmen kívül hagyhatjuk.

Ösztönösen értenünk kell, hogy a mutatók a legnagyobb nyomatékot háromnegyed kilenc körül fejtik ki, amikor mindkét mutató közel van az IX jelhez. Azonban, pontosan 08:45-kor az óramutató még $3,75^\circ$ -kal a jel alatt van, és idővel a nyomatéka még mindig nő. A pontos maximum ezért kissé később lép fel.

A pontos 08:45:00 időpontra behelyettesítjük $t = 31\,500$ s -et 18.1 -ba és számológépünk segítségével megállapítjuk, hogy

$$M_{08:45:00} \doteq 1,991\,445 \cdot 2mg.$$

Próbálgatás útján megismételjük ugyanezt a következő pár másodperccel is. Hamarosan rájövünk, hogy a nyomaték kissé növekszik még egy pár alkalommal, de $t = 31\,506$ s = 08:45:06 után újra csökkenni kezd. Más lokális maximumok 06:00 és 12:00 között ennél kisebbek kell, hogy legyenek.

Végül, szeretnénk megtalálni a tükrözött megoldást, vagyis a kiegészítést 43200 másodperchez. Tehát, a megoldások

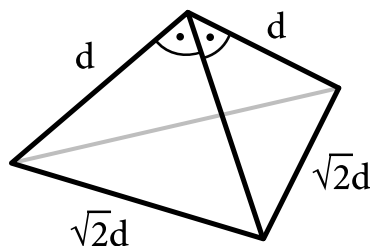
$$t = 11\,694 \text{ s} \equiv 03:14:54, \quad \text{és} \quad t = 31\,506 \text{ s} \equiv 08:45:06,$$

vagy, mindkettő esetben 12 órával később.

19 Egy folyadékba merített kocka Archimedes törvényét követi, miszerint a kocka és a folyadék sűrűségének aránya és a kocka bemerített és teljes térfogatának aránya egyenlő. Legyen a a kocka oldalának hossza, ρ_w a víz sűrűsége, ρ_c pedig a kocka sűrűsége, így az első esetben:

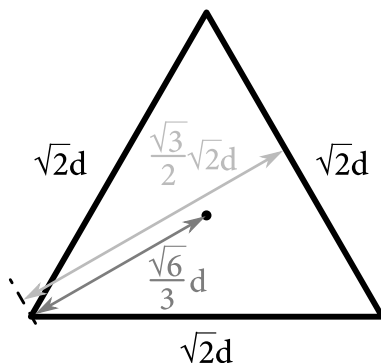
$$\frac{\rho_c}{\rho_w} = 1 - \frac{a^2 \cdot 4 \text{ cm}}{a^3}. \quad (19.1)$$

A második esetben, a kilógó rész magassága 18 cm. Szabályos piramis forma látszik, melynek csúcsánál derékszögek vannak.



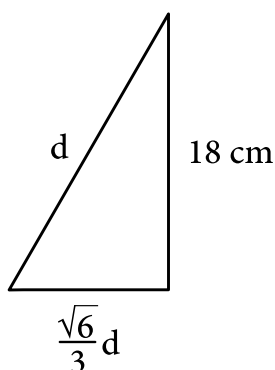
Ábra 19.1: A kocka kilógó része

A derékszöget képző éleket hívjuk d -nek. A piramis térfogata $\frac{1}{6}d^3$. A Pythagoras-tétel miatt, a piramis alapját képző élek hossza $\sqrt{2}d$. Koncentráljunk most az alapot alkotó háromszögre.



Ábra 19.2: A kocka és a vízfelszín közös felülete

Ez egy szabályos háromszög, aminek a magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}d$. A közepe és a csúcsai közti távolság $\frac{\sqrt{6}}{3}d$. Végül tekintsünk egy derékszögű háromszöget, amit az alap közepe, az alap egyik csúcsa, és a piramis felső csúcsa határoz meg.



Ábra 19.3: A szóban forgó derékszögű háromszög

A Pythagoras-tételből $d = 18\sqrt{3}$ cm. A második esetben:

$$\frac{\rho_c}{\rho_w} = 1 - \frac{\sqrt{3} \cdot (18 \text{ cm})^3}{2a^3}, \quad (19.2)$$

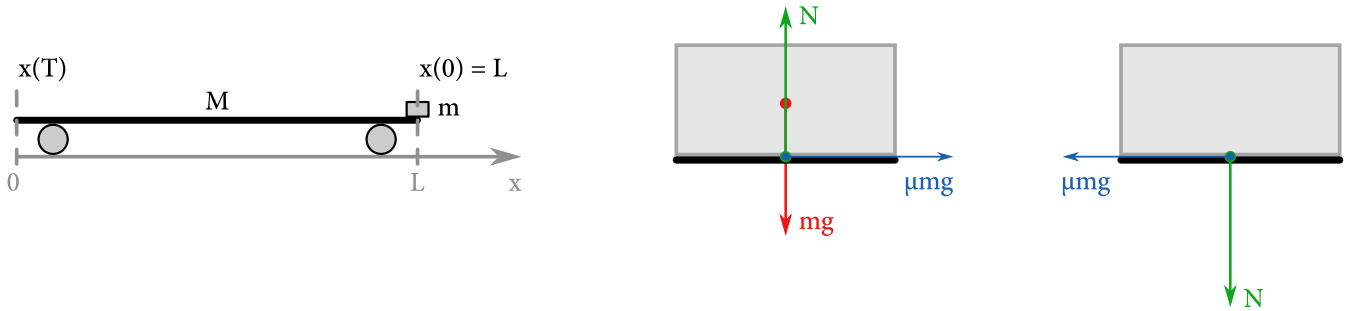
és összehasonlítva 19.1-ot 19.2-al, megkapjuk, hogy

$$a = 3^{\frac{13}{4}} \text{ cm.}$$

Végül behelyettesítve 19.1-be, a következő végeredményt kapjuk:

$$\rho_c = \left(1 - 4 \cdot 3^{-\frac{13}{4}}\right) \rho_w \doteq 887 \text{ kg/m}^3.$$

20 Kicsivel a gördeszka felgyorsítása után a kő még mindig nyugalomban van a deszka elején. A deszka v kezdeti sebességre gyorsul, majd rögtön lassulni kezd a kő és a deszka közötti súrlódás miatt. Newton III. törvénye értelmében a kő pedig gyorsulni kezd. A helyzet a képen jól látszik:



Először megtaláljuk a kő a és a gördeszka A gyorsulását:

$$a = \mu g, \quad A = -\mu \frac{m}{M} g. \quad (20.1)$$

Ezután L kezdeti pozícióval felírhatjuk a kő helyzetére és sebességére az egyenleteket

$$x_K(t) = L + \frac{1}{2} \mu g t^2, \quad (20.2)$$

$$v_K(t) = \mu g t \quad (20.3)$$

és a gördeszkára is ugyanezeket 0 kezdeti helyzettel

$$x_S(t) = v t - \frac{1}{2} \mu g \frac{m}{M} t^2, \quad (20.4)$$

$$v_S(t) = v - \mu \frac{m}{M} g t. \quad (20.5)$$

Hogy a kő ne essen le a deszkáról, a kőnek a deszkához viszonyítva mozdulatlaná kell válnia mire L távolságot megtenne. Rendeljük a mozgás kezdete óta eltelt teljes időt egy τ időpontban egyenlővé váló sebességekhez! A helyzetre és a sebességre a következő feltételeket szabhatjuk ki:

$$x_S(\tau) = x_K(\tau). \quad (20.6)$$

$$v_S(\tau) = v_K(\tau), \quad (20.7)$$

20.5 és 20.3 egyenleteket felhasználva, a sebességre felírt 20.7 feltétel egy τ -ra felírható egyenlethez vezet:

$$v - \mu \frac{m}{M} g \tau = \mu g \tau, \quad (20.8)$$

ami szerint

$$\tau = \frac{v}{\mu g} \frac{M}{m + M}. \quad (20.9)$$

Hasonlóan, 20.4 és 20.2 egyenleteket a helyzetre felírt 20.6 feltételbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L + \frac{1}{2} \mu g \tau^2 = v \tau - \frac{1}{2} \mu g \frac{m}{M} \tau^2.$$

Behelyettesítve a τ -t a 20.9 egyenletből

$$L = v\tau - \frac{1}{2}\mu g \frac{m+M}{M} \tau^2,$$

$$L = v \frac{v}{\mu g} \frac{M}{M+m} - \frac{1}{2}\mu g \frac{m+M}{M} \frac{v^2}{(\mu g)^2} \left(\frac{M}{M+m}\right)^2,$$

$$L = \frac{v^2}{\mu g} \frac{M}{m+M} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{\mu g} \frac{M}{m+M}.$$

Ebből pedig

$$v = \sqrt{2\mu g L \left(\frac{m+M}{M}\right)},$$

ahol a negatív megoldást elhagytuk, mert nincs fizikai tartalma.

21 Kezdjünk egy egyszerűbb és egyértelműbb feltétellel: a leérkezés pillanatában amikor a tömegközéppont magassága a talaj felett zérus, a telefon 2π többszörösével kellett, hogy elforduljon. A telefon homogén gravitációs mezőben zuhan, g gravitációs gyorsulással h magasságból, ekkor az eltelt idő

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

A telefon az asztalon a hátlapján nyugodott, ezért $2\pi k$ szöggel kellett elfordulnia t idő alatt, ahol k tetszőleges egész szám. Ebből következik, hogy

$$\omega = \frac{2\pi k}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

A másik lényeges feltétel, hogy a leérkezés pillanatában a felső és az alsó élei a telefonnak lefelé kell mozogniuk. Másképpen fel kéne emelkedniük a padlóról, ami fizikailag lehetetlen, továbbá, ez ellentmondana a feltételezésünknek, hogy a leérkezés az első érintkezés a padlóval. A lassabb él sebessége

$$v = -gt + \omega \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

ahol φ a talaj és a telefon által bezárt szög. A leérkezés pillanatában ennek 0° -nak kell lennie, ezért a $v \leq 0$ feltétel oda vezet, hogy

$$\sqrt{2hg} = gt \geq \omega \frac{l}{2}.$$

Minket a telefon maximális megengedett ω szögsebessége érdekel, amely még mindig kielégíti mindkét feltételt. Mindkét feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

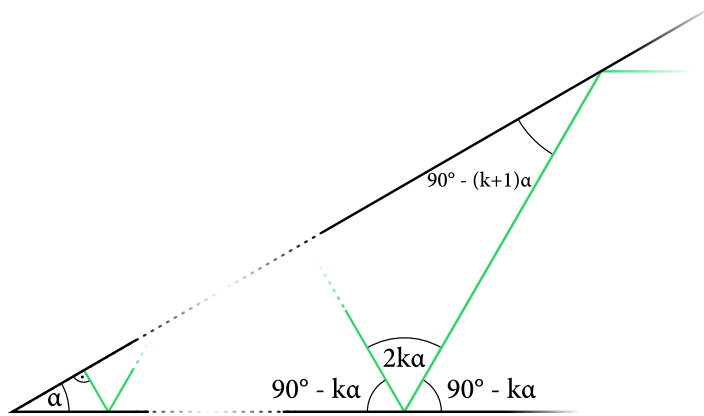
$$k \leq \frac{2h}{\pi l},$$

amely szerint a lehetséges legtöbb fordulat száma $k = 3$ a megadott értékek mellett.

22 Ahhoz, hogy a lézersugár ugyanazon a pályán térjen vissza, mint amelyiken beérkezett, merőlegesen kell visszaverődnie a tükrök valamelyikéről. Fordítsuk meg a folyamatot és kövessük a lézersugár útját viss-

zafelé, onnan kezdve, hogy a sugár a tükrök valamelyikéről 90° -os szögben visszaverődik. Először is tegyük fel, hogy a lézersugár visszaverődése a tükrökről a végtelenségig folytatódik. Később látni fogjuk, hogy miért hasznos számunkra ez a feltételezés.

Az első visszatükrözésnél a lézersugár $90^\circ - \alpha$ nagyságú szögben érkezik a tükrökre, majd természetesen ugyanilyen szögben vissza is verődik. A képen egy olyan helyzet látható, aminél a lézersugár néhány visszatükrözés után $90^\circ - k\alpha$ szögben érkezik a tükrök valamelyikére:



Ábra 22.1: A lézersugár visszaverődik $k\alpha$ szögű visszaverődésig.

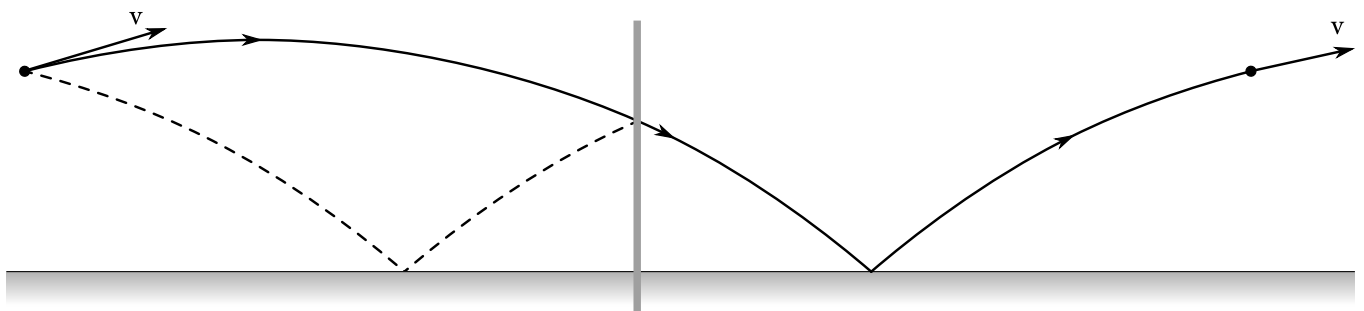
A háromszög belső szögeinek összegéből látható, hogy a lézersugár a következő visszatükrözésnél $90^\circ - (k + 1)\alpha$ szögben érkezik a tükrökre. Ebből következően a lézersugár visszaverődési szögeinek sorozata: $90^\circ, 90^\circ - \alpha, 90^\circ - 2\alpha, 90^\circ - 3\alpha, \dots$

A lézersugár csak akkor hagyja el a rendszert az egyik tükrövel párhuzamos pályán, ha ezen szögek valamelyike 0° . Ezáltal olyan α szögeket keresünk, amelyek kielégítik a $90^\circ - k\alpha = 0^\circ$ feltételt, ahol k tetszőleges természetes szám.

Így a megoldások mindegyike $90^\circ/k$ alakban felírható szög.

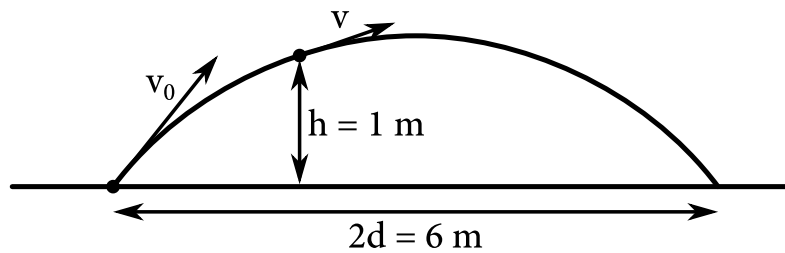
23 Észre kell venni, hogy mivel az ütközések tökéletesen rugalmasak, az első pattanás csupán a sebesség x komponensének irányát változtatja ellentettjére. Ezért a falat “tükröként” képzelhetjük el, amelyen túl a labda mozgása a valódi mozgás tükörképe.

Képzeljük tehát el, hogy nincsen fal, és a padló folytatódik. Ekkor Karcsitól $2d$ távolságra áll egy másik Karcsi, aki elkapja a labdát, miután az pattant a padlón:



Ábra 23.1: Egyenértékű megoldás a “tükrözés” után

Mivel a második pattanás is tökéletesen rugalmas, az csak a sebesség y komponensét fordítja meg. Így az energiamegmaradás miatt ugyanabba a magasságba fog felpattanni, ahol ugyanaz lesz a sebessége, mint kezdetben (amikor Karcsi eldobta). Tehát a labda mozgása során az eltelt idő (T) megegyezik azzal az esettel, mintha a labdát a padlóról lőttük volna fel, és a padlóra érkezne, csupán a parabola elejéről a hiányzó részt a végére helyeztük át. Vizsgáljuk meg tehát a φ szöggel és v_0 kezdősebességgel eldobott labda esetét, amely $2d$ távolságra ér földet, és h magasságban v a sebességének nagysága.



Ábra 23.2: Dobás, amelynek a szögét kell kiszámítani

A parabola-pályán való végighaladáshoz szükséges idő kiszámításához szükségünk van a hozzá tartozó v_0 kezdősebességre (annak v_x és v_y komponenseivel). Ezt az energiamegmaradás-ból kaphatjuk meg:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 = v^2 + 2gh. \quad (23.1)$$

Egy hajítás a

$$x(t) = v_x t, \quad y(t) = v_y t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (23.2)$$

mozgásegyenletnek tesz eleget.

Ismerjük a kezdő és a végpontot:

$$x(0) = 0 \quad \text{a} \quad x(T) = 2d, \quad y(0) = 0 \quad \text{a} \quad y(T) = 0. \quad (23.3)$$

Behelyettesítve 23.2-ből a jobb oldalra azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{2d}{v_x},$$

majd egy T -t kiegyszerűsítve a második egyenletből, megkapjuk, hogy

$$v_y = \frac{gT}{2} = \frac{gd}{v_x}.$$

Ez 23.1-be helyettesíthető és így

$$v_x^2 + \frac{g^2 d^2}{v_x^2} = v_0^2.$$

-hez jutunk.

v_x^2 -el szorozva a következő bikvadratikus (v_x^2 ben másodfokú) egyenlet keletkezik:

$$v_x^4 - v_0^2 v_x^2 + g^2 d^2 = 0,$$

amelynek két megoldása van.

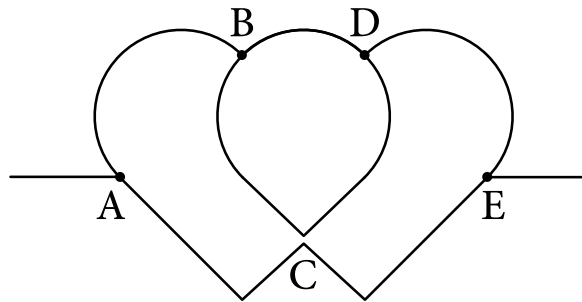
$$v_x^2 = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 4g^2 d^2}}{2}.$$

Ezekből az egyik nem felel meg a feladat feltételeinek. Ha ezzel a vízszintes sebességgel dobnánk el a labdát, a sebesség függőleges komponense túl csekély volna a h magasság eléréséhez, és így a feladatban leírt folyamat nem jöhetne létre. Ezért a negatív előjelet tartalmazó lesz a valódi megoldás. A mozgáshoz szükséges idő így:

$$T = \frac{2d}{v_x} = \frac{2d}{\sqrt{\frac{v^2 + 2gh - \sqrt{(v^2 + 2gh)^2 - 4g^2 d^2}}{2}}}.$$

A megadott konkrét értékeket helyettesítve a $T \doteq 2,425$ s eredményt kapjuk, vagy ha g precízebb értékét használjuk, egy kicsit több.

24 Jelöljük a csomópontokat A , B , C , D és E -vel. A szimmetriának köszönhetően, az A -ból C -be folyó áram (nem B -n keresztül), megegyezik a C és E között folyóval. Hasonlóan B -ből C -be is ugyanakkora áram folyik, mint C -ből D -be. Ez alapján ketté oszthatjuk az áramkört C -nél:



Az ellenállás A és B között, ahogy D és E között is

$$R_{AB} = R_{DE} = \pi r \rho.$$

a szimmetria miatt.

Az ellenállás A és E pontok között $6r\rho$. Két párhuzamos drót húzódik B és D között, ahol az egyiknek az ellenállása $\frac{1}{2}\pi r\rho$, a másiknak pedig $(2 + \pi)r\rho$.

Ezért az ellenállás B és D között

$$R_{BD} = \frac{2\pi + \pi^2}{3\pi + 4} r\rho.$$

A felső ág ellenállása A és E pont között

$$\left(2\pi + \frac{2\pi + \pi^2}{3\pi + 4}\right) r\rho = \frac{7\pi^2 + 10\pi}{4 + 3\pi} r\rho$$

Így a teljes áramkör ellenállása

$$\frac{42\pi^2 + 60\pi}{24 + 28\pi + 7\pi^2} r\rho \doteq 3,3306r\rho.$$

25 Legyen a hordó magassága H . Mivel a hordó félig van tele, a benne lévő levegő térfogata $V_0 = \frac{H}{2}S$. A hordóban lévő nyomás megegyezik a légköri nyomással. A tea kiömlése megáll, amikor a belső légnyomás és a tea hidrosztatikai nyomásának összege egyenlő a külső légnyomással. Emiatt,

$$p_a = p + \left(\frac{H}{2} - h\right)\rho g,$$

ahol h a tea felszínének süllyedése és ρ a tea tömegsűrűsége.

A hordóban lévő levegő hőmérséklete a kifolyás megállása után fokozatosan eléri a kicsapolás előtti hőmérsékletet. Az ideális gáztörvény szerint

$$p_0 \frac{H}{2}S = \left[p_a - \left(\frac{H}{2} - h\right)\rho g\right] \left(\frac{H}{2} + h\right)S.$$

Az előbbi egyenletet átrendezve, egy másodfokú egyenletet kapunk h -ra

$$h^2 + \frac{p_a}{\rho g}h - \frac{H^2}{4} = 0.$$

Ennek a pozitív megoldása a tea felszínének keresett süllyedése.

$$h = -\frac{p_a}{2\rho g} + \sqrt{\left(\frac{p_a}{2\rho g}\right)^2 + \frac{H^2}{4}}.$$

$H = 1$ m esetén azt kapjuk, hogy $h \doteq 25$ mm.

26 Megkeressük kereten lévő rugók rugalmas energiáját. Egy k rugóállandójú, x mértékben megnyújtott rugó energiája

$$E = \frac{1}{2}kx^2.$$

Tegyük fel, hogy a keret két szomszédos oldala közötti szög α . Ekkor az egyik rugó hossza $x_1 = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$, a másiké pedig $x_2 = 2d \cos \frac{\alpha}{2}$. Innentől fogva a keret teljes energiája

$$E = 2kd^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2kd^2.$$

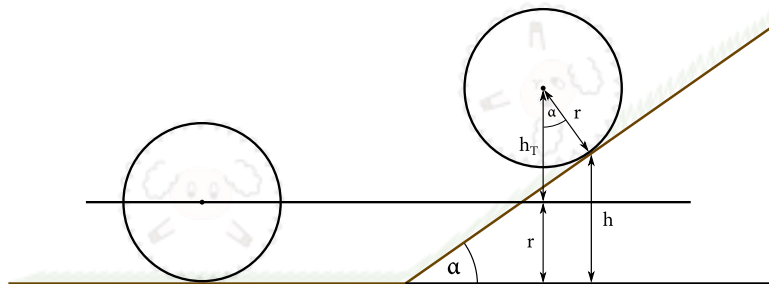
Látszik, hogy az energia független az α szögtől. Innentől fogva az erő, amely az α belső szög fenntartásához szükséges, zérus.

27 Ezt a feladatot az energiamegmaradás törvényével fogjuk megoldani. A birkának van egy bizonyos helyzeti energiája az útjának legmagasabb pontján – h magasságban a sík fölött. Ez a helyzeti energia mgh_T , ahol m a birka tömege, g pedig a nehézségi gyorsulás. A guruló birkák mozgási energiája az egyenes mozgásból és a forgómozgásból is fakad. A guruló birka körfrekvenciája (szögsebessége) v/r , a homogén henger tehetlenségi nyomatéka pedig $\frac{1}{2}mr^2$. Tehát a guruló birka teljes mozgási energiája

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4} \frac{mr^2v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Az energiamegmaradás törvényéből megkapjuk, hogy

$$h_T = \frac{3v^2}{4g}.$$



Vegyük észre, hogy a birka nem a legalsó pontjával érintkezik a dombbal, hanem egy kicsit magasabban. Ugyanis a legalsó pontja r függőleges távolságra helyezkedik el a középponti tengelytől, míg az érintkezési pont $r \cos \alpha$ távolsággal van alatta. Tehát a fű a következő magasságig lesz lelapítva:

$$h = \frac{3v^2}{4g} + r(1 - \cos \alpha).$$

28 Szimmetriai megfontolások alapján minden szárnynak (vagyis minden háromszög formájú résznek) ugyanakkora a tehetetlenségi nyomatéka, ezért elég az egyikét meghatározni, és ezt megszorozni hárommal. Emellett észrevehetjük, hogy két szárnyból egy a oldalú négyzetet tudunk létrehozni.

Minket a merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték érdekel, amely az egyik csúcson halad keresztül. A centrumon áthaladó merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékra vonatkozó képlet megtalálható a függvénytáblázatban, ez

$$I_{\square} = \frac{1}{6} m_{\square} a^2.$$

Ha nincs függvénytáblázatunk, ki tudjuk számítani skálázással és a Steiner-tétel segítségével. Ennek segítségével már meg tudjuk határozni a tehetetlenségi nyomatékot a csúcson áthaladó tengelyre vonatkoztatva.

Határozzuk most meg az új tengely távolságát a tömegközépponttól! $x = \frac{\sqrt{2}}{2} a$, tehát

$$I_{\square'} = I_{\square} + m_{\square} x^2 = \frac{1}{6} m_{\square} a^2 + m_{\square} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 = \frac{2}{3} m_{\square} a^2.$$

Sztella propellerében a fentebb már említett négyzetekből, vagyis ezek feléből 3 található, ezért a tehetetlenségi nyomatéka $3/2$ -szer akkora, $m_{\square} a^2$. Mivel $m_{\square} = \sigma a^2$, így

$$I_{\text{propeller}} = \sigma a^4.$$

A problémát megközelíthetjük más irányból is: elég azt látnunk, hogy a tehetetlenségi nyomaték csakis a test egyes pontjainak forgástengelytől mért távolságától függ. Ez a távolság nem változik a propeller szárnyainak forgástengely körüli tetszőleges elfogadásának hatására. Ez azt jelenti, hogy akár úgy is elforgathatjuk őket, hogy egy $2a$ oldalú négyzet $3/8$ -ad részét kapjuk.

Ekkor a propeller tehetetlenségi nyomatéka pont $\frac{3}{8}$ -ad része a nagy négyzet középpontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának, vagyis

$$I_{\text{propeller}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2a)^2 \sigma \cdot (2a)^2 = \sigma a^4.$$

A tehetetlenségi nyomaték gyakran van a következő formában megadva: az objektum tömegének konstansszorososa, megszorozva a karakterisztikus távolság négyzetével. A teljes propeller tömege $M = \frac{3}{2}\sigma a^2$. Amennyiben karakterisztikus távolságnak egy háromszög egyik szárát, vagyis a -t tekintjük, akkor a tehetetlenségi nyomaték értéke

$$I_{\text{propeller}} = \frac{2}{3}Ma^2$$

lesz.

29 Képzeljünk el egy rugót, mely n darab k merevségű (rugóállandójú) rugóból áll, sorba kötve. Ha F erőt fejtünk ki az így összeállított rugóra, minden rugó relatív összenyomódása ugyanakkora, mint az összeállított rugóé. Az abszolút összenyomódás n -szer nagyobb, mint az egyenkénti rugók összenyomódása és a teljes merevsége (rugóállandója) az összeállított rugónak csak $\frac{k}{n}$.

Abban az esetben, ha elvágjuk a rugót, ez fordítva működik – ha n darabra vágjuk a rugót, és F erőt fejtünk ki, az abszolút összenyomódása egy darabnak n -szer kevesebb, mint az eredeti rugóé volt, ami nk merevségnek (rugóállandónak) felel meg.

Ha összekapcsolunk n darab egyforma rugót és egy bizonyos hosszúságúra akarjuk összenyomni őket, akkor n -szer nagyobb erőt kell kifejtenünk, mint egy rugó összenyomásához. Ez azt jeletni, hogy az n darab, egyenként k merevségű (rugóállandójú) párhuzamosan összekapcsolt egyforma rugók teljes merevsége (rugóállandója) nk . Ennélfogva, az egymás mellé helyezett rugódarabok teljes merevsége kn^2 .

Észre kell vennünk, hogy a rugó nyugalmi hossza $\frac{1}{n}$ -re csökkent. Annak érdekében, hogy a föld fölött tartsuk az emelvényt, a rugókat kevésbé kell összenyomnunk, mint nyugalmi hosszuk. Az erő, amit Huba az emelvényrel együtt kifejt a rugókra $F_S = g \cdot 110 \text{ kg}$.

A rugó ereje $F_p = k'x = kn^2 \Delta x$, ahol Δx a rugó hosszának változása. A feltétel, hogy az emelvényt a föld fölött tartsuk

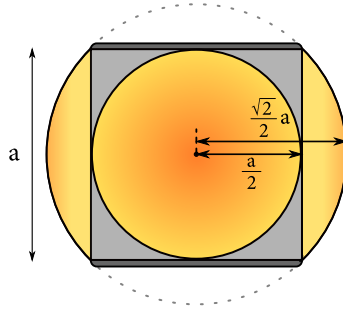
$$F_S < n \cdot 70 \text{ N}.$$

Egyszerű befejezni a számításokat és megkapni az eredményt, hogy Hubának legalább 16 darabra kell vágnia a rugót.

30 A megvilágított térszöget szeretnénk kiszámolni. Ez megegyezik annak a gömbnek a felületével, amit a lámpás meg tud világítani, ha a kockát a gömb középebe helyeznénk, elosztva a gömb sugarának négyzetével. A probléma megközelítésének legegyszerűbb módja, ha veszünk egy gömböt, amelynek középpontja megegyezik a kockáéval, és az átmérője pedig a kocka laplójának hosszával.

Ha a kocka éleinek hossza a , akkor a gömb sugara $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Ez a gömb pontosan illeszkedik a kockán lévő lyukakhoz. Ha leskáláznánk a kockát, a gömb kiálló részei a kocka függőleges oldalai² fölött megvilágítva maradnának.

²lyukak csak a függőleges oldalakon vannak



Ábra 30.1: A megvilágított térszög a gömbfelszín részeként

Ahhoz, hogy megállapítsuk a gömb megvilágított részének térszögét, meg kell határoznunk a felületet. Ezek a részek göbbsüvegek, amik felülete $2\pi rh$, ahol r a gömb sugara és h a göbbsüveg magassága. A szimmetria alapján, mind a négy süvegnek ugyanakkora a felülete. A magasságuk a gömb sugár és a kocka élhosszának feleének a különbsége, tehát

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{a}{2}.$$

Mindegyik süveg felülete

$$2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} a^2,$$

így a gömb megvilágított részeinek összessége

$$8\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} a^2.$$

Ezt a sugár négyzetével elosztva megkapjuk a keresett térszöget

$$8\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \doteq 7,361 \text{ sr.}$$

31 A gázt úgynevezett állapotjelzőkkel írjuk le. Gyakran használt állapotjelzők a p nyomás, V térfogat és a T hőmérséklet. Ezek a

$$pV = Nk_B T$$

állapotegyenletet elégítik ki, ahol N a részecskék száma és k_B a Boltzmann-állandó. Tehát két állapotjelző ismeretében a harmadik meghatározható.

Ha a dugattyúra csak a rugótól és a bezárt gáztól származó erő hat, a belső nyomás (egyensúlyban) $p = \frac{kh}{S}$, ahol k a rugóállandó, h a rugó megnyúlása és S a dugattyú (egyik oldali) felülete. Vagyis a rugó megnyúlása egyértelműen meghatározza a gáz nyomását, és így ugyanolyan alkalmas állapotjelző. Ugyanakkor a gáz térfogatát is meghatározza: $V = Sh$. Behelyettesítve az állapotegyenletbe a

$$kh^2 = Nk_B T$$

összefüggést nyerjük.

Észre kell venni, hogy mivel a megnyúlás meghatározza a nyomást és a térfogatot is, a kettő egymásba átszámítható, és így csak egy független állapotjelző van.

Olivér ideális gáz adiabatikus folyamatának diagramját rajzolta fel. Az adiabatikus folyamatok a

$$pV^\kappa = \text{konstans}$$

egyenletet követik. A mi esetünkben ezért

$$kS^{\kappa-1}h^{\kappa+1} = \text{konstans.}$$

Ezért adiabatikus folyamat során a $h = \text{konstans}$. Viszont ha nem hat semmilyen külső erő, a rugó megnyúlása sem fog megváltozni. Tehát sem a nyomás, sem a térfogat nem változhat, és így a hőmérséklet sem. Végül is adiabatikus folyamatban (mivel nincs erő sem hőcsere a környezettel), a gáz állapota egyáltalán nem fog megváltozni, és a folyamatot egyetlen pont ábrázolja a h - T grafikonon.

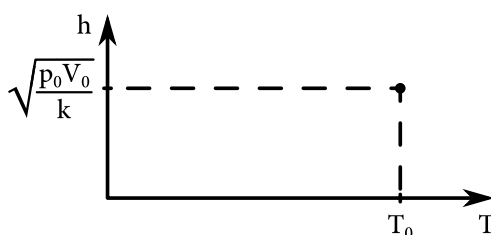
Határozzuk most meg ezen pont koordinátáit. A gáz állapotát a p_0 , V_0 , T_0 állapotjelzők írják le. Ezért, ha a hőmérséklet meg van adva, a rugó h_0 megnyúlását kell kiszámítani. A nyomás és a térfogat egyenletét összeszorozva:

$$p_0 V_0 = \frac{kh_0}{S} \cdot Sh_0 = kh_0^2,$$

amiből

$$h_0 = \sqrt{\frac{p_0 V_0}{k}}.$$

Ezért a keresett grafikon így néz ki:



32 Tekintsünk a fényre transzverzális elektromágneses hullámként. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy bizonyos irányban polarizált fény. Ezt átengedjük egy ideális polarizáló szűrőn, melynek polarizációs síkja a fény polarizációjához képest φ szöggel el van forgatva. A szűrő mögött, a szűrő polarizációs síkja által meghatározott irányban, a fény amplitúdója $A_0 \cos \varphi$ lesz. Az erre merőleges, $A_0 \sin \varphi$ amplitúdójú komponens nem jut át a szűrőn.

Az elektromágneses hullám energiája egyenlő az amplitúdó négyzetével, ezért fényerősségben kifejezve, a fény egy része $I_0 \cos^2 \varphi$ erősséggel áthalad, míg a másik $I_0 \sin^2 \varphi$ erősségű rész elnyelődik. A kettő összege természetesen egyenlő a belépő fény energiájával.

Ha Simon vízszintesen polarizált fényt szeretne előállítani, az utolsó szűrőnek vízszintesen kell elhelyezkednie. Mi a helyzet a többi szűrővel? Logikusan arra gondolunk, hogy úgy kell elhelyezni őket, hogy két egymást követő szűrő polarizációs síkja által bezárt szög mindig egyenlő legyen, és a lehető legkisebb. Bizonyítsuk tehát be.

Vegyünk három szűrőt, φ_1 , φ_2 és φ_3 forgatással. A forgatások különbsége ebben az esetben eltérő:

$$\beta \equiv \varphi_3 - \varphi_2 \neq \varphi_2 - \varphi_1 \equiv \alpha.$$

Látható, hogy ha a középső szűrőt elforgatjuk úgy, hogy a különbségek egyenlőek legyenek, az eredő fényerősség megnövekszik. Ha csak a középső szűrőt forgatjuk az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\alpha + \beta = \gamma = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma - \alpha$$

Emiatt a kimenő fény erőssége:

$$I_{\text{kimenő}} = I_{\text{bejövő}} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 (\gamma - \alpha).$$

Deriválás, vagy egyéb módszer használatával megkapjuk, hogy a függvény akkor éri el a maximumát, amikor $\alpha = \gamma/2$, és $\alpha = \beta$. A középső szűrő elforgatása nem befolyásolja a polarizáció irányát a harmadik szűrő mögött, ezért mindig, amikor három szűrőről beszélünk, a középső szűrő elforgatásával optimalizálhatunk. Az egyetlen eset, ahol ezt nem tehetjük meg, akkor van, amikor a forgatások különbsége az egymást követő szűrőknél egyenlő.

Ez azt is bebizonyítja, hogy Simonnak az összes szűrőt fel kell használnia. Ha kihagyna egyet, az egyenlő lenne azzal az esettel, amikor ugyanezt az első szűrő elé tenné, azzal megegyező elforgatással. Azonban már tudjuk, hogy egy ilyen elrendezés optimalizálható a második szűrő elforgatásával, így ez az elrendezés semmi esetre sem lehet az optimális.

Így már csak azt kell kiszámolnunk, mennyi fény jut át az optimális elrendezésen. Az összes n -darab szűrő $90^\circ/n$ fokkal forgatja el a polarizáció síkját, és csak a fény erősségének $\cos^2(90^\circ/n)$ szorosát engedi át. Minden szűrő ugyanazzal szorzóval csökkenti a fény erősségét, így $n = 10$ szűrőre a kimenő fény erőssége:

$$I = I_0 \cos^{20} \left(\frac{90^\circ}{10} \right) \doteq 78,05\%.$$

33 A lőporrobbanás E energiát közölt a bezárt levegővel. Mivel a robbanás elég rövid volt, a lövedéknek nem volt ideje megmozdulni, így a gáz nem végzett munkát. A közölt hő így csak a gáz belső energiáját növelte, amely a hőmérséklet növekedéséhez vezetett, az alábbi képlet szerint: $E = \gamma Nk\Delta T$, ahol N a gáz részecskéinek a száma, k a Boltzmann-állandó, és γ a gázmolekulák szabadsági fokainak számától függő állandó, amely kétatomos gázoknál $\gamma = \frac{5}{2}$.

Ha az eredeti hőmérséklet T_0 , a robbanás után ez megváltozik: $T_1 = T_0 + \Delta T$. A robbanás izochor folyamat volt, így a nyomás a robbanás után:

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right).$$

Ezután adiabatikus tágulás következett be. Adiabatikus folyamatokra $pV^\gamma = \text{konstans}$, ezért $p_1 V_0^\gamma = pV^\gamma$. Ennek következtében:

$$p(V) = p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma.$$

A gáz által végzett munka kiszámolható, ha integráljuk:

$$W = \int_{V_0}^{L_S} p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma dV.$$

Jelen esetben elkerülhetjük az integrál kiszámítását, mivel nincs hőátadás a gáz és környezete között adiabatikus folyamat során. A hőtan első főtétele alapján a gáz által végzett munka megegyezik a gáz belső energiájának változásának -1 -szeresével. $W = -\Delta U$. Ahhoz, hogy meghatározzuk a gáz belső energiájának meg-

változását, ki kell számolni a hőmérséklet változását az adiabatikus tágulás során. Az ideális gáztörvény alapján

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_0 + \Delta T} \frac{V_0}{LS}$$

Behelyettesítve az adiabatikus folyamat egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$p_1 V_0^\kappa = p_1 \frac{T_2}{T_0 + \Delta T} \frac{V_0}{LS} (LS)^\kappa,$$

ahonnan

$$T_2 = \left(\frac{V_0}{LS} \right)^{\kappa-1} (T_0 + \Delta T).$$

Következtetésképpen, a belső energia keresett megváltozása

$$\delta U = \gamma N k \delta T = \gamma N K (T_0 + \Delta T) \left[\left(\frac{V_0}{LS} \right)^{\kappa-1} - 1 \right].$$

Mivel $W = -\delta U$, így

$$W = (\gamma p_0 V_0 + E) \left[1 - \left(\frac{V_0}{LS} \right)^{\kappa-1} \right].$$

A gáz által végzett munka az m tömegű lövedék gyorsítására fordítódott. A lövedéknek $T = \frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiája lett, ahonnan a keresett sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{5}{2} p_0 V_0 + E \right) \left[1 - \left(\frac{V_0}{LS} \right)^{2/5} \right]},$$

behelyettesítve, hogy $\gamma = \frac{5}{2}$ és $\kappa = \frac{7}{5}$.

34 Mivel csak a nagy távolságról és a partvonalra merőlegesen nézett fényáramra vagyunk kíváncsiak, csak azokat a fénysugarakat kell figyelembe vennünk, amelyek ehhez a merőleges vonalhoz közel hagyják el a lámpásokat. Vegyünk mindkét lámpásra egy fénysugarat, amely ehhez a vonalhoz mért kis α szögben hagyja el a lámpást.

Nina lámpására ez könnyű – a fénysugár egyszerűen egyenes vonalban halad a végtelenségig. Hanna lámpása esetén a sugár szintén α szögben hagyja el a forrást, de megváltozik ez a szög, ahogy a fény elhagyja az üvegekockát. Snell törvénye alapján határozzuk meg ezt a szöget.

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

ahol n_1 és n_2 az üveg és a levegő törésmutatói, valamint α_1 és α_2 a szögek, amelyekkel a fény belép a kockába, illetve kilép onnan.

Mivel az α szög igen kicsi, élhetünk a $\sin \alpha \approx \alpha$ közelítéssel. A levegő n_2 törésmutatója közel van 1-hez, és tudjuk, hogy $n_1 = n$. Emiatt $\alpha_2 \approx n\alpha$.

Minden fény, amely Hanna lámpását α -nál kisebb szögben hagyja el, a tengerész nézőpontjából egy 2α nyílásszögű kúpot formál. Az üvegekockán való törés után a kúp új nyílásszöge $2n\alpha$ lesz. A teljes fénysugárzási teljesítmény állandó marad, tehát a teljesítménysűrűség fordítottan arányos a kúp alapjának területével. Ez

pedig n^2 -szer nagyobb Hanna fényforrására, ami azt jelenti, hogy a tengerészek Nina lámpását n^2 -szer fényesebbnek fogják látni.

35 Egy q töltéssel rendelkező v sebességgel mozgó részecskére B erősségű mágneses mezőben erő hat:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

A kérdéses esetben mindkét részecske sebessége merőleges a mágneses mezőre. Ezért a részecskékre ható erő centripetális erő, mely kifejezhető az

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

egyenlettel.

Tehát

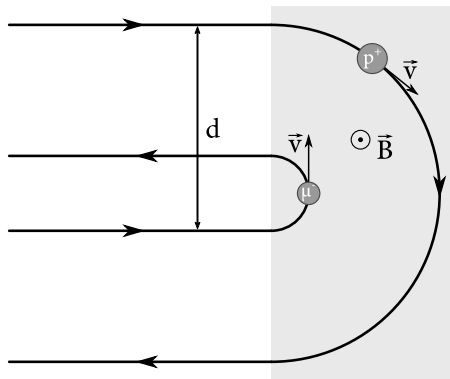
$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Vegyük figyelembe, hogy mindkét részecske relativisztikus sebességgel mozog, ezáltal $m = \gamma m_0$, ahol m_0 a részecske nyugalmi tömege és $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

A müon és a proton töltése csak előjelben különbözik. Ahhoz, hogy koncentrikus félköröket írjanak le mágneses mezőben, a részecskéknél

$$d = r_e + r_p = \frac{v(m_p + m_\mu)}{eB\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

egymástól való távolsággal kellett a kamrába lépniük. Számszerűen: $d = 2,44$ m.



36 Tegyük fel, hogy a takarók elérték már a termikus egyensúlyt, ezért az elnyelt teljesítményt teljes egészében ki is sugározzák. A szimmetriára alapozva arra a következtetésre juthatunk, hogy az energiát egyenlő mértékben sugározzák a takarók mindkét irányba. Feltéve, hogy a takarók kellően közel vannak egymáshoz, az egyik takaró által a másik takaró irányába sugárzott teljes teljesítményt elnyeli a másik takaró.

Legyen az első takaró az, amelyik a legközelebb van a Naphoz. Az egyes takarók F^3 felületi teljesítménysűrűségeinek ki kell elégíteniük a következő egyenleteket:

$$F_1 = F_\odot + \frac{1}{2}F_2, \quad F_2 = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_3, \quad F_3 = \frac{1}{2}F_2.$$

³ F a takaró mindkét oldala által kisugárzott teljes felületi teljesítménysűrűség

Az egyenletrendszer megoldása a következő:

$$F_1 = \frac{3}{2}F_\odot, \quad F_2 = F_\odot, \quad F_3 = \frac{1}{2}F_\odot.$$

Minket csak a harmadik egyenlet érdekel.

Vegyük észre, hogy az adott felületre vonatkoztatott felületi teljesítmény-sűrűséget kell kiszámolnunk, amely csak a fele F_3 -nak, mivel a takaró a teljes teljesítményének csak a felével sugároz az egyes irányokba. A feladat állítása szerint a takarók ideális fekete testnek tekinthetők, ezért a harmadik takaró hőmérséklete

$$T = \sqrt[4]{\frac{F_\odot}{4\sigma}} \doteq 278,785 \text{ K}.$$

37 A hidrosztatikai nyomás a következő módon függ a magasságtól $p(h) = h\rho g$. A nyomás a folyadék egy pontjában nem függ a felület orientációjától, így megadhatjuk a hordó falára ható erő nagyságát h magasságban a következő módon

$$\Delta F(h) = p(h) \cdot \Delta S = h\rho g \cdot 2\pi R \Delta h.$$

Ez az erő a hordó teljes kerületre hat h magasságban, merőlegesen a hordó falára.

A feszültségből származó erőt, ami a hordó falának h magasságban Δh vastagságú csíkjára ható erőből származik, meghatározhatjuk a virtuális munka elvéből. Képzeljük el, hogy a nyomásból származó erő megnyújtja a hordó sugarát δR -el, az így végzett virtuális munka $\delta W = \Delta F \cdot \delta R$.

Pontosan ennyi munkát végezne a feszültségből származó erő, ha ugyanezt a deformációt hozná létre. Ahogy a kerület hosszabb lett $2\pi\delta R$ -el, a feszültségi erő $\delta W = \Delta T \cdot 2\pi\delta R$ virtuális munkát végzett. Az egyenlőség a két virtuális munka között a következőt eredményt adja $\Delta T(h) = \frac{\Delta F(h)}{2\pi}$, ebből megállapíthatjuk a feszültségből származó erőt, ami

$$\Delta T(h) = R\rho gh \Delta h.$$

Az így megadott erő csak a hordó egy Δh vastagságú csíkjára hat, de minket az egész hordóra ható feszítő erő érdekel. Az egyik opció, hogy kiszámoljuk a következő integrált

$$T = \int_0^H R\rho gh \, dh.$$

A másik opció, hogy észre vesszük a feszültségből származó erő lineárisan függ a magasságtól, ezért egy origón áthaladó egyenes a grafikonja, így a grafikon alatti terület lesz teljes feszültségből származó erő,⁴ ami nem más mint egy derékszögű háromszög területe, aminek a befogói H és $R\rho gH$ hosszúak, tehát a teljes feszültségi erő

$$T = \frac{1}{2}R\rho gH^2.$$

Egy gyűrű képes ellenállni annak az erőnek, amit a szakító szilárdságából és a keresztmetszetéből meghatározhatunk $\tau = \sigma S$, tehát a gyűrűk minimális száma

$$N = \left\lceil \frac{R\rho gH^2}{2\sigma S} \right\rceil,$$

⁴Hasonlóan az egyenletesen gyorsuló mozgáshoz, ahol a megtett távolság a szintén $v(t)$ grafikon alatti terület.

ami a megadott adatokból $N = 11$.

38 Építkezzünk az előző feladat megoldására, amelyben polarizációs szűrőkről volt szó. Az egyetlen különbség az, hogy a fényerősség nem csak a szűrők eltérő forgatása miatt, hanem a kisebb átlátszóságuk miatt is csökken. Így két egymással ellentétes hatást kell figyelembe vennünk: minél több szűrőt használunk, annál gazdaságosabban lehet elforgatni a polarizáció síkját, viszont annál nagyobb lesz a veszteség a fény elnyelődése miatt.

Ennek eredményeként, egy új exponenciális tag jelenik meg a kimenő fényerősség képletében, amely a fényerősség csökkenését fejezi ki, ahogy a fény áthalad a szűrőkön. Ezáltal a következő egyenletet kapjuk:

$$I = I_0 \cdot 0,9^n \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2n} \right)^{2n}.$$

Ha megnézzük az első pár lehetőséget (vagy alternatívaként deriválhatunk is, bár ezt nem ajánljuk), láthatjuk, hogy a maximumot $n = 5$ -nél érjük el:

$$I = I_0 \cdot 0,9^5 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{10} \right)^{10} \doteq 35,75 \ %.$$

39 Vegyük a szappanbuborék egy kicsi, ΔS felületét. Először kiszámítjuk erre a felületre a felületi feszültségből eredő erő hatását. A felületi feszültség következtében p_c Laplace-nyomás lép fel. A Laplace-nyomást a Young-Laplace egyenlet írja le. A buboréknek két felszíne van, így

$$p_c = \frac{4\gamma}{R},$$

ahol γ a szappanos víz felületi feszültsége, és R a buborék sugara. A ΔS felületre ható erő

$$\Delta F_k = p_c \Delta S = \frac{4\gamma}{R} \Delta S.$$

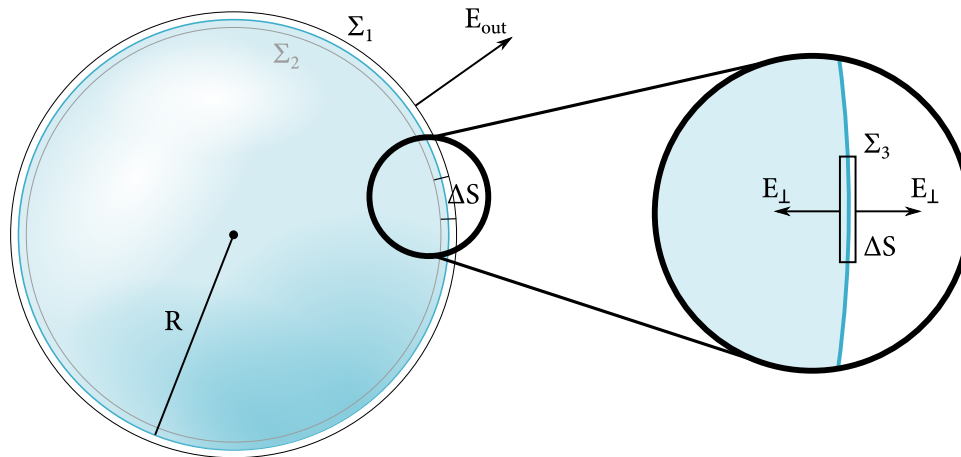
Ez az erő a felszínt a buborékhoz vonzza.

Következőleg, meg kell határozni azt az elektrosztatikus erőt, amely a felszínt a buboréktól taszítja, miután a buborék elektromosan töltött lett. Tegyük fel, hogy Q töltést adott a buboréknek. A buborék vezetőképes, így a töltés egységesen eloszlik az egész felszínén. A buborék felszínének felületi töltéssűrűsége

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

A probléma megoldásának egyik kulcsfontosságú eleme a Gauss-törvény. Kimondja, hogy az elektromos térerősség integrálja egy tetszőleges zárt felületen arányos a felület belsejében lévő töltésmennyiséggel. Matematikailag kifejezve

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



A buborékon a töltéeloszlás gömszimmetrikus, mivel a buborékon kívül az elektromos térerősség is gömszimmetrikus. Vegyünk egy Σ_1 gömböt a külső felületen Gauss-felületnek. A térerősség ezen a felületen sugárirányú, és állandó nagyságú. Ezért

$$\oint_{\Sigma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma}_1 = E_{\text{out}} 4\pi R^2 \stackrel{!}{=} \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Így a térerősség a buborék felületén

$$E_{\text{out}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Most vegyünk egy Σ_2 gömböt a buborék belső felületén Gauss-felületnek. Ebben az esetben, a felületen belül az eredő töltés 0, és így az előzőek alapján, az elektromos térerősség

$$E_{\text{in}} = 0.$$

Az előzőekhez úgy jutottunk, hogy az egész buborékot néztük. Most nézzünk csak egy kicsi ΔS felületet. Ha megfelelően közelről nézzük, nem látjuk a görbületet, és a felületet laposnak tekinthetjük.⁵ Vegyünk egy henger alakú Σ_3 Gauss-felületet ΔS alappal és kicsi magassággal. A henger lefedi a ΔS felületét a buboréknak. Mivel a töltéeloszlás síkbeli, ezért az elektromos térerősség tükörszimmetrikus. A térerősségnek merőlegesnek kell, hogy legyen a ΔS felületre. Ha nem lenne, például lenne a felületre érintőirányú komponense, elektromos áram indulna meg, ameddig az érintőirányú komponens 0 nem lenne. Gauss törvénye alapján

$$\oint_{\Sigma_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma}_3 = 2E_{\perp} \Delta S \stackrel{!}{=} \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0},$$

ahol

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

A ΔS felületet lévő töltés okozta térerősség nem nulla a buborék belső felületén. Viszont, az eredő térerősség a buborék belsejében 0, és így a térerősség a buborék többi része miatt a ΔS belső felületén mindenképpen

⁵Pontosan ezért hiszik a laposföld-hívók azt, hogy a föld lapos

$E = -E_1$. Következésképpen, az erő ami taszítja a ΔS felületet a buboréktól

$$\Delta F_e = E\Delta Q = e\sigma\Delta S = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}\Delta S.$$

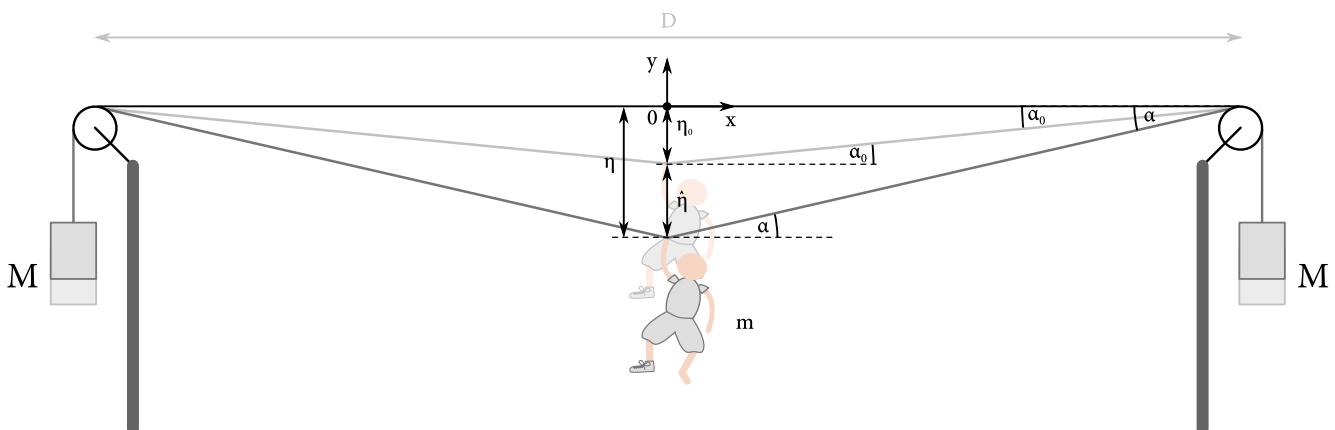
Mostmár meg tudjuk oldani a problémát. Ha a nyomásnak a buborék belsejében meg kell egyezzen a légköri nyomással, a felületi feszültség miatt fellépő vonzást kompenzálnia kell a $\Delta F_c \stackrel{!}{=} \Delta F_e$ elektrosztatikus taszításnak. A felállított egyenlőség miatt

$$Q = \sqrt{128\pi^2\epsilon_0\gamma R^3}.$$

A megadott adatokat behelyettesítve az eredmény $Q \doteq 1,31 \times 10^{-7} \text{ C}$.

40 Kezdjük azzal, hogy meghatározzuk a kötél megereszkedésének mértékét egyensúlyi helyzetben. Jelöljük η_0 -val a kötél megereszkedésének mélységét. Legyen α a kábel lejtésének szöge. Ezesetben:

$$\sin \alpha_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}}.$$



A kábelt $T = Mg$ nagyságú feszítőerő feszíti ki. Az egyensúlyi helyzetben az erőket függőleges irányban felírva ezt az egyenletet kapjuk:

$$2Mg \sin \alpha_0 = mg.$$

Az előbbieken felírt $\sin \alpha_0$ -t behelyettesítve:

$$\frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}} = \frac{m}{2M}.$$

A későbbiekben ezt az egyenletet a következő alakokra átrendezve fogjuk felhasználni:

$$\eta_0 = \frac{mD}{2\sqrt{4M^2 - m^2}};$$

$$\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} = \frac{MD}{\sqrt{4M^2 - m^2}}.$$

Most vizsgáljuk meg a kábel megereszkedését dinamikus esetben. Jelölje η a kábel megereszkedését egy adott pillanatban. Vezessünk be Descartes-koordinátarendszert (derékszögű koordinátarendszert) az ábrán látható módon. Tegyük fel, hogy a kötélt teljes hossza L . Ezen esetben felírhatjuk a különböző testek helyvektorait. A baloldali tartó súly (ami kifeszíti a kábelt) helyvektora:

$$\mathbf{r}_L = \left(-\frac{D}{2}; \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2} - \frac{L}{2} \right)$$

A jobboldali tartó súly helyvektora:

$$\mathbf{r}_R = \left(+\frac{D}{2}; \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2} - \frac{L}{2} \right)$$

Valamint János helyvektora:

$$\mathbf{r} = (0; -\eta).$$

Ezután ezekből kiszámíthatjuk az egyes testek sebességeit. Jelölje János sebességének függőleges komponensét $\dot{\eta}$. Ebből következően a tartósúlyok sebessége $\dot{\eta} \sin \alpha$, amit geometriai számítások segítségével kapunk meg. Így a keresett sebességek:

$$\mathbf{v}_L = \left(0; \frac{\eta \dot{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2}} \right);$$

$$\mathbf{v}_R = \left(0; \frac{\eta \dot{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2}} \right);$$

$$\mathbf{v} = (0; -\dot{\eta}).$$

Így meghatározhatjuk a teljes rendszer helyzeti (potenciális) energiáját

$$U = Mgy_L + Mgy_R + mgy = 2Mg \left(\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2} - \frac{L}{2} \right) - mg\eta$$

és mozgási (kinetikus) energiáját

$$T = \frac{1}{2} Mv_L^2 + \frac{1}{2} Mv_R^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2M\eta^2}{\frac{D^2}{4} + \eta^2} + m \right) \dot{\eta}^2.$$

Minket János egyensúlyi helyzete körül végzett kis rezgései (oszcillációi) érdekelnek. Ezért írjuk fel a kötélt megereszkedését a következő alakban:

$$\eta = \eta_0 + \hat{\eta},$$

ahol $\hat{\eta}$ a kis rezgések (oszcillációk) amplitúdóját jelöli.

Kis rezgések esetén a helyzeti (potenciális) energiára korábban felírt kifejezést Taylor-sorba fejthetjük. Mivel harmonikus rezgést (oszcillációt) szeretnénk vizsgálni, a sorbafejtést másodrendig kell elvégeznünk. Ehhez

írjuk fel a következő függvény

$$f(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{D^2}{4} + (\eta_0 + \hat{\eta})^2}$$

0 körüli Taylor-sorát (másodrendig). Ehhez tudnunk kell az $f(\hat{\eta})$ függvény egy konkrét értékét, valamint a függvény első két deriváltját. Megkapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} f(\hat{\eta})|_{\hat{\eta}=0} &= \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}; \\ \left. \frac{df(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}} \right|_{\hat{\eta}=0} &= \left. \frac{\eta_0 + \hat{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + (\eta_0 + \hat{\eta})^2}} \right|_{\hat{\eta}=0} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}}; \\ \left. \frac{d^2f(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}^2} \right|_{\hat{\eta}=0} &= \left. \frac{D^2}{4\sqrt{\frac{D^2}{4} + (\eta_0 + \hat{\eta})^2}^3} \right|_{\hat{\eta}=0} = \frac{D^2}{4\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}^3}. \end{aligned}$$

Ezáltal:

$$\begin{aligned} f(\hat{\eta}) &\approx f(\hat{\eta})|_{\hat{\eta}=0} + \left. \frac{df(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}} \right|_{\hat{\eta}=0} \cdot \hat{\eta} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}^2} \right|_{\hat{\eta}=0} \cdot \hat{\eta}^2 = \\ &= \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} + \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}} \hat{\eta} + \frac{D^2}{8\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}^3} \hat{\eta}^2 = \\ &= \frac{MD}{\sqrt{4M^2 - m^2}} + \frac{m}{2M} \hat{\eta} + \frac{D^2 \sqrt{4M^2 - m^2}^3}{8M^3 D^3} \hat{\eta}^2 = \\ &= \frac{D}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}} + \frac{m}{2M} \hat{\eta} + \frac{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^3}{8D} \hat{\eta}^2. \end{aligned}$$

Majd ebből következően:

$$\begin{aligned} U &\approx 2Mg \left(\frac{D}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}} + \frac{m}{2M} \hat{\eta} + \frac{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^3}{8D} \hat{\eta}^2 - \frac{L}{2} \right) - mg \left(\frac{mD}{2\sqrt{4M^2 - m^2}} + \hat{\eta} \right) = \\ &= \frac{gD}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}} \left(2M - \frac{m^2}{2M} \right) - MgL + \frac{Mg}{4D} \sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^3 \hat{\eta}^2 = \\ &= \frac{1}{2} MgD \sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} - MgL + \frac{Mg}{4D} \sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^3 \hat{\eta}^2. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a helyzeti energia kifejezése konstans tagokat tartalmaz, amik az ekvipotenciális felületeket egy konstans értékkel tolják el, vagyis nem befolyásolják a mozgást, valamint egy négyzetes tagot, ami a harmonikus rezgésekhez/oszcillációkhoz tartozik. Ha alkalmazzuk azt, hogy egy rugó potenciális (rugalmas) energiája $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$, felírhatjuk a rendszer k -val jelölt effektív „rugalmasságát“ (vagy másképpen kifejezve, az erre a rendszerre vonatkozó „rugóállandót,,):

$$k = \frac{Mg}{2D} \sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^3.$$

Most vizsgáljuk meg a mozgási (kinetikus) energiát. Ennek alakja: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\mu u^2$. Vagyis itt felhasználhatjuk a rendszer effektív tömegét az egyensúlyi helyzetben:

$$\mu = \frac{2M\eta_0^2}{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} + m = 2M \left(\frac{m}{2M}\right)^2 + m = m \left(\frac{m}{2M} + 1\right).$$

Egy harmonikus oszcillátor körfrekvenciája adott k rugalmassági állandó és μ tömeg esetén:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

A k -ra és μ -re felírt kifejezéseket behelyettesítve, majd hosszú és undorító számolások után a következőt kapjuk:

$$\omega = \sqrt[4]{(2M)^2 - m^2} \sqrt{\frac{2}{m} - \frac{1}{M}} \sqrt{\frac{g}{D}}.$$

Felhasználva, hogy $\frac{2M}{m} = \frac{41}{9}$, az előbbi kifejezés a következő alakra egyszerűsödik:

$$\omega = \frac{16}{3} \sqrt{\frac{10}{41}} \sqrt{\frac{g}{D}}.$$

Végül, a keresett periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{41}{10}} \sqrt{\frac{D}{g}}.$$

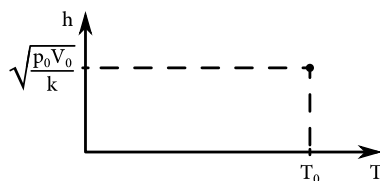
Azt felhasználva, hogy $D = 25$ m, megkapjuk a végeredményt:

$$T = \frac{3\sqrt{41}}{16} \pi \text{ s.}$$

Válaszok

- 1 147 s
- 2 225
- 3 6
- 4 $\sqrt{2}m$
- 5 $4R$
- 6 6 cm
- 7 60 kg
- 8 10 cm
- 9 $\cot 42^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot 10 \text{ m}^2 \doteq 7,85 \text{ m}^2$
- 10 *Válasz (mindkét sebesség megadása szükséges!): {54 km/h, 150 km/h}*
- 11 $\frac{4\pi R^{3/2}}{3\sqrt{Gm}}$
- 12 $\sqrt{v^2 + 2gH}$
- 13 60°
- 14 $\arcsin \frac{1}{4} \doteq 14,48^\circ$
- 15 50 h
- 16 $\frac{24\pi}{3\pi + 8} r\rho \doteq 4,327r\rho$
- 17 13
- 18 *Ezek közül bármelyik eredmény elfogadható: 03:14:54, 08:45:06, 15:14:54, 20:45:06.*
- 19 $(1 - 4 \cdot 3^{-13/4}) \rho_v \doteq 887 \text{ kg/m}^3$
- 20 $\sqrt{2\mu gL \left(\frac{m+M}{M}\right)}$
- 21 3

- 22 $90^\circ/k, k \in \mathbb{N}$
- 23 A 2,42 – 2,48 s tartományba eső megoldások fogadhatóak el.
- 24 $\frac{42\pi^2 + 60\pi}{24 + 28\pi + 7\pi^2} r\rho \doteq 3,3306r\rho$
- 25 25 mm
- 26 0 N, Marcsinak nem kell erőt kifejtenie.
- 27 $\frac{3v^2}{4g} + r(1 - \cos \alpha)$
- 28 σa^4
- 29 16
- 30 $4\pi(2 - \sqrt{2})$ sr, vagy $(2 - \sqrt{2})$ térszöget.
- 31 A megoldás egyetlen pont.



- 32 $I_0 \left(\cos \frac{\pi}{20}\right)^{20} = I_0 (\cos 9^\circ)^{20} \doteq 78,05\% I_0$
- 33 $\sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{5}{2} p_0 V_0 + E\right) \left[1 - \left(\frac{V_0}{LS}\right)^{2/5}\right]}$
- 34 Nináié n^2 -szer annyira fényes.
- 35 2,44 m
- 36 278,785 K \doteq 6,635 °C. Az ettől 0,5 K-nel kevésbé eltérő eredmény még elfogadható.
- 37 11
- 38 $I_0 \cdot 0,9^5 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{10}\right)^{10} = I_0 \cdot 0,9^5 \cdot (\cos 18^\circ)^{10} \doteq 35,75\% I_0$
- 39 $1,31 \times 10^{-7}$ C
- 40 $\frac{3\sqrt{41}}{16} \pi$ s