Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 22. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v roku 2019 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste niektorému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Fyzikálny Náboj pokračuje vo svojej medzinárodnej tradícii. V roku 2019 sa do Náboja zapojili okrem Bratislavy takisto mestá Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk, Rzeszów a Moskva. Výsledky vzájomného súboja si môžete pozrieť na našich stránkach.

Táto zbierka by nikdy nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Väčšina z nás sú študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a časť z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom každého polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`*.*

Za finančnú pomoc ďakujeme firmám ESET a PosAm a za medzinárodnú spoluprácu lokálnym organizátorom: Mária Zelenayová (Bratislava), Róbert Hajduk (Košice), Daniel Dupkala (Praha), Lenka Plachtová (Ostrava), Ágnes Kis-Tóth (Budapešť), Kamil Żmudziński (Gdańsk), Małgorzata Chomań (Rzeszów) a Patrik Lamoš (Moskva). V mene celého organizačného tímu veríme, že ste si v roku 2019 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že vás všetkých uvidíme aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov (v prípade, že už budete vysokoškolákmi).

Jaroslav Valovčan

Hlavný organizátor

Zbierku zostavili:

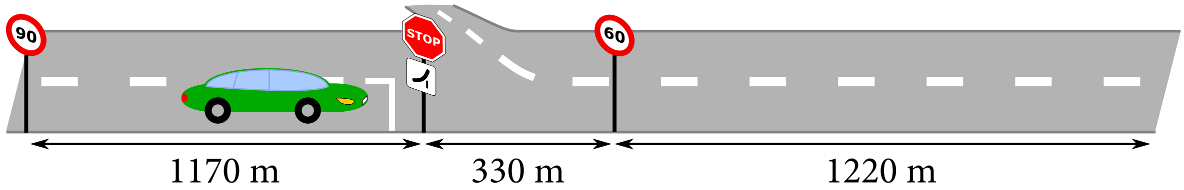
Matej Badin
Martin ‚Kvík' Baláž
Katarína Častulíková
Katarína Dančejová
Jakub Hluško
Justína ‚Plyš' Nováková
Peter ‚Bubu' Onduš
Tereza Prokopová
Peter Ralbovský
Jaroslav Valovčan

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `https://physics.naboj.org/`.

Zadání

1 Juro po dlouhém dni ve škole spěchá domů. Jaký je minimální čas, za který dorazí domů při dodržení předpisů, pokud jeho auto dokáže rovnoměrně zrychlit z 0 na 100 km/h za 10 sekund a zastavit ze 100 km/h za 6 sekund?

Na začátku a na konci své cesty samozřejmě musí stát. Rychlosti na značkách jsou uvedené v km/h.



2 Katka si našla pěkný kousek dálnice u železniční tratě. Čas od času tam jezdí závodit s rychlíkem. Rychlík má 150 krát vyšší hybnost, ale jenom 100 krát vyšší kinetickou energii než Katčino auto. Jaký je poměr hmotností vlaku a auta?

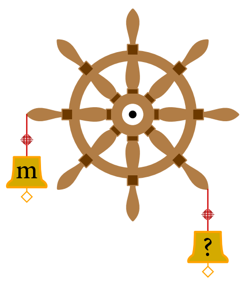
3 Když se Krtko procházel po jarmarku, padl mu do oka obrovský héliový balón kulového tvaru s průměrem 50 cm a hmotností v nenafouklém stavu 20 g. Hned si ho koupil. Teď se však bojí, aby mu neuletěl.

Přivázat ho na něco pevného mu připadalo příliš trapné. Proto vzduchem nafoukl několik menších balónků s průměrem 20 cm a hmotností v nenafouklém stavu 10 g a přivázal je na šňůrku héliového balónu. Kolik nejméně balónků potřeboval, aby mu héliový balón sám od sebe neuletěl?

Elasticitu balónků neuvažujte.

4 Pľyš (slovenská organizátorka FKS) si kdysi z jedné plavby po moři přinesla dřevěné kormidlo. Do stěny obývacího pokoje zarazila pořádný hřebík a na něj zavěsila střed kormidla. Stěna je však malá a jak roky plynuly a výlety přibývaly, další suvenýry najednou nebylo kam dávat. Naposledy už musela vzácný čínský zvoneček s hmotností m zavěsit na levou příčku kormidla.

Tím se však vychýlilo z rovnováhy. Proto by teď ráda zavěsila druhý zvoneček na pravou dolní příčku. Jak těžký zvoneček má shánět, aby se kormidlo znovu vyrovnalo?



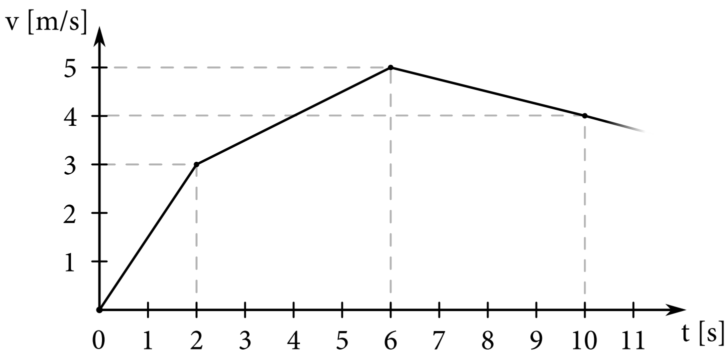
5 Dva Skotové se přetahují o jednopencovou minci. Každý tahá za jeden konec, až z ní vytvarují drát s poloměrem r, délkou l a odporem R. Ani tehdy však nepřestávají tahat. Jaký bude odpor drátu, až jeho délku zdvojnásobí?

Předpokládejte, že napínáním se objem mince nijak nemění.

6 Terka má ráda vlajky. Naposledy se jí velmi zalíbila vlajka Seychel, takže se rozhodla si ji sama ušít. Když už byla hotová, všimla si, že těžiště není přesně ve středu, kde by čekala. Když si odvážila jednotlivé látky, zjistila, že jejich hustoty jsou postupně zleva doprava 600, 400, 300, 500 a 900 g/m^2. Jak daleko od geometrického středu Terčiny vlajky se nachází její težiště, pokud jsou její rozměry 180 cm × 90 cm?

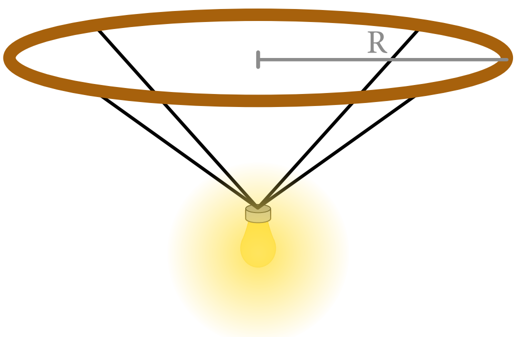
Švy dělí horní a pravou stranu vlajky na třetiny. Výsledek odevzdejte s přesností na cm.

7 Ralbo za sebou konstantní silou F táhne Terku na sáňkách. Sáňky s Terkou mají hmotnost m = 60 kg. Nejdřív je táhne po ledu bez tření, potom přejde na břeh jezera a táhne je po sněhu, kde to je o něco těžší, protože tam je koeficient tření $f > 0$. Po chvíli na sáňky přiskočí Bubu. Vývoj rychlosti sáněk v čase je zobrazený v grafu. Jaká je Bubuho hmotnost?



8 Kvíkovi po roce a půl v novém bytě začala lézt na nervy nezakrytá žárovka v obýváku. Jako správný astronom však nechce vyhazovat peníze na předražené designové lustry. Radši si vyrobí vlastní.

Základem jeho nového lustru bude obruč s poloměrem R = 24 cm, která bude viset ze stropu. Na tuto obruč následně čtyřmi rovnoměrně rozmístěnými nehmotnými provázky upevní žárovku o hmotnosti m = 1 kg. Vzhledem k nízkému rozpočtu však provázky nejsou velmi pevné a vydrží maximální tahovou sílu F = 6,5 N. Jak nejvýše může žárovka viset pod obručí, aby se lanka neroztrhla?



9 Andrejko v Bratislavě postavil 30 m vysoký stožár, na jehož vrcholu majestátně vlála hrdě napnutá vlajka s plochou 10 m^2. Jakou plochu na zemi zabírá stín vlajky v pravé poledne v den podzimní rovnodennosti, když fouká vítr přesně ze severozápadu?

Bratislava se nachází na 48. stupni severní zeměpisné šířky.

10 Kubo jel vlakem na výlet na východní konec Slovenska, až do Prešova, aby se podíval na místní MHD. Všiml si, že když u dálnice počítá auta, které míjí (samozřejmě včetně Katky z úlohy číslo 2), za jednotku času potká v protisměru čtyřikrát více aut než ve směru své jízdy. Jakými různými rychlostmi může jet jeho vlak?

Hustota dopravy v obou směrech je stejná a auta jezdí rychlostí 90 km/h.

11 Planetka má hmotnost $2m$. Po společné kruhové orbitě ji obíhají dva měsíčky s hmotností m, přičemž v každém okamžiku leží všechny tři objekty na přímce.

Katka odměřila, že poloměr orbity měsíců je R. Za jaký čas oběhnou planetku?

12 Za teplých letních nocí pod kolejemi dovádějí divoké kočky. Samaška jejich koncerty pokaždé rozzuří k nepříčetnosti. Rozespalý vyjde v pyžamu na balkon ve výšce H nad zemí a konstantní rychlostí v háže po kočkách zkažená vajíčka pod různými úhly α.

Jakou nejmenší rychlostí může vejce dopadnout na zem, neuvažujeme-li odpor vzduchu?

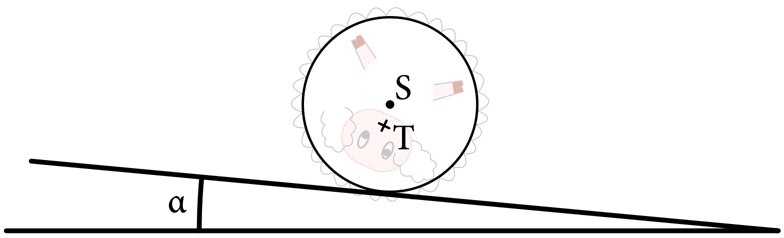
13 Andrej a Danko opravdu nemají co dělat. Naposledy si oba zařídili kapitánský průkaz a teď se na svých loďkách prohánějí na moři u Belize. Vzhledem ke svým pochybným kapitánským schopnostem radši plavou pouze konstantní rychlostí po přímkách.

- V okamžiku, kdy Andrej protne přímku, po které pluje Dankova lod, jsou od sebe vzdálení $3d$.
- O určitý čas t později protne Danko Andrejovu přímku. Jejich vzdálenost je $4d$.
- O čas $5t$ později dojde oběma palivo a zůstanou uvězneni na moři ve vzájemné vzdálenosti $21d$.

Jaký úhel svírají jejich trajektorie?

14 Od té doby, co Jaro udělal státnice najednou nemá co dělat. I odebral se do své domoviny, sedl si na kopec a s nohama křížem a rukama za hlavou hleděl na svoje stádo ovcí. Pro vyučeného fyzika ovšem není lehké interagovat s reálným světem a Jarovo pasení ovcí podle toho také vypadá.

Svoje ovce aproximuje homogenním válcem s poloměrem R a hmotností M. Když se ovce napase na kopci, přitáhne nohy k tělu a skutálí se dolů. Ovšem není to tak jednoduché, když je velmi napasená, její těžiště T se od středu s posune o $R/4$ od podélné osy válce. Jaký nejmenší sklon musí mít kopec, aby se ovečka určitě skutálela nezávisle na svém původním otočení?



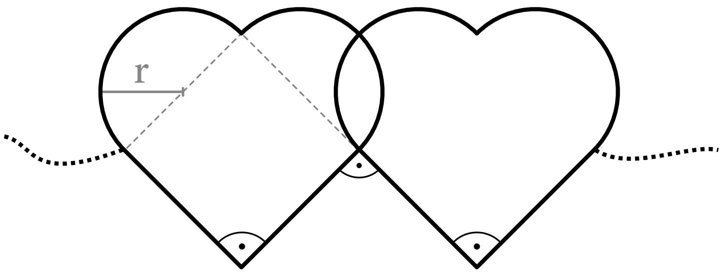
15 Malá princezna Miška sedí na své planetce P-314 a hrozně se zlobí. Na této planetce totiž její mateřská hvězda zapadá jen jednou za 60 hodin, takže bez posouvání židle mnoho romantických západů neuvidí. Na druhou stranu rok trvá jen 300 hodin, takže Vánoc a narozenin si užije až až.

Po jedné narozeninové párty si odtáhla postel na noční stranu a podívala se na hvězdy. Tehdy si všimla, že vzdáleným hvězdám trvá jeden zdánlivý oběh okolo planety jinak dlouho než mateřské hvězdě. Jaká je skutečná perioda rotace planetky okolo její osy?

Planetka obíhá okolo své mateřské hvězdy po kružnici ve stejném směru, v jakém se točí okolo svojí osy. Osa jejího otáčení je kolmá na rovinu dráhy.

16 Fero koupil Teri k narozeninám náhrdelník složený ze dvou stejných symetrických srdíček. Teri měla samozřejmě ze šperku radost, ale protože je fyzička, zaujal ji nejen po estetické, ale i po elektrické stránce.

Zjistila, že délkový elektrický odpor drátu, ze kterého je náhrdelník vyrobený, je ρ. Jaký je celkový odpor šperku mezi body, za které je uchycen na řetízku? Poloměr kulatých částí náhrdelníku je r.



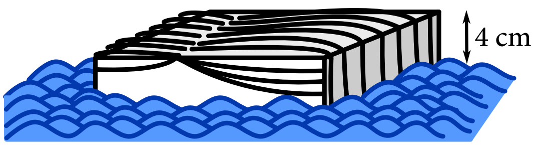
17 Když Hellboy právě nelikviduje v laboratoři výbojky, baví se výrobou jednoduchých domácích spotřebičů. Naposledy našel tři rezistory s odpory 20, 30 a 60 Ω a poskládal z nich elektrický ohřívač. Produktový design ale není jeho silnou stránkou. Když chce na svém ohřívači změnit výkon, musí ho rozebrat a rezistory přepojit. Kolika různých stupňů výkonu (kromě vypnutého) může takto dosáhnout, pokud hlavní jistič u něj doma vydrží maximálně 15 A?

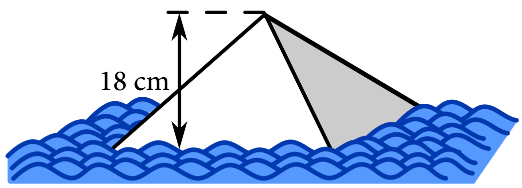
Napětí v zásuvce je 230 V. Hellboy nemusí pokaždé použít všechny rezistory.

18 Kiko má krásné nástěnné hodiny. Mají jen hodinovou a minutovou ručičku, které se posouvají každou sekundu drobným pohybem. Hodinová ručička má délku d a hmotnost $2m$, zatímco minutová má délku $2d$ a hmotnost m. V jaké sekundě dne budou ručičky na střed hodin působit největším momentem síly?

Najděte alespoň jedno řešení. Odevzdejte ho ve tvaru `HH:MM:SS`. *Úloha nemá pěkné analytické řešení.*

19 Dušan je stále ještě krychle. Když si lehl do vody podstavou rovnoběžně s hladinou, trčel 4 cm nad hladinu. Náhle však přišla vysoká vlna a převrátila ho tak, že jedna z jeho tělesových úhlopříček byla svisle. Teď z něj nad hladinu trčí jen jeden vrchol do výšky 18 cm. Jak hustý je Dušan?





20 Maťo vzal kámen hmotnosti m a položil jej na přední konec skateboardu hmotnosti M a délky L, který se po zemi pohybuje se zanedbatelným třením. Mezi kamenem a skateboardem ale působí tření s koeficientem

μ. Maťo nyní skateboard postrčí nohou a tím mu udělí rychlost v v podélném směru. Jak velká může být tato rychlost, aby mu kámen nesklouzl ze zadní strany skateboardu?

Uvažujte, že Maťo udělil skateboardu rychlost skokově, tj. s nekonečným zrychlením, přičemž kámen zůstal v prvním okamžiku vzhledem k Maťovi v klidu.

21 Šviho si ve chvilkovém záchvatu monumentální neschopnosti schodil ze stolu svůj gigantický placatý smartphone s výškou l = 16 cm. Má však bleskové reflexy a jak mu mobil padá ze stolu, stihne ho ještě roztočit. Protože má drsný moderní smartphone s obrovským displejem přes celou přední stranu, jedinou jeho nadějí je, že na podlahu dopadne celou zadní stranou, jinak bude po něm.

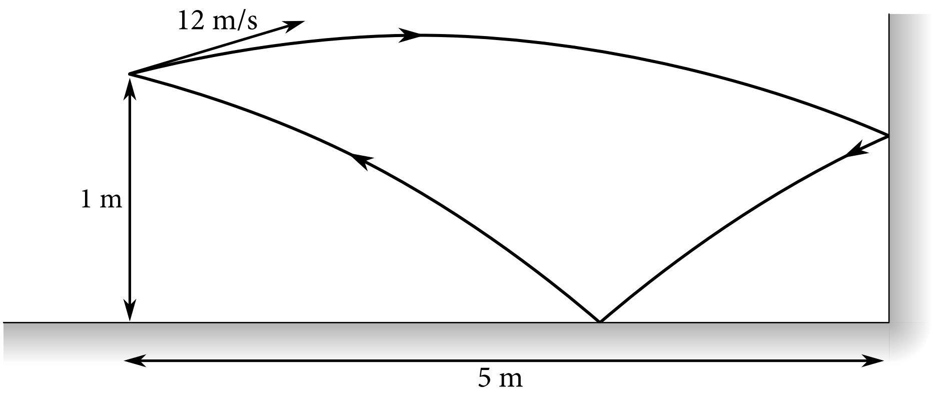
Švihův mobil byl položený na stole vysokém h = 0,8 m, pochopitelně displejem vzhůru. Kolikrát nejvíc se může jeho telefon otočit, aby byl v okamžiku svého prvního kontaktu se zemí také otočen displejem vzhůru?

Předpokládejte, že Šviho roztočil telefon tak švihácky, že mu při tom neudělil žádný impulz ve svislém směru.

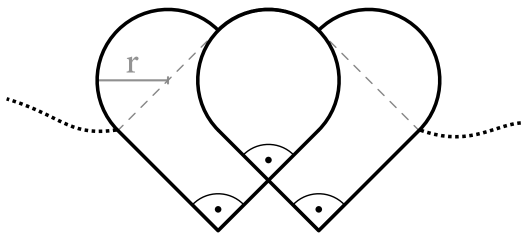
22 Enka vzala dvě zrcátka a postavila je tak, aby svíraly úhel α. Potom mezi ně rozsvítila laserem tak, že paprsek byl rovnoběžný s jedním ze zrcadel. Všimla si, že se paprsek ze zrcadel vrací přesně po téže dráze, jak vešel.

Jaké všechny úhly mohla zrcadla svírat?

23 Jerguš v kapse našel hopík. Velmi se zaradoval a bez rozmýšlení ho hodil z výšky h = 1 m na stěnu ve vzdálenosti d = 5 m rychlostí v = 12 m/s. Hopík narazil do stěny a odrazil se od ní do podlahy a zpět k Jergušovi do ruky. Jak dlouho to celé trvalo, pokud jsou odrazy dokonale pružné?



24 Teri velmi potěšil dáreček od Fera. Tak moc, že jí Fero ještě víc přirostl k srdci. To si nutně vyžádalo i určité změny na náhrdelníku. I teď je vyrobený z dvou identických symetrických srdcí. Délkový elektrický odpor materiálu je stále ρ a poloměr kulatých částí je r. Určete aktuální velikost elektrického odporu náhrdelníku.



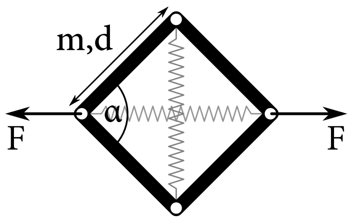
25 Hovorca se v Hutách vleče s várnicí na čaj, která je do poloviny naplněna vychlazeným čajem. Várnice vypadá jako dutý válec vysoký 1 m, který má dole kohoutek, přes který se dá čepovat čaj.

O kolik nejvíce může poklesnou hladina čaje ve várnici bez toho, abychom do ní dopustili vzduch? Vzduch v nádobě měl před vypouštěním standardní atmosférický tlak. Vzduch skrz kohoutek neprobublává.

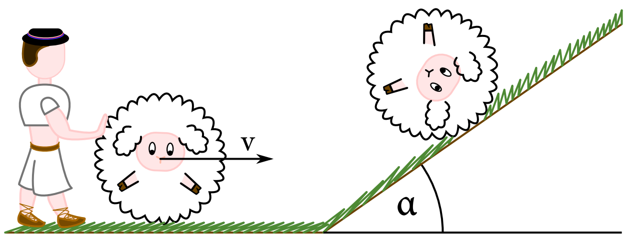
Výsledek udávejte s přesností na milimetry.

26 Michelle stále ráda experimentuje a to i přes své nezáviděníhodné zkušenosti s pružinkami. Například z nich skládá všelijaké mechanické soustavy. Sehnala si čtvercový rám, jehož každá strana má hmotnost m a délku d. V rozích jsou strany spojené klouby, přičemž při ohýbání zůstává celý rám v jedné rovině.

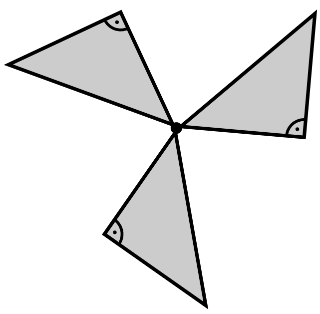
Michelle svůj rám položila vodorovně na zem. Potom vzala dvě pružiny s nulovou klidovou délkou a s tuhostí k a natáhla je na úhlopříčky rámu. Nakonec chytila dva protilehlé rohy a začala je tahat od sebe. Jakou silou F teď musí tahat, aby vnitřní úhel při její ruce měl velikost α?



27 Když Jaro zjistil, že se mu ovce vždy skutálejí, napadlo ho, že jejich válcový tvar využije i jinak. Až ovci vytráví a je ji třeba opět vyhnat na pastvu, rozkutálí ji po vodorovné rovině rychlostí v. Rovina plynule přejde v travnatý svah se sklonem α. Do jaké výšky nad rovinou bude tráva na svahu pomačkaná v okamžiku, kdy ovce zastaví? Poloměr hladové ovce je r.

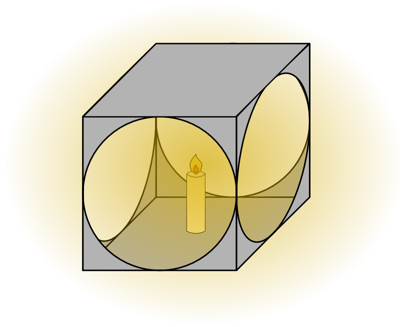


28 Jarka přechází na alternativní zdroje energie. Ve výprodeji nakoupila spoustu plechu s plošnou hustotou σ a posvářela si z něho jednoduchou vrtulku. Vrtulka má tři listy a každý z nich má tvar rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s délkou ramene a. Na ose jsou připevněné rovnoměrně každých 120°. Jaký je moment setrvačnosti Jarčiny vrtulky okolo osy kolmé na rovinu plechu?



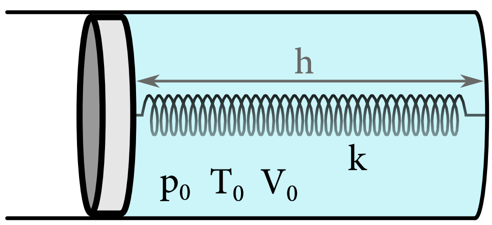
29 Sysel kdesi sehnal metrovou pružinu. Blíže nespecifikovanými vědeckými metodami zjistil, že její tuhost je 70 N/m. Rád by ji rozkrájel na několik kratších pružin, na které poté postaví dřevěnou plošinu o hmotnosti 10 kg. Jaký je minimální počet stejných pružin, na které musí rozkrájet původní pružinu, aby plošinu i se stokilogramovým Syslem udržely nad zemí?

30 Při uklízení místnosti FKS se našel zázračný lampión. Má tvar krychle a světlo z něj proniká jen z kruhů vepsaných do jeho čtyř bočních stěn. Jaký prostorový úhel jím dokážeme zázračně osvítit, pokud je zdroj světla přesně v jeho středu?



31 Vladko vzal dlouhou válcovou nádobu a uzavřel ji pístem. Poté píst připevnil ke dni pružinkou s tuhostí k a nulovou klidovou délkou. Píst v nádobě uzavřel plyn o objemu V_0, tlakem p_0 a teplotou T_0.

Vtom si uvědomil, že prodloužení pružinky h je výbornou stavovou veličinou. Ihned si nakreslil h–T diagram adiabatického děje s ideálním plynem uvnitř pístu. Předpokládejte, že na píst nemůže působit žádná vnější síla, takže jedinými silami působícími na píst jsou tlaková síla plynu uvnitř a síla z pružinky. Nakreslete daný diagram i vy a vyznačte všechny význačné hodnoty.



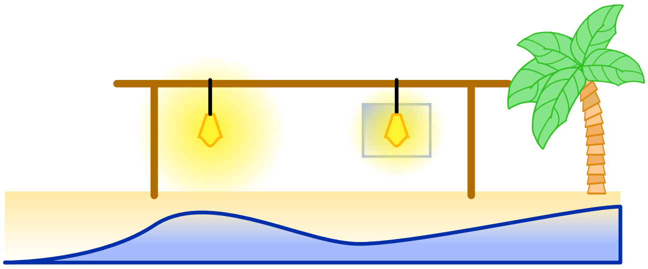
32 Simon narychlo potřebuje vodorovně polarizované světlo. Má však jen zdroj svisle polarizovaného světla s intenzitou I_0 a 10 dokonalých polarizačních filtrů, ze kterých si chce sestavit přístroj, který mu rovinu polarizace otočí. Jakou největší intenzitu může mít vodorovně polarizované světlo po průchodu jeho přístrojem, když v něm nechce mít žádnou svisle polarizovanou složku?

Dokonalý polarizační filtr propustí všechno světlo ve směru polarizace a žádné světlo ve směru na něj kolmém.

33 Adam plánuje zrušit nejmenovanou instituci ve svém sousedství. A to ne jen tak nějakou vyhláškou, ale rovnou dělostřelectvem. Vzal kanón s hlavní délky L a průřezem S. Vložil do něj projektil o hmotnosti m tak, že za projektilem zůstal ještě vzduch o objemu V_0 a tlaku p_0. Výbuch střelného prachu dodal vzduchu za projektilem energii E. Následně se vzduch začal adiabaticky rozpínat, čímž vystřelil projektil z děla. Jaká byla rychlost projektilu v okamžiku, kdy opouštěl dělo? Vzduch považujte za ideální dvouatomový plyn.

34 Sirény Ninka a Hanka po nocích kvílí na břehu moře a pokouší se nalákat námořníky na světlo svých stejných luceren. Ninka si svoji lucernu volně zavěsila na držák, odkud svítí izotropně s výkonem P. Hanka se o svoji lucernu bojí. Proto jí radši umístila do velké plné krychle ze skla s indexem lomu n a otočila jí tak, aby jednou stěnou směřovala přímo k moři.

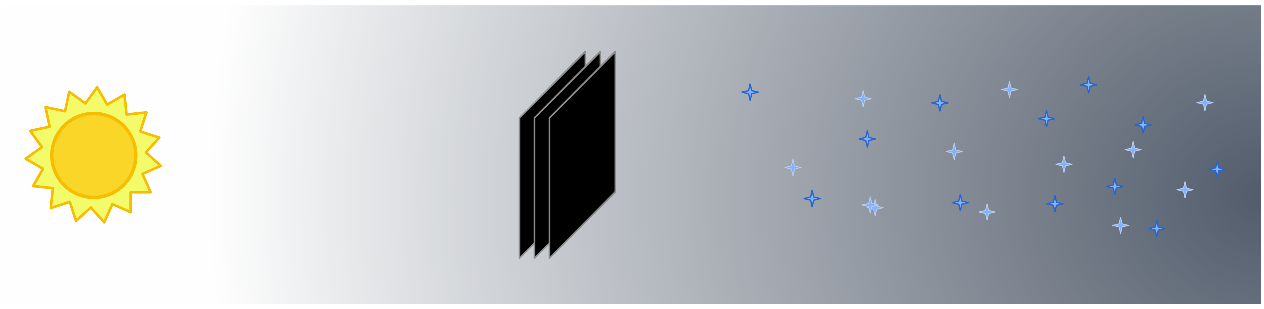
Kterou lucernu vidí námořníci při pohledu kolmo na břeh z velké dálky jasněji a kolikrát?



35 Pľyš si ráda hraje s částicemi. Postavila si vlastní mlžnou komoru, kterou vložila do silného magnetického pole o intenzitě $B = 10$ T. V jednom momentě zpozorovala, že do její mlžné komory vletěly současně proton a mion rychlostí $v = 0{,}99c$ kolmo na směr magnetického pole tak, že před vstupem do komory letěly rovnoběžně a v komoře zanechaly stopu v podobě dvou soustředných půlkružnic. Jaká byla vzájemná vzdálenost částic před vstupem do komory?

Mion má stejný náboj jako elektron, jen je 207-krát těžší.

36 Za oknem kosmické stanice se na šňůrách suší tři obrovské dokonale černé plachty. Na první plachtu svítí Slunce kolmo s plošným výkonem $F_{\odot} = 1370\ \mathrm{W/m^2}$. Jaká bude rovnovážná teplota třetí plachty, pokud se za ní nachází už jen prázdný kosmický prostor?



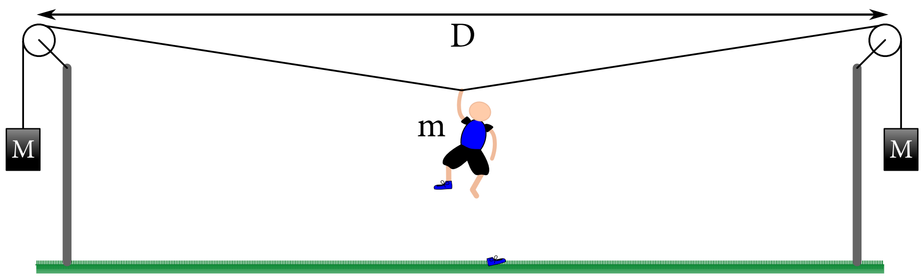
37 Maťo se rozhodl projít Malokarpatskou vinnou cestu. Avšak už v první vinné pivnici ho samotné sudy na víno zaujaly více než jejich obsah. Měly válcový tvar s poloměrem podstavy 0,5 m a výškou 1,6 m a jsou sestaveny z rovných prken, která držela u sebe díky kovovým obručím. Zamyslel se, kolik nejméně obručí je potřeba, aby se takový sud nerozpadl, když stojí na podstavě. Mez pevnosti materiálu obruče je 20 MPa, její průřez je 30 mm^2 a hustota vína je 1000 kg/m^3.

38 Simon si stále ještě hraje se svými polarizačními filtry. Po spoustě experimentování se mu však trochu zašpinily a každý z nich teď propouští už jen 90% vstupujícího světla v rovině polarizace (ale stále žádné světlo ve směru kolmém).

Jakou největší intenzitu čistého, vodorovně polarizovaného světla může získat na výstupu své sestavy teď, jestli je světlo na vstupu svisle polarizované a jeho intenzita je I_0? Simon má opět k dispozici 10 polarizačních filtrů, přičemž nemusí nutně použít všechny.

39 Mary si nafukovala mýdlové bubliny. Poněvadž je mírumilovná duše, nelíbilo se jí, že vzduch vevnitř je utlačován. Rozhodla se proto přivést na bublinu elektrický náboj. Jak velkým nábojem by musela bublinu s poloměrem 4 cm nabít, aby v jejím vnitřku byl atmosferický tlak? Uvažujte, že povrchové napětí mýdlové vody je rovno $1/3$ povrchového napětí čisté vody. Výsledek uveďte s přesností na tři platné číslice.

40 Nosná lana traťového vedení jsou na vrcholech sloupů přehozené přes kladky a jsou na koncích napnutá závažími o hmotnosti M. Kubovi se při provádění údržby přihodila nehoda, v jejímž důsledku zůstal viset na nosném laně. Přitom se mu podařilo lano rozkmitat. Najděte periodu kmitání nosného lana traťového vedení. Uvažujte $\frac{M}{m} = \frac{41}{18}$ a vzdálenost sloupů $D = 25$ m.



Vzorová řešení

1 Najprv si zo zadania vyjadríme zrýchlenie a spomalenie auta v ľahšie použiteľných jednotkách:

$$a_+ = \frac{100\ \text{km/h}}{10\ \text{s}} = 10\frac{\text{km/h}}{\text{s}} \qquad \text{a} \qquad a_- = \frac{100\ \text{km/h}}{6\ \text{s}} = \frac{100}{6}\frac{\text{km/h}}{\text{s}}.$$

Aby sme pracovali s čo najmenej odpornými číslami, zrýchlenia si ponecháme takto a počas počítania si čas vyjadríme tak, aby nám výsledok jednotkovo sedel, teda pri danom zrýchlení a čase bude výraz at^2 vyjadrený v

$$\frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot \text{h} \cdot \text{s} \equiv \frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot 3600\ \text{s} \cdot \text{s}.$$

Teraz si trasu pre väčšiu prehľadnosť rozdeľme na časti medzi značkami:

I. Najprv potrebujeme zrýchliť z nuly na 90 km/h, čo nám s daným zrýchlením potrvá 9 s. Dráha prejdená za tento čas bude

$$s_{\text{Ia}} = \frac{1}{2}a_+t^2 = 112{,}5\ \text{m}.$$

Na konci cesty budeme musieť včas začať brzdiť, čo nám s daným spomalením potrvá 5,4 s a dráha prejdená spomaľovaním za takýto čas bude

$$s_{\text{Ic}} = v_{\text{I}}t - \frac{1}{2}a_-t^2 = 90\ \text{km/h} \cdot \frac{5{,}4\ \text{s}}{3600\ \text{s/h}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{6}\frac{\text{km/h}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{(5{,}4\ \text{s})^2}{3600\ \text{s/h}} = 67{,}5\ \text{m}.$$

Zvyšnú časť dráhy $s_{\text{Ib}} = 990$ m prejdeme rovnomerným priamočiarym pohybom, výsledný čas v prvom úseku teda bude

$$t_{\text{I}} = 9\ \text{s} + \frac{s_{\text{Ib}}}{v_{\text{I}}} + 5{,}4\ \text{s} = 54\ \text{s}.$$

II. Začiatok bude rovnaký ako v prvej časti, čiže zrýchlime za 9 s a $s_{\text{IIa}} = 112.5$ m. V závere úseku budeme musieť brzdiť na 60 km/h. To nám bude trvať 1,8 s a prejdeme pri tom

$$s_{\text{IIc}} = 90\ \text{km/h} \cdot 1{,}8\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{6}\frac{\text{km/h}}{\text{s}} \cdot (1{,}8\ \text{s})^2 = 37{,}5\ \text{m}.$$

Zvyšok je rovnomerný priamočiary pohyb, takže výsledný čas je

$$t_{\text{II}} = 9\ \text{s} + \frac{s_{\text{IIb}}}{v_{\text{I}}} + 1{,}8\ \text{s} = 18\ \text{s}.$$

III. Spomalenie na konci dráhy zvládneme za 3,6 s a dráha prejdená počas spomaľovania bude

$$s_{\text{IIIb}} = v_{\text{III}}t - \frac{1}{2}a_-t^2 = 30\ \text{m}.$$

Zvyšok dráhy $s_{\text{IIIa}} = 1190$ m prejdeme opäť rovnomerne a výsledný čas pobudnutia v tomto úseku je teda

$$t_{\text{III}} = \frac{s_{\text{IIIa}}}{v_{\text{III}}} + 3{,}6\ \text{s} = 75\ \text{s}.$$

Keď to všetko sčítame, zistíme, že celkový čas jazdy bude 147 s.

2 Označme hmotnosť vlaku M, rýchlosť vlaku V a hmotnosť a rýchlosť Katkinho auta m a v. Zo zadania je pomer hybností

$$\frac{MV}{mv} = 150, \tag{2.1}$$

odkiaľ si môžeme vyjadriť pomer rýchlostí

$$\frac{V}{v} = 150\frac{m}{M}. \tag{2.2}$$

Pomer kinetických energií je

$$\frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 100. \tag{2.3}$$

Ak dosadíme pomer rýchlostí z rovnice 2.2 do rovnice 2.3, po úpravách dostávame výsledok

$$\frac{M}{m} = 100\frac{v^2}{V^2} = \frac{100}{150^2}\frac{M^2}{m^2}, \qquad \text{odkiaľ} \qquad \frac{M}{m} = 225.$$

3 Označme si hmotnosť héliového balónika M, malých balónikov m a ich polomery R a r. Súbalónie neodletí, keď celková tiažová sila nie je menšia než vztlaková sila pôsobiaca na súbalónie. Keď si uvedomíme, že tiažová sila pôsobiaca na vzduch v menších balónikoch sa akurát vykompenzuje so vztlakovou silou pôsobiacou na malé balóniky, podmienka nevzlietnutia dáva

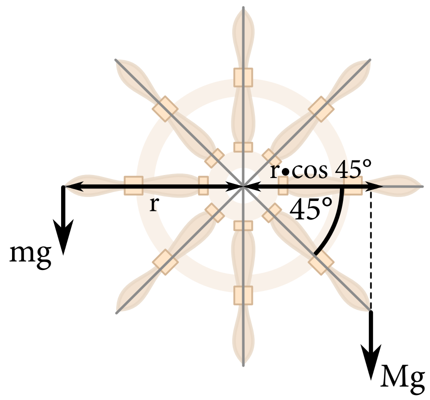
$$M + Nm + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\mathrm{He}} \geq \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a.$$

Pre najmenší počet balónov potom dostávame

$$N = \left\lceil \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \left(\rho_a - \rho_{\mathrm{He}}\right) - M}{m} \right\rceil.$$

Pre číselné hodnoty zo zadania vyjde $N = 6$.

4 Aby sa kormidlo nepretáčalo, výsledný moment sily pôsobiaci na jeho os otáčania musí byť nulový.



Preto musí platiť

$$mgr = Mgr\cos 45° \quad \Rightarrow \quad M = m\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}m.$$

5 Odpor drôtu závisí od jeho dĺžky, prierezu a rezistivity materiálu ρ ako

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Naťahovanie drôtu nemení objem ani rezistivitu drôtu. Ak sa dĺžka zmení dvojnásobne, pri zachovaní objemu musí prierez klesnúť na polovicu. Výsledný odpor teda bude

$$R' = \rho\frac{2l}{\frac{S}{2}} = 4\rho\frac{l}{S} = 4R.$$

6 Označme si postupne plošné hustoty jednotlivých trojuholníkov zľava σ_1 až σ_6. Ich hmotnosti potom získame vynásobením ich plošnej hustoty a obsahu. Dostaneme

$$m_1 = 162\ \text{g},\quad m_2 = 108\ \text{g},\quad m_3 = 81\ \text{g},\quad m_4 = 81\ \text{g},\quad m_5 = 135\ \text{g},\quad m_6 = 243\ \text{g}.$$

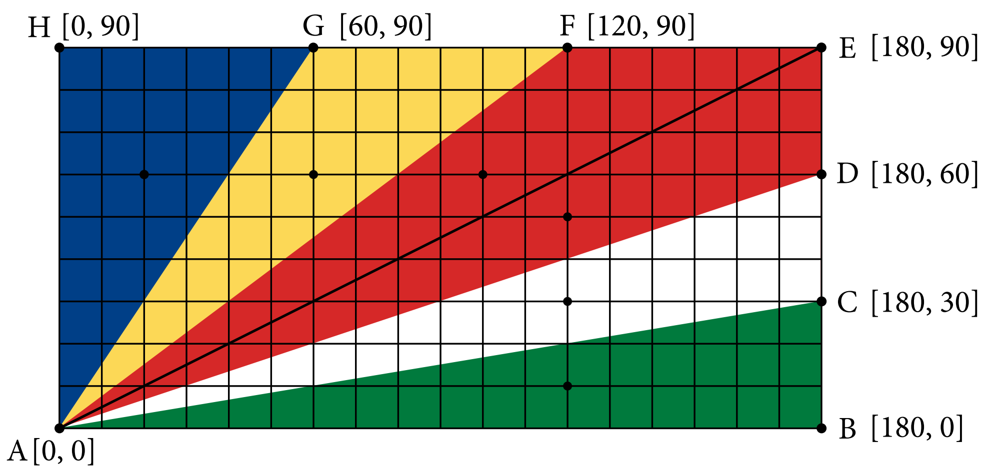
Teraz potrebujeme zistiť ťažiská jednotlivých trojuholníkov. Začnime trojuholníkom $\triangle AGH$. Ťažisko trojuholníka je priesečníkom jeho ťažníc, zároveň je ťažisko v jednej tretine každej ťažnice smerom od zodpovedajúcej základne. Keď si do štvorcovej siete nanesieme ťažnicu na stranu GH a vyznačíme si bod v dvoch tretinách jej dĺžky, zistíme, že ťažisko má súradnice $[20\ \text{cm}; 60\ \text{cm}]$. Analogicky nájdeme ťažiská aj zvyšných trojuholníkov a dostaneme:

$$T_1 = [20\ \text{cm}; 60\ \text{cm}],\quad T_2 = [60\ \text{cm}; 60\ \text{cm}],\quad T_3 = [100\ \text{cm}; 60\ \text{cm}],$$
$$T_4 = [120\ \text{cm}; 50\ \text{cm}],\quad T_5 = [120\ \text{cm}; 30\ \text{cm}],\quad T_6 = [120\ \text{cm}; 10\ \text{cm}].$$

Teraz nám treba nájsť celkové ťažisko vlajky. Všeobecný vzorec na výpočet x-ovej zložky ťažiska objektov s hmotnosťami $m_1, m_2, \ldots, m_n$ s x-ovými súradnicami ich ťažísk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

V našom prípade po dosadení dostávame $X = 90$ cm.



Obrázek 6.1: *Vlajka na štvorcovej sieti.*

Analogicky vypočítame y-ovú zložku ťažiska

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \doteq 39\ \mathrm{cm}.$$

Geometrický stred vlajky má súradnice $x_S = 90$ cm a $y_S = 45$ cm, preto vzdialenosť ťažiska vlajky od jej geometrického stredu je približne 6 cm.

7 Zrýchlenia sánok v jednotlivých častiach ich pohybu si vyčítame z grafu:

$$a_1 = 1{,}5\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a_2 = 0{,}5\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a_3 = -0{,}25\ \mathrm{m/s^2}.$$

V prvej časti na sánky pôsobí iba Ralbo ťažnou silou F. S pomocou druhého Newtonovho zákona dokážeme určiť hmotnosť

$$m = \frac{F}{a_1}. \tag{7.1}$$

V druhej časti pohybu na sánky pôsobí aj trecia sila od podložky $F_{t1} = fmg$, kde f je koeficient šmykového trenia medzi sánkami a podložkou. Výsledná sila pôsobiaca na sánky teraz teda bude

$$F - F_{t1} = F - fmg = ma_2. \tag{7.2}$$

V poslednej časti sú oproti druhej hneď dve zmeny, a to vyššia celková hmotnosť sústavy $m + M$ a tiež proporčne väčšia odporová sila $F_{t2} = f(M+m)\,g$. Platí vzťah

$$F - F_{t2} = F - f(M+m)\,g = (M+m)\,a_3. \tag{7.3}$$

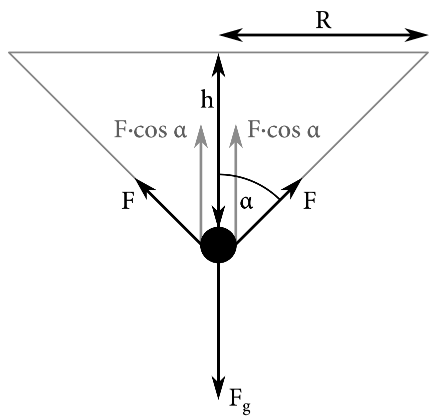
Teraz už dokážeme zistiť všetko, čo nás zaujíma. Z rovnice 7.1 dosadíme za m do rovnice 7.2 a zistíme, že

$$f = \frac{a_1 - a_2}{g}.$$

Toto dosadíme do vzťahu 7.3 a môžeme vyjadriť Bubuho hmotnosť M:

$$M = m\frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1 - a_3} = 60\ \mathrm{kg}.$$

8 Keďže je celý luster symetrický, pozrime sa na dvojrozmernú verziu problému:



Vidíme, že pre každý povrázok, ktorý drží žiarovku, je vertikálna zložka jeho ťahovej sily $F\cos\alpha$. Aby luster nespadol, výsledná sila pôsobiaca na žiarovku musí byť nulová, a keďže ju držia štyri povrázky, dostávame

$$4F\cos\alpha = mg \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arccos\frac{mg}{4F}.$$

Hľadáme výšku h. Tá potom bude

$$\tan\alpha = \frac{R}{h},$$

odkiaľ vieme vyjadriť

$$h = \frac{R}{\tan\alpha} = \frac{mgR}{\sqrt{16F^2 - m^2g^2}}.$$

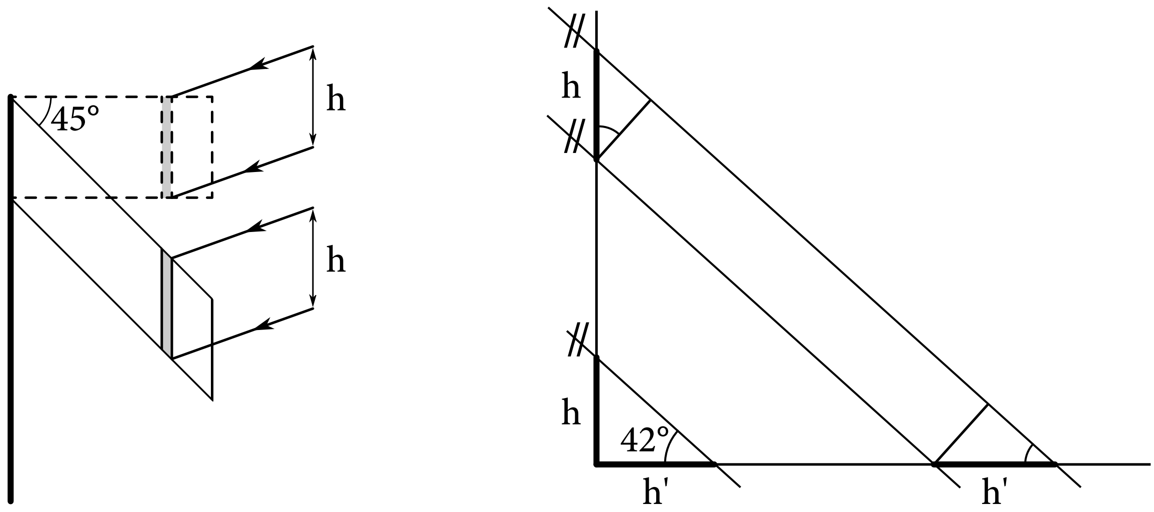
Pre číselné hodnoty zo zadania $h = 10$ cm.

$\boxed{9}$ Najprv si vypočítame, pod akým uhlom je slnko nad obzorom v Bratislave. Cez pravé poludnie Slnko svieti priamo z juhu. Keďže je zároveň aj rovnodennosť, Slnko svieti priamo na rovník. Najbližší bod Zeme k Slnku je priamo na rovníku a na rovnakom poludníku ako Bratislava. Slnečné lúče vtedy na Bratislavu dopadajú pod uhlom $90° - 48° = 42°$.

Keďže vietor fúka zo severozápadu, vlajka smeruje na juhovýchod, a teda je oproti lúčom svetla otočená o 45°. Pri pohľade zo Slnka je teda zdanlivá plocha priemetu vlajky menšia: keby sme vlajku otočili smerom na východ, na zablokovanie rovnakého množstva lúčov by nám stačila vlajka s plochou iba $\cos 45° \cdot 10\ \mathrm{m}^2$, ako vidíme v ľavej časti obrázka 9.1.

Na záver sa ešte lúče musia premietnuť na zem. Dĺžka tieňa v západovýchodnom smere sa nezmení, v severojužnom sa zväčší v pomere h'/h. Platí

$$h = h'\tan 42° \quad\Rightarrow\quad h' = h\cot 42°.$$



Obrázek 9.1: *Priemet vlajky do západovýchodného smeru a na zem*

Preto výsledný tieň na zemi má obsah $\frac{\cos 42°}{\sin 42°} \cdot \cos 45° \cdot 10\ \mathrm{m}^2 = \cot 42° \cdot \cos 45° \cdot 10\ \mathrm{m}^2 \doteq 7{,}85\ \mathrm{m}^2$.

Poznamenajme ešte, že toto platí i pre vlajku neobdĺžnikového tvaru. Ľubovoľne tvarovanú vlajku totiž možno rozkrájať na dostatočne veľa dostatočne úzkych prúžkov, ktoré sa už od obdĺžnikov veľmi nelíšia.

10 Označme priemernú vzdialenosť medzi dvomi autami d. Potom priemerný čas, ktorý uplynie medzi stretnutím dvoch za sebou idúcich áut je $t = \frac{d}{w}$, kde w je vzájomná rýchlosť áut a vlaku. Frekvencia je potom len prevrátená hodnota tohoto času.

Nech v je rýchlosť áut a u je rýchlosť vlaku. Potom frekvencia stretávania áut idúcich oproti je $f^+ = \frac{v+u}{d}$ a áut idúcich v tom istom smere $f^- = \frac{|v-u|}{d}$.[1] Zrejme $f^+ > f^-$. Nech f^+ je k-krát väčšia než f^-. Potom zrejme platí

$$v + u = k\,|v - u|\,.$$

Potrebujeme nájsť rýchlosť vlaku u spĺňajúcu uvedenú rovnicu. Uvažujme dva prípady. Ak $v > u$, tak $v + u = k\,(v - u)$, odkiaľ

$$u = \frac{k-1}{k+1}v.$$

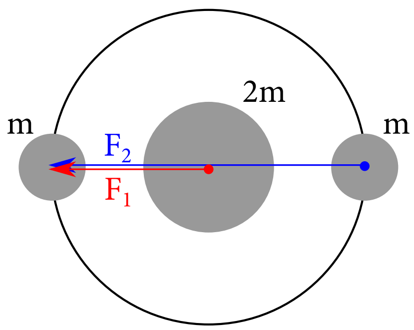
Ak $v < u$, potom $v + u = k\,(u - v)$. Odtiaľ

$$u = \frac{k+1}{k-1}v.$$

Pre $k = 4$ a $v = 90$ km/h dostávame možné rýchlosti vlaku $u = 54$ km/h a $u = 150$ km/h.

11 Vieme, že na každý z mesiacov pôsobia dve gravitačné sily, jedna od planéty a druhá od druhého mesiaca. Aby mesiac obiehal po kruhovej dráhe, výslednica naň pôsobiacich síl musí byť totožná s dostredivou silou, a teda

$$F_1 + F_2 = G\frac{Mm}{R^2} + G\frac{m^2}{4R^2} \stackrel{!}{=} \frac{mv^2}{R}.$$



Na to, aby sme zistili periódu obehu, potrebujeme vyjadriť rýchlosť obehu mesiaca. Potom periódu ľahko vyjadríme ako podiel prejdenej dráhy a obežnej rýchlosti

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Po úpravách dostaneme

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{9Gm}{4R}}} = \frac{4\pi R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{Gm}}.$$

[1] Absolútna hodnota je tam preto, aby frekvencia bola vždy kladná, keďže vlak môže ísť rýchlejšie i pomalšie ako autá.

12 Počas letu pôsobí na vajce iba tiažová sila, ktorá je konzervatívna – môžeme ju popísať potenciálom. Celú úlohu teda môžeme riešiť iba pomocou kinetickej a potenciálnej energie.

Nech už Samašec hodí vajce ľubovoľným smerom, vždy mu udelí rovnako veľkú rýchlosť v. Kinetická energia vajca hneď po tom, ako Samašec vajce hodí, bude vždy

$$E_k(H) = \frac{1}{2}mv^2$$

a potenciálna (ak za nulovú hladinu považujeme zem)

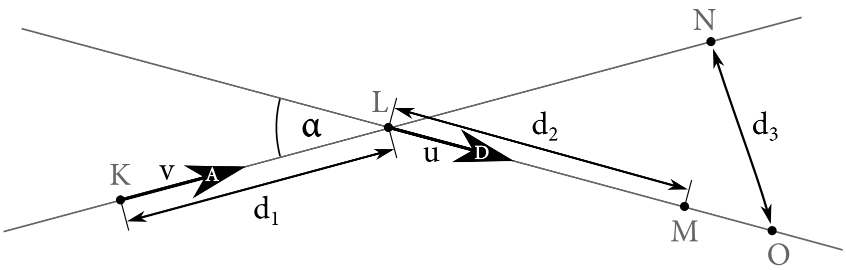
$$E_p(H) = mgH.$$

Počas letu sa súčet kinetickej a potenciálnej energie zachováva, takže vo výške $h = 0$ bude platiť

$$E_k(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv^2(0) + mg\cdot 0 \stackrel{!}{=} E_k(H) + E_p(H) = \frac{1}{2}mv^2 + mgH.$$

Z tohoto si vyjadríme, že $v(0) = \sqrt{v^2 + 2gH}$ a to bez ohľadu na uhol α.

13 Najprv si celú situáciu na morskej hladine nakreslíme:



Označme si $d_1 = 3d$, $d_2 = 4d$ a $d_3 = 21d$. Vidíme, že

- loďka A sa z bodu K do bodu L dostane za čas t a prejde dráhu $3d$. Z toho si poľahky odvodíme jej rýchlosť $v = \frac{3d}{t}$.
- loďka D sa z bodu L do bodu M dostane taktiež za čas t a prejde pritom dráhu $d_2 = 4d$. Jej rýchlosť teda bude $u = \frac{4d}{t}$.
- cesta loďky A z bodu L do bodu N potrvá čas $5t$, táto trasa je teda dlhá $s_1 = v \cdot 5t = 5d_1 = 15d$.
- cesta loďky D z bodu L do bodu O potrvá čas $6t$, dĺžka trasy je tým pádom $s_2 = u \cdot 6t = 6d_2 = 24d$.

Našou úlohou je zistiť uhol α. Podarilo sa nám vyjadriť dĺžky všetkých strán trojuholníka $\triangle LON$, takže hľadaný uhol vieme vyrátať pomocou kosínusovej vety

$$d_3^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2\cos\alpha,$$

odkiaľ

$$\alpha = \arccos\frac{s_1^2 + s_2^2 - d_3^2}{2s_1s_2} = \arccos\frac{25d_1^2 + 36d_2^2 - d_3^2}{60d_1d_2}.$$

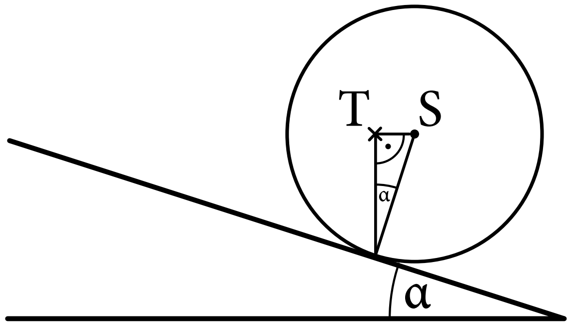
Dosadením hodnôt d_1, d_2 a d_3 dostávame

$$\alpha = \arccos\frac{225d^2 + 576d^2 - 441d^2}{720d^2} = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

14 Ak sa ovečka dokázala na kopec vyšplhať, trenie muselo byť dostatočné na to, aby sa nešmýkala. Preto na to, aby sa ovečka pohla, musí byť schopná sa otočiť okolo bodu jej dotyku s naklonenou rovinou. Na to, aby sa ovečka nehýbala nadol, musí mať moment sily okolo tohoto bodu nezáporný v smere do kopca. Tento moment je výsledkom troch síl pôsobiacich na ovečku:

- *gravitačnej*, ktorá pôsobí v ťažisku,
- *normálovej*, ktorá pôsobí v bode dotyku,
- a *trecej*, ktorá tiež pôsobí v bode dotyku.

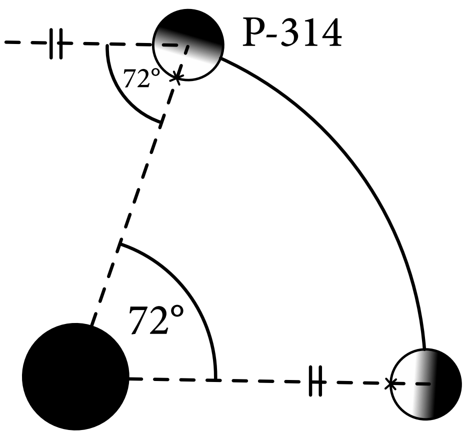
Sily, ktoré pôsobia v bode, okolo ktorého sa ovečka otáča, však nemusíme rátať do momentu sily, keďže majú rameno nulovej dĺžky. Jediná sila, s ktorou musíme rátať, je gravitačná sila v ťažisku. Na to, aby sa ovečka nepohla, musí byť moment od gravitačnej sily nulový. Keďže gravitácia vždy pôsobí nadol, znamená to, že ťažisko musí byť nad miestom dotyku.



Maximálnej vodorovnej vzdialenosti stredu a bodu dotyku, a teda najväčšiemu možnému sklonu odpovedá prípad, keď je ťažisko v rovnakej výške, ako stred ovce. Uhol medzi ťažiskom, bodom dotyku a stredom ovce je vtedy rovný uhlu sklonu kopca α. Preto

$$\sin\alpha = \frac{R/4}{R} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \arcsin\frac{1}{4} \doteq 14{,}48°.$$

15 Poďme si jednotlivé časy označiť písmenkami a číselné hodnoty dosadiť až nakoniec. Čas medzi západmi bude t_1 a jeden rok t_2. Hľadaná hodnota bude t. Planétka P-314 medzi dvoma západmi slnka stihne urobiť $\frac{t_1}{t}$ otáčky okolo svojej osi a $\frac{t_1}{t_2}$ otáčky okolo slnka.



Obrázek 15.1: *Dráha planétky medzi dvomi poludniami na konkrétnom mieste.*

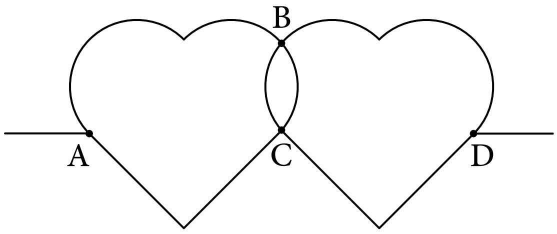
To zodpovedá tomu, že planétka sa z Miškinho pohľadu dostane do rovnakého stavu voči slnku. Z obrázku vidno, že okolo svojej osi urobila planétka jednu otáčku a k nej ešte toľko, o koľko sa otočila okolo slnka. Teda matematicky

$$\frac{t_1}{t} = 1 + \frac{t_1}{t_2},$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_2 + t_1} = 50\ \mathrm{h}.$$

16 Označme si štyri význačné body na náhrdelníku A, B, C a D.



Obrázek 16.1: *Štyri význačné body na náhrdelníku*

Efektívny odpor medzi bodmi A a B je $\frac{3}{2}\pi r\rho$, a zo symetrie je rovnaký odpor aj medzi bodmi B a D. Obdobne medzi bodmi A a C a rovnako aj medzi bodmi C a D je odpor $4r\rho$.

Zo symetrie vyplýva, že potenciál v bodoch B a C je rovnaký, preto vodič medzi nimi môžeme odstrániť. Dostaneme dva paralelné vodiče, jeden s odporom $8r\rho$ a druhý s odporom $3\pi r\rho$. Výsledný odpor má teda veľkosť

$$\frac{1}{\frac{1}{8r\rho} + \frac{1}{3\pi r\rho}} = \frac{24\pi}{3\pi + 8} r\rho \doteq 4{,}327 r\rho.$$

17 V prvom rade si musíme uvedomiť, že pri konštantnom napätí v sieti bude výkon ohrievača závisieť iba od odporu v obvode. Výkon je daný súčinom napätia a prúdu, prúd je však jednoznačne daný odporom ako $I = U/R$ a teda platí

$$P = UI = \frac{U^2}{R}.$$

Ak si vypíšeme všetky spôsoby, ako môžeme rezistory zapojiť, zistíme, že existuje dokopy 18 rôznych zapojení:

- žiadny rezistor (jedno zapojenie),
- jeden rezistor (tri možnosti, ktorý použijeme),
- dva rezistory do série (tri možnosti, ktorý nepoužijeme),
- tri rezistory do série (jedna možnosť),
- dva rezistory paralelne (tri možnosti, ktorý vynecháme),
- dva rezistory paralelne a za ne tretí sériovo (tri možnosti),
- dva rezistory do série a paralelne k nim tretí (tri možnosti)

- a nakoniec všetky tri rezistory paralelne (jediná možnosť).

Aby zapojenie rezistorov nevyhodilo istič, musí byť ich celkový odpor väčší ako $\frac{230\ \mathrm{V}}{15\ \mathrm{A}} \doteq 15{,}5\ \Omega$. Zapojenie bez rezistorov ohrievač skratuje, a teda vyhodí istič. Zapojenie s tromi rezistormi vedľa seba vytvorí odpor

$$R = \cfrac{1}{\cfrac{1}{20\ \Omega} + \cfrac{1}{30\ \Omega} + \cfrac{1}{60\ \Omega}} = 10\ \Omega,$$

ktorý je menší ako medzný odpor 15,5 Ω, takže takéto zapojenie vyhodí istič. Rovnako aj paralelné zapojenie rezistorov 20 Ω a 30 Ω, resp. rezistorov 20 Ω a 60 Ω vytvorí nedostatočný odpor 12 Ω, resp. 15 Ω, ktoré takisto vyhodia istič. Pri ostatných zapojeniach už bude prúd dostatočne malý.

Ostáva nám teda 14 možností. Dve zapojenia však majú rovnaký odpor: ak zapojíme druhý a tretí rezistor vedľa seba, dostaneme $R = 20\ \Omega$, rovnako ako keby sme použili iba prvý rezistor. Existuje teda iba 13 vhodných zapojení s rôznym tepelným výkonom v obvode.

18 Ručičky na hodinách sa hýbu konštantnou rýchlosťou a prechádzajú dvanástkou súčasne, určite budú existovať práve dve riešenia, líšiace sa iba smerom momentu sily, a obe budú od polnoci rovnako vzdialené v čase. Sústredíme sa iba na riešenie s momentom s kladným znamienkom, teda večer. Ranné riešenie bude potom iba doplnkom do dvanástich hodín.

Najprv si všimneme, že minútová ručička je síce dvakrát dlhšia ako hodinová, ale má iba polovičnú hmotnosť, takže pri rovnakom uhle budú obe ručičky pôsobiť rovnakým momentom sily. Perióda obehu hodinovej ručičky je 12 hodín, čiže 43 200 sekúnd; minútovej jedna hodina, čiže 3600 sekúnd. Keď si momenty síl vyjadríme pomocou uhlov (meraných od značky XII), uvidíme, že celkový moment je

$$M = M_{\mathrm{hod}} + M_{\mathrm{min}} = 2md\sin\left(\frac{2\pi t}{43\,200\ \mathrm{s}}\right) + 2md\sin\left(\frac{2\pi t}{3600\ \mathrm{s}}\right). \qquad (18.1)$$

Kde má táto funkcia maximum? Nájdenie presného analytického riešenia vyžaduje znalosť derivovania. Ak to vieme spraviť takto, smelo do toho, ak nie, neprekáža nám to. Zadanie sa pýta iba na konkrétnu sekundu, ktorú s trochou šikovnosti vieme nájsť pomocou kalkulačky postupným dosádzaním. Navyše hodnoty m a d sa nemenia – a keďže sa pýtame iba na čas a nie na veľkosť momentu, môžeme ich úplne ignorovať, výsledok od nich nebude závisieť.

Letmý pohľad na hodiny nám prezradí, že najväčší moment hodiny zažijú určite niekedy okolo tri štvrte na deväť, keď sú obe ručičky blízko číslice IX. Presne o 08:45 je však hodinová ručička ešte len o 3,75° nižšie a moment od nej teda ešte stále rastie. Maximum teda nastane až o niečo neskôr.

Pre čas 08:45:00 dosadíme $t = 31\,500$ s a pomocou kalkulačky zistíme, že

$$M_{08:45:00} \doteq 1{,}991\,445 \cdot 2mg.$$

Ak budeme skúšať nasledujúce sekundy, zistíme, že moment sa ešte párkrát o máličko zväčší, ale po $t = 31\,506\ \mathrm{s} = 08{:}45{:}06$ sa opäť začína zmenšovať. Ostatné lokálne maximá medzi 06:00 a 12:00 sú očividne menšie, ak tomu neveríme, môžeme sa o tom presvedčiť výpočtom.

Keď dopočítame aj riešenie na druhej strane ciferníka, dostaneme výsledky

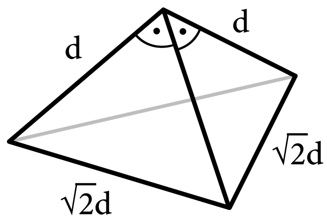
$$t = 11\,694\ \mathrm{s} \equiv 03{:}14{:}54, \qquad \text{a} \qquad t = 31\,506\ \mathrm{s} \equiv 08{:}45{:}06,$$

prípadne v oboch prípadoch ešte o 12 hodín neskôr.

19 Pre teleso ako kocka Dušan ponorené do kvapaliny platí Archimedov zákon. Jeho triviálnym dôsledkom je, že pomer hustoty telesa ponoreného do kvapaliny a hustoty kvapaliny je rovný pomeru ponoreného objemu telesa a celého objemu telesa. Ak si označíme dĺžku hrany a, hustotu vody ρ_v a hustotu Duška ρ_D, v prvom prípade platí

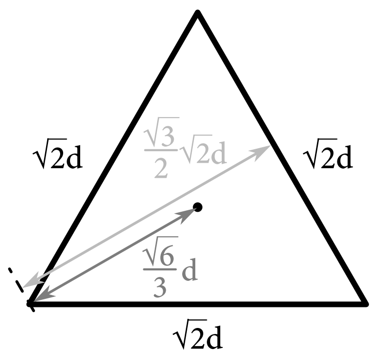
$$\frac{\rho_D}{\rho_v} = 1 - \frac{a^2 \cdot 4\ \mathrm{cm}}{a^3}. \tag{19.1}$$

V druhom prípade vieme, že výška vynorenej časti je 18 cm. Táto vynorená časť je pravidelný trojboký ihlan, ktorého vrchné tri hrany zvierajú pravé uhly.



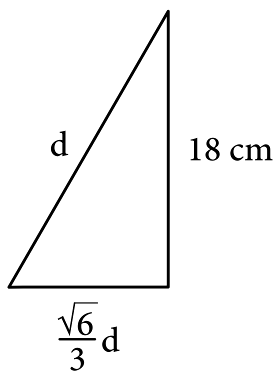
Obrázek 19.1: *Časť kocky nad hladinou*

Dĺžku týchto hrán označme d. Objem nášho ihlanu bude rovný $\frac{1}{6}d^3$. Z Pytagorovej vety budú mať strany podstavy dĺžku $\sqrt{2}d$. Pozrime sa teraz na trojuholníkovú podstavu ihlanu.



Obrázek 19.2: *Priesečník kocky s hladinou*

Má tvar rovnostranného trojuholníka. Dĺžka jej výšky bude $\frac{\sqrt{6}}{2}d$ a jeho stred bude od vrcholu vzdialený $\frac{\sqrt{6}}{3}d$. Nakoniec sa pozrime na pravouhlý trojuholník s horným vrcholom ihlanu, ťažiskom jeho podstavy a jedným zo spodných vrcholov.



Obrázek 19.3: *Popísaný trojuholník*

Z Pytagorovej vety potom získame $d = 18\sqrt{3}$ cm. V tomto druhom prípade platí

$$\frac{\rho_D}{\rho_v} = 1 - \frac{\sqrt{3}\cdot(18\ \mathrm{cm})^3}{2a^3}, \tag{19.2}$$

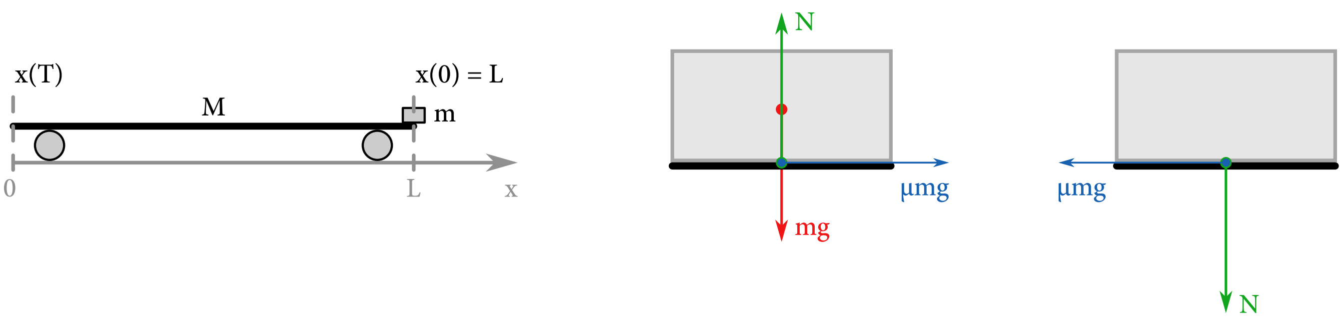
a porovnaním rovníc 19.1 a 19.2 získame

$$a = 3^{\frac{13}{4}}\ \mathrm{cm}.$$

Dosadením do rovnice 19.1 dostávame

$$\rho_D = \left(1 - 4\cdot 3^{-\frac{13}{4}}\right)\rho_v \doteq 887\ \mathrm{kg/m^3}.$$

20 V momente, keď Matej udelí skateboardu rýchlosť **v**, je kameň v pokoji na jeho prednom konci. Keď skateboardu udelí nejakú rýchlosť, ten v dôsledku pôsobenia trecej sily medzi ním a kameňom začne hneď spomaľovať. Zo zákona akcie a reakcie sa zároveň kameň začne pohybovať so zrýchlením.



Obrázek 20.1: *Skateboard a sily pôsobiace na kameň.*

Najprv si napíšeme vzťahy pre zrýchlenie kameňa a a skateboardu A podľa druhého Newtonovho zákona,

$$a = \mu g, \qquad A = -\mu\frac{m}{M}g. \tag{20.1}$$

Teraz si môžeme sformulovať rovnice pre polohu a rýchlosť kameňa s počiatočnou polohou L

$$x_K(t) = L + \frac{1}{2}\mu g t^2, \tag{20.2}$$

$$v_K(t) = \mu g t \tag{20.3}$$

a pre skateboard s počiatočnou polohou 0

$$x_S(t) = vt - \frac{1}{2}\mu g \frac{m}{M} t^2, \tag{20.4}$$

$$v_S(t) = v - \mu \frac{m}{M} g t. \tag{20.5}$$

Aby kameň zo skateboardu nespadol, musí sa voči skateboardu zastaviť, kým prejde vzdialenosť L. Označme si celý čas od začiatku až po vyrovnanie rýchlostí τ. Potom pre sústavu skateboard-kameň môžeme sformulovať podmienky pre polohu a rýchlosť

$$x_S(\tau) = x_K(\tau). \tag{20.6}$$

$$v_S(\tau) = v_K(\tau), \tag{20.7}$$

Z podmienky pre rýchlosti 20.7 dostaneme po dosadení z rovníc 20.5 a 20.3 vzťah pre τ,

$$v - \mu \frac{m}{M} g\tau = \mu g \tau, \tag{20.8}$$

odkiaľ

$$\tau = \frac{v}{\mu g} \frac{M}{m + M}. \tag{20.9}$$

Analogicky dosadíme do podmienky pre polohy 20.6 rovnice 20.4 a 20.2,

$$L + \frac{1}{2}\mu g \tau^2 = v\tau - \frac{1}{2}\mu g \frac{m}{M}\tau^2.$$

Po zjednodušení a dosadení za τ z rovnice 20.9 sa dozvieme, že

$$L = v\tau - \frac{1}{2}\mu g \frac{m+M}{M}\tau^2,$$

$$L = v\frac{v}{\mu g}\frac{M}{M+m} - \frac{1}{2}\mu g \frac{m+M}{M}\frac{v^2}{(\mu g)^2}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2,$$

$$L = \frac{v^2}{\mu g}\frac{M}{m+M} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{\mu g}\frac{M}{m+M}.$$

Odtiaľ vyjadríme

$$v = \sqrt{2\mu g L\left(\frac{m+M}{M}\right)}.$$

21 Začnime s jednoduchšou a zjavnejšou podmienkou: v momente dopadu, keď je výška ťažiska nulová, musí byť uhol otočenia mobilu celočíselným násobkom 2π. Mobil zo stola vo výške h padá v homogénnom gravitačnom poli so zrýchlením g za čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Keďže mobil začína otočený displejom nahor, musí sa za čas t otočiť presne o uhol $2\pi k$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Teda

$$\omega = \frac{2\pi k}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

Druhou podstatnou podmienkou je, že v momente dopadu sa musia obe hrany mobilu hýbať smerom nadol. Inak by tá spodná musela vychádzať z podlahy, čo nie je ani fyzikálne možné, ani v súlade s tým, že ide o prvý kontakt so zemou. Vrchná hrana sa takisto hýbe nadol, inak by znova mobil dopadol na hranu a bolo by po ňom. Spodná hrana mobilu má v momente dopadu rýchlosť

$$v = -gt + \omega \frac{l}{2} \cos\varphi,$$

kde φ je uhol, ktorý mobil zviera so zemou. Ten musí byť pri dopade 0°, a teda z podmienky $v \le 0$ dostávame

$$\sqrt{2hg} = gt \ge \omega \frac{l}{2}.$$

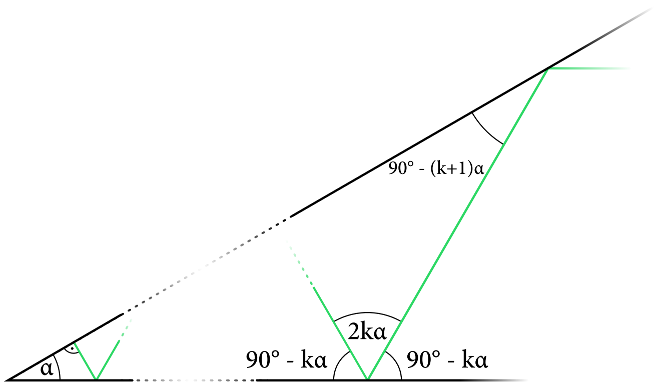
Chceme zistiť najväčšiu možnú uhlovú rýchlosť ω, ktorou môže Šviho roztočiť mobil, aby obe podmienky platili. Spojením podmienok dostávame

$$k \le \frac{2h}{\pi l},$$

čo pre zadané hodnoty dáva najvyššiu možnú hodnotu $k = 3$.

$\boxed{22}$ Aby sa lúč vrátil do lasera naspäť tou istou cestou, ktorou prišiel, musí sa v istom momente odraziť od jedného zo zrkadiel kolmo. Pozrime sa teda na situáciu z opačnej strany, začnime s lúčom vychádzajúcim z jedného zo zrkadiel pod uhlom 90°. Najprv predpokladajme, že sa bude navždy odrážať od zrkadiel. Neskôr sa ukáže, prečo je to užitočné.

Prvýkrát dopadne na zrkadlo pod uhlom $90° - \alpha$. Pod rovnakým uhlom sa nutne aj odrazí. Nakreslime si prípad, keď lúč po niekoľkých odrazeniach na jedno zo zrkadiel dopadne pod uhlom $90° - k\alpha$:

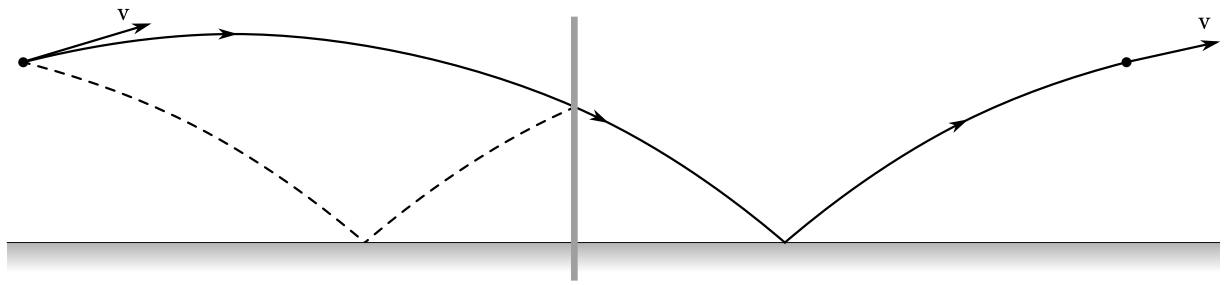


Obrázek 22.1: *Lúč sa odráža, až sa odrazí pod uhlom kα.*

Zo súčtu uhlov v trojuholníku potom pri ďalšom odraze dopadne na zrkadlo pod uhlom $90° - (k+1)\,\alpha$. Lúč sa teda bude postupne odrážať pod uhlami $90°, 90° - \alpha, 90° - 2\alpha, 90° - 3\alpha, \ldots$

Lúč sa zo sústavy dostane von rovnobežne s jedným zo zrkadiel práve vtedy, keď jeden z týchto uhlov bude rovný 0°. Teda hľadáme všetky uhly α také, že $90° - k\alpha = 0°$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo. Riešeniami sú teda všetky uhly v tvare $90°/k$.

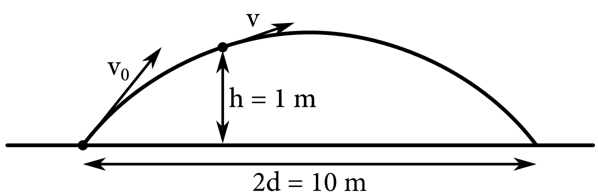
23 Na začiatku si uvedomme, že odrazy sú dokonale pružné, prvý odraz iba otáča x-ovú zložku rýchlosti skákalky. Preto si pre naše účely môžeme pri odraze od steny situáciu „odzrkadliť„. Predstavme si teda, že namiesto steny pokračuje dlážka ďalej a vo vzdialenosti $2d$ od Bubuho stojí druhý Bubu, ktorý po odraze skákalky od zeme ju chytí:



Obrázek 23.1: *Ekvivalentná situácia, s odzrkadlením sveta po odraze.*

Keďže aj druhý odraz je dokonale pružný, podobne sa pri ňom len otočí smer y-ovej zložky rýchlosti skákalky. Potom už len doletí do rovnakej výšky ako na začiatku, kde bude podľa zákona zachovania energie mať rovnakú rýchlosť ako na začiatku. Preto platí, že táto situácia je dráhovo ekvivalentná s prípadom, kedy hodíme skákalku od zeme šikmým vrhom, až na fakt, že nejakú časť parabolického letu sme odsekli zo začiatku a posunuli na koniec. Preto aj výsledný čas, ktorý nás zaujíma (označme si ho T), bude rovnaký.

Uvažujme teda skákalku hodenú šikmo pod uhlom φ rýchlosťou v_0 tak, že precestuje vzdialenosť $2d$ a vo výške h bude mať rýchlosť v.



Obrázek 23.2: *Šikmý vrh, pre ktorý ideme vypočítať celkový čas.*

Namiesto rýchlosti vo výške v sa nám viac hodí poznať rýchlosť na zemi, ktorú si označíme v_0, so zložkami v_x a v_y. Tú si vieme vyjadriť z informácií, ktoré máme, s pomocou zákona zachovania energie ako

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 = v^2 + 2gh. \tag{23.1}$$

Pre šikmý vrh platia rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t, \\ y(t) &= v_y t - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned} \tag{23.2}$$

pričom poznáme začiatočné a konečné súradnice

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \text{a} \qquad x(T) = 2d, \\ y(0) &= 0 \qquad \text{a} \qquad y(T) = 0. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Po dosadení výrazov z 23.2 do pravých strán sa dozvieme, že

$$T = \frac{2d}{v_x},$$

a po vylúčení jedného T z druhej rovnice dostaneme

$$v_y = \frac{gT}{2} = \frac{gd}{v_x}.$$

Toto môžeme dosadiť do 23.1, odkiaľ získame

$$v_x^2 + \frac{g^2 d^2}{v_x^2} = v_0^2.$$

Túto rovnicu môžeme ešte raz vynásobiť v_x^2, čím dostaneme bikvadratickú rovnicu

$$v_x^4 - v_0^2 v_x^2 + g^2 d^2 = 0,$$

Táto bikvadratická rovnica má dve riešenia v tvare

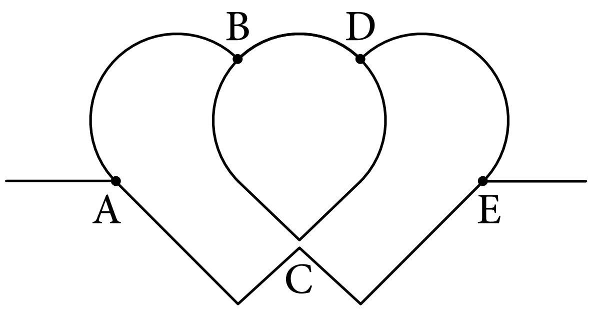
$$v_x^2 = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 4g^2 d^2}}{2}.$$

Jedno z nich ale nie je v súlade so zadaním úlohy: ak by sme loptičku hodili od zeme s takouto horizontálnou rýchlosťou, vertikálna rýchlosť bude primalá a loptička nikdy nedosiahne výšku h. Situácia v zadaní by nemohla nastať. Hľadaným riešením je teda to so znamienkom mínus. Výsledný čas je potom

$$T = \frac{2d}{v_x} = \frac{2d}{\sqrt{\frac{v^2+2gh-\sqrt{(v^2+2gh)^2-4g^2d^2}}{2}}}.$$

Po dosadení číselných hodnôt zo zadania zistíme, že $T \doteq 2{,}425$ s, prípadne pri použití presnejšej hodnoty g ešte o niečo viac.

24 Nazvime si uzly A, B, C, D, E. Zo symetrie vyplýva, že prúd, ktorý tečie priamo medzi bodmi A a C (nie cez bod B), je rovnaký ako medzi bodmi C a E. Podobne prúd, ktorý tečie medzi bodmi B a C, bude rovnaký ako ten, čo tečie priamo medzi bodmi C a D. Preto pre účely rátania odporu tohoto zapojenia môžeme tento obvod v bode C rozdeliť:



Obrázek 24.1: *Ekvivalentný obvod po rozdelení v bode C.*

Odpor medzi bodmi A a B a zo symetrie rovnako aj medzi bodmi D a E má veľkosť

$$R_{AB} = R_{DE} = \pi r\rho.$$

Odpor priamo medzi bodmi A a E bude mať veľkosť $6r\rho$. Medzi bodmi B a D sú dva paralelné vodiče, jeden s odporom $\frac{1}{2}\pi r\rho$ a druhý s odporom $(2+\pi)\,r\rho$.

Celkový odpor medzi bodmi B a D teda bude

$$R_{BD} = \frac{2\pi + \pi^2}{3\pi + 4} r\rho.$$

Potom odpor medzi bodmi A a E cez hornú vetvu bude mať veľkosť

$$\left(2\pi + \frac{2\pi + \pi^2}{3\pi + 4}\right) r\rho = \frac{7\pi^2 + 10\pi}{4 + 3\pi} r\rho.$$

Celkový odpor zapojenia teda bude

$$\frac{42\pi^2 + 60\pi}{24 + 28\pi + 7\pi^2} r\rho \doteq 3{,}3306 r\rho.$$

25 Označme si výšku nádoby na čaj H. Nádoba je do polovice plná, teda objem vzduchu v nádobe je $V_0 = \frac{H}{2}S$. Tlak vzduchu v nádobe je na začiatku rovný atmosférickému. Vytekanie čaju sa zastaví v momente, keď súčet tlaku vzduchu v nádobe a hydrostatického tlaku čaju je rovný atmosférickému tlaku, teda

$$p_a = p + \left(\frac{H}{2} - h\right)\rho g,$$

kde h je pokles hladiny čaju a ρ je hustota čaju.

Teplota vzduchu v nádobe po vypúšťaní sa časom ustáli na teplote vzduchu pred vypúšťaním. Podľa stavovej rovnice teda platí

$$p_0 \frac{H}{2} S = \left[p_a - \left(\frac{H}{2} - h\right)\rho g\right]\left(\frac{H}{2} + h\right) S.$$

Po roznásobení a preusporiadaní dostávame pre pokles hladiny h kvadratickú rovnicu

$$h^2 + \frac{p_a}{\rho g} h - \frac{H^2}{4} = 0.$$

Jej kladným riešením je hľadaný pokles hladiny

$$h = -\frac{p_a}{2\rho g} + \sqrt{\left(\frac{p_a}{2\rho g}\right)^2 + \frac{H^2}{4}}.$$

Pre $H = 1$ m dostávame $h \doteq 25$ mm.

26 Napíšme si energiu pružiniek v ráme, ak ramená rámu zvierajú uhol α. Energia pružinky s tuhosťou k, natiahnutej o x je

$$E = \frac{1}{2}kx^2.$$

V našom prípade bude mať jedna pružina dĺžku $x_1 = 2d\sin\frac{\alpha}{2}$ a druhá dĺžku $x_2 = 2d\cos\frac{\alpha}{2}$. Keďže uvažujeme iba energiu v pružinkách, celková energia systému bude

$$E = 2kd^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2kd^2.$$

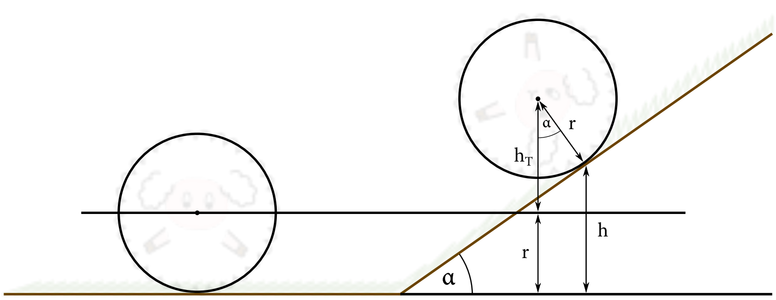
Vidíme teda, že nech budeme rám akokoľvek stláčať alebo naťahovať, jeho energia bude vždy rovnaká. Preto sila, ktorou musíme pôsobiť, aby strany zvierali uhol α, je nulová.

27 Pri riešení tohoto príkladu potrebujeme uvažovať zákon zachovania energie. Ovca v najvyššom bode svojej dráhy, vo výške h nad rovinou, bude mať len potenciálnu energiu. Táto potenciálna energia bude mať veľkosť mgh_T, kde m je hmotnosť ovce a g je tiažové zrýchlenie. Keď sa ovca kotúľa po rovine, má kinetickú energiu nielen od posuvného pohybu, ale aj od rotačného. Jej uhlová rýchlosť je rovná v/r a pre homogénny valec je moment zotrvačnosti rovný $\frac{1}{2}mr^2$. Jej celková kinetická energia na začiatku je teda rovná

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}\frac{mr^2v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Zo zákona zachovania energia sa teda ovca vykotúľa do výšky

$$h_T = \frac{3v^2}{4g}.$$



Všimnime si ale, že ovca sa zeme nedotýka svojím najnižším bodom, ale trochu vyššie, keďže je na kopci. Konkrétne jej najnižší bod je o r nižšie než jej os a miesto, kde sa dotýka zeme, sa nachádza $r\cos\alpha$ pod jej osou. Preto pogniavi trávu do výšky

$$h = \frac{3v^2}{4g} + r\left(1 - \cos\alpha\right).$$

28 Zo symetrie vidíme, že každá lopatka do celkového momentu zotrvačnosti prispieva rovnako. Stačí nám teda vyjadriť moment zotrvačnosti jednej a vynásobiť to tromi. Navyše si môžeme všimnúť, že z dvoch takýchto lopatiek vieme zložiť štvorec so stranou a.

Zaujímať nás bude jeho moment zotrvačnosti okolo kolmej osi, prechádzajúcej jedným z vrcholov. V tabuľkách sa obvykle nájde moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej stredom,

$$I_{\square} = \frac{1}{6} m_{\square} a^2,$$

ak tabuľky nemáme, vieme ho spočítať pomocou škálovania a Steinerovej vety. Tá nám takisto pomôže spočítať moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej vrcholom. Ak označíme vzdialenosť novej osi od ťažiska $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, dostaneme

$$I_{\square'} = I_{\square} + m_{\square}x^2 = \frac{1}{6}m_{\square}a^2 + m_{\square}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\right) = \frac{2}{3}m_{\square}a^2.$$

Jarkina vrtuľka sa skladá z troch polovíc takého štvorca, a teda jej moment zotrvačnosti bude 3/2-krát väčší, čiže $m_{\square}a^2$. Po dosadení $m_{\square} = \sigma a^2$ dostávame výsledok

$$I_{\text{vrtuľka}} = \sigma a^4.$$

Alternatívne sa vieme k výsledku dopracovať aj tak, že si uvedomíme, že moment zotrvačnosti závisí len na kolmej vzdialenosti bodov telesa od osi otáčania, a tá sa v prípade našej vrtuľky nezmení, keď jednotlivé lopatky vrtuľky ľubovoľne natočíme okolo osi otáčania. Vieme ich teda natočiť aj tak, že dostaneme útvar, ktorý predstavuje $3/8$ štvorca so stranou dĺžky $2a$. Moment zotrvačnosti vrtuľky sú teda $3/8$ momentu zotrvačnosti tohto štvorca okolo jeho stredu, čiže

$$I_{\text{vrtuľka}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2a)^2\,\sigma\cdot(2a)^2 = \sigma a^4.$$

Dobrým zvykom býva udávať moment zotrvačnosti v tvare „konštanta krát hmotnosť krát charakteristický rozmer na druhú„. Hmotnosť celej vrtuľky je $M = \frac{3}{2}\sigma a^2$. Ak za charakteristický rozmer vezmeme dĺžku odvesny trojuholníka a, moment zotrvačnosti bude

$$I_{\text{vrtuľka}} = \frac{2}{3}Ma^2.$$

29 Predstavme si pružinu zloženú z n rovnakých pružín s tuhosťou k. Ak na takúto zloženú pružinu budeme pôsobiť nejakou silou F, každá z pružiniek sa skráti rovnako, ako keby sme touto silou pôsobili na ňu samotnú. Zmeny dĺžky teda bude n-krát väčšia a celková tuhosť zloženej pružiny bude len $\frac{k}{n}$.

Pri krájaní pružiny to bude fungovať opačne – ak pružinu nakrájame na n kusov, pri pôsobení silou F sa každý skráti iba o jednu n-tinu dĺžky, o ktorú by sa skrátila pôvodná pružina, čomu zodpovedá tuhosť nk. Podobne, ak skladáme n rovnakých pružín s tuhosťou k vedľa seba, tuhosť výslednej pružiny bude nk. Preto celková tuhosť kúskov pružiny, ak ich Syseľ položí vedľa seba, bude kn^2.

Musíme si však uvedomiť, že pokojová dĺžka týchto pružín tiež klesla, a to na dĺžku $\frac{1\,\mathrm{m}}{n}$. Aby pružiny udržali plošinu nad zemou, musia sa stlačiť o menej, než je ich pokojová dĺžka. Sila, ktorou pôsobí plošina so Sysľom na pružiny, bude rovná $F_S = g \cdot 110$ kg.

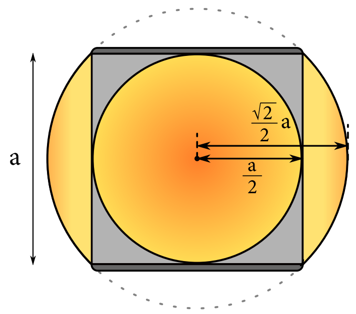
Sila od pružiny má veľkosť $F_p = k'x = kn^2\Delta x$, kde Δx je zmena dĺžky pružiny. Aby pružiny plošinu udržali nad zemou, musí platiť

$$F_S < n \cdot 70\ \mathrm{N}.$$

Ľahko dopočítame, že Syseľ musí svoju pružinu nakrájať na aspoň 16 kusov.

30 Vo výsledku chceme zistiť osvetlený priestorový uhol. Ten je rovný podielu plochy gule, ktorú by sme osvietili, ak by sme našu kocku dali do stredu tejto gule a jej polomeru na druhú. Najjednoduchšie si to predstavíme tak, že si zoberieme guľu, ktorá má stred v strede kocky s priemerom dlhým ako stenová uhlopriečka kocky.

Ak si označíme dĺžku strany kocky a, táto guľa má polomer $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Navyše pekne vidíme, že táto guľa presne pretína obvody dier v bočných stenách. Ak by sme teraz kocku zmenšili, osvetlené by zostali tie časti gule, ktoré trčia z kocky a sú na bokoch[2].



Obrázek 30.1: *Osvetlený priestorový uhol ako časť povrchu gule*

Aby sme vedeli zistiť, aký priestorový uhol pokrývajú osvetlené časti, musíme zistiť ich plochu. Tieto časti sú guľovými vrchlíkmi, o ktorých platí, že ich plocha je rovná $2\pi rh$, kde r je polomer gule a h je výška vrchlíka. Všetky štyri osvetlené guľové vrchlíky budú mať zo symetrie rovnakú plochu. Ich výška bude rozdiel medzi polomerom gule a polovicou strany kocky, čiže

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{a}{2}.$$

Každý z nich bude mať plochu

$$2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

a celková plocha je teda

$$8\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}a^2.$$

[2] diery má lampión len v bočných stenách

Ak to vydelíme štvorcom polomeru gule, dostávame príslušný priestorový uhol

$$8\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 7{,}361 \text{ sr.}$$

31 Stav plynu je popísaný takzvanými stavovými veličinami. Štandardne používanými stavovými veličinami sú tlak p, objem V a teplota T. Stavové veličiny musia spĺňať stavovú rovnicu

$$pV = Nk_BT,$$

kde N je počet častíc plynu a k_B je Boltzmannova konštanta. To znamená, že ak máme zadané dve stavové veličiny, tretiu už vieme dopočítať.

Ak jedinými silami, ktoré pôsobia na piest, sú sila od pružinky a tlaková sila plynu vo vnútri, pre tlak vo vnútri platí $p = \frac{kh}{S}$, kde k je tuhosť pružinky, h je jej natiahnutie a S je plocha piestu. To znamená, že natiahnutie pružinky jednoznačne popisuje tlak plynu, preto je tiež dobrou stavovou veličinou. Zároveň h popisuje aj objem plynu, keďže $V = Sh$. Po dosadení výrazov pre tlak a objem do stavovej rovnice dostaneme

$$kh^2 = Nk_BT.$$

Uvedomme si, že natiahnutie pružinky popisuje tlak i objem. To znamená, že ak máme daný objem, okamžite vieme dopočítať tlak (aj naopak), a preto máme len jedinú nezávislú stavovú veličinu.

Vladko si nakreslil h–T diagram adiabatického deja. Pre adiabatický dej platí

$$pV^\varkappa = \text{konšt.}$$

a v našom prípade teda platí

$$kS^{\varkappa-1}h^{\varkappa+1} = \text{konšt.}$$

To znamená, že pri adiabatickom deji h = konšt. Ak však na sústavu nepôsobia vonkajšie sily, natiahnutie pružinky sa nebude meniť. Potom sa tlak ani objem nemenia, a teda sa nemôže meniť ani teplota. To znamená, že ak uvažujeme adiabatický dej, čiže ak zakážeme tepelnú výmenu s okolím, stav plynu sa v pieste meniť nebude, a teda adiabatický dej na h–T diagrame bude reprezentovaný jediným bodom.

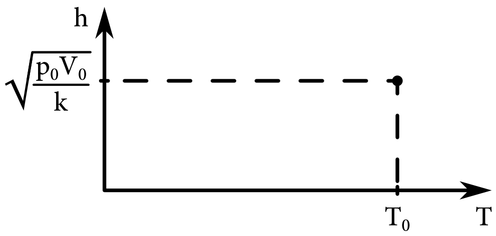
Nájdime si súradnice tohoto bodu. Stav plynu je v zadaní daný stavovými veličinami p_0, V_0, T_0. Teplotu teda máme danú, takže potrebujeme už len nájsť natiahnutie pružinky h_0. Keď prenásobíme medzi sebou výrazy pre tlak a objem, dostaneme

$$p_0V_0 = \frac{kh_0}{S}\cdot Sh_0 = kh_0^2,$$

odkiaľ

$$h_0 = \sqrt{\frac{p_0V_0}{k}}.$$

Takže h–T diagram adiabatického deja teda vyzerá nasledovne:



32 Budeme sa na svetlo pozerať ako na priečne vlnenie elektromagnetického poľa. Predstavme si, že máme svetlo polarizované v určitom smere a nasmerujeme ho cez dokonale priepustný polarizačný filter s rovinou polarizácie otočenou voči tomuto smeru o uhol φ. Na druhej strane filtra budeme pozorovať už iba zložku v smere zhodnom so smerom polarizácie filtra, ktorá má amplitúdu $A_0 \cos\varphi$. Zložka kolmá na smer polarizácie filtra, veľká $A_0 \sin\varphi$, ním neprejde.

Energia elektromagnetickej vlny je však úmerná štvorcu amplitúdy, teda v reči intenzít prejde časť veľká $I_0 \cos^2\varphi$ a časť s veľkosťou $I_0 \sin^2\varphi$ filter pohltí. Súčet prepustenej a pohltenej energie je samozrejme rovný energii vstupujúcej vlny.

Ak chce Simon mať na výstupe iba vodorovnú zložku, posledný filter musí byť určite natočený tiež vodorovne. Čo ale so zvyšnými filtrami? Intuitívnym a pritom aj správnym riešením je rozložiť ich tak, aby uhly medzi rovinami polarizácie dvoch po sebe nasledujúcich filtrov boli vždy rovnaké a čo najmenšie. Poďme si to dokázať.

Majme tri filtre s uhlami natočenia φ_1, φ_2 a φ_3 a nech vzájomné rozdiely ich natočení sú rôzne,

$$\beta \equiv \varphi_3 - \varphi_2 \neq \varphi_2 - \varphi_1 \equiv \alpha.$$

Ukážeme, že ak stredný filter φ_2 pootočíme tak, aby sa rozdiely rovnali, výsledná intenzita po prechode sa určite zvýši. Ak otáčame iba stredným filtrom, platí

$$\alpha + \beta = \gamma = \text{konšt} \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma - \alpha$$

a teda intenzita po prechode obomi dvojicami filtrov je

$$I_{\text{za}} = I_{\text{pred}} \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2(\gamma - \alpha)\,.$$

Zderivovaním podľa α alebo inou chytrou metódou zistíme, že táto funkcia nadobúda maximum práve vtedy, keď $\alpha = \gamma/2$, resp. $\alpha = \beta$. Otáčaním stredného filtra nijak neovplyvníme smer polarizácie za tretím filtrom, takže vždy, keď nájdeme takúto trojicu, môžeme ju pootočením stredného filtra zoptimalizovať. Jediné rozloženie, ktoré takto zlepšiť nevieme, je také, kde už sú všetky rozdiely rovnaké.

Tým sme zároveň dokázali, že Simon potrebuje použiť všetky filtre: ak by nejaký nechal bokom, je to to isté, ako keby ho postavil pred prvý filter v rovnakej orientácii. O tejto situácii už ale vieme, že by sme ju dokázali zlepšiť otočením filtra, ktorý je po novom druhý, a teda nemôže byť optimálna.

Nakoniec nám ostáva už len spočítať, koľko svetla cez optimálnu Simonovu sústavu môže prejsť. Každý z n filtrov stočí rovinu polarizácie o $90°/n$, ale pritom nechá prejsť iba $\cos^2(90°/n)$ intenzity svetla. Každý filter zníži intenzitu konštantným násobkom, takže výsledná intenzita je súčinom všetkých koeficientov.

Pre $n = 10$ je teda výsledok

$$I = I_0 \cos^{20}\left(\frac{90°}{10}\right) \doteq 0{,}78\, I_0.$$

33 Výbuch pušného prachu dodal plynu energiu E. Za predpokladu, že výbuch trval dostatočne krátko, takže sa projektil efektívne nestihol posunúť, plyn nevykonal žiadnu prácu, a teda všetko teplo sa využilo na nárast vnútornej energie plynu. To viedlo k nárastu teploty plynu danému rovnicou $E = \gamma N k \Delta T$, kde N je počet častíc plynu, k je Boltzmannova konštanta a γ je konštanta reflektujúca počet stupňov voľnosti molekúl plynu. Pre dvojatómové molekuly uvažujeme $\gamma = \frac{5}{2}$.

Ak bola pôvodná teplota plynu T_0, nová teplota bude $T_1 = T_0 + \Delta T$. Zároveň výbuch plynu považujeme za izochorický, preto tlak plynu po výbuchu bude

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

V zápätí nastala fáza adiabatického rozpínania. Pre adiabatický dej platí, že $pV^\varkappa = \text{konšt.}$, preto možno písať $p_1 V_0^\varkappa = pV^\varkappa$. Odtiaľ

$$p(V) = p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \left(\frac{V_0}{V}\right)^\varkappa.$$

Integrovania znalí ľudia môžu nájsť prácu, ktorú vykonal plyn pri adiabatickom rozpínaní ako

$$W = \int_{V_0}^{LS} p_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \left(\frac{V_0}{V}\right)^\varkappa \mathrm{d}V.$$

Ostatní využijú poznatok, že pri adiabatickom deji nedochádza k výmene tepla s okolím, preto podľa prvej vety termodynamickej sa práca plynu rovná zápornej zmene vnútornej energie plynu $W = -\delta U$. Na určenie zmeny vnútornej energie potrebujeme nájsť zmenu teploty plynu pri adiabatickej expanzii. Podľa stavovej rovnice

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_0 + \Delta T} \frac{V_0}{LS}.$$

Po dosadení do rovnice adiabaty dostávame

$$p_1 V_0^\varkappa = p_1 \frac{T_2}{T_0 + \Delta T} \frac{V_0}{LS} (LS)^\varkappa,$$

odkiaľ

$$T_2 = \left(\frac{V_0}{LS}\right)^{\varkappa - 1} (T_0 + \Delta T).$$

Potom hľadaná zmena vnútornej energie je

$$\delta U = \gamma N k \delta T = \gamma N K (T_0 + \Delta T) \left[\left(\frac{V_0}{LS}\right)^{\varkappa - 1} - 1\right].$$

Keďže $W = -\delta U$, postupnými úpravami dostaneme

$$W = (\gamma p_0 V_0 + E) \left[1 - \left(\frac{V_0}{LS}\right)^{\varkappa - 1}\right].$$

Práca plynu sa využije na urýchlenie projektilu hmotnosti m. Projektilu je pri výstrele udelená kinetická energia $T = \frac{1}{2}mv^2$. Preto hľadaná rýchlosť projektilu je

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{5}{2}p_0V_0 + E\right)\left[1 - \left(\frac{V_0}{LS}\right)^{2/5}\right]},$$

kde sme využili, že pre dvojatómový plyn $\gamma = \frac{5}{2}$ a $\varkappa = \frac{7}{5}$.

34 Keďže nás zaujíma pozorovaná svietivosť z veľkej diaľky a z pohľadu kolmo na breh, stačí nám uvažovať lúče vychádzajúce zo zdroja svetla, ktoré s kolmicou na breh zvierajú malý uhol. Pozrime sa na jeden takýto lúč, vychádzajúci z lampy pod malým uhlom α voči kolmici (v ľubovoľnej rovine). Porovnajme si, čo sa stane s takýmto lúčom v oboch prípadoch.

Ten, ktorý vychádza z Ninkinej lampy, cestuje ďalej pod uhlom α, keďže sa nemá na čom lámať. Z Hankinho lampáša vychádza lúč pod uhlom α. Vzhľadom na fakt, že lampáš je priamo vbudovaný do kocky, lom medzi zdrojom a kockou neuvažujeme. Lúče teda pred lomom z kocky do vonkajšieho prostredia zvierajú s kolmicou uhol α. Podľa Snellovho zákona pri prechode medzi opticky rôzne hustými prostrediami platí

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

kde n_1 a n_2 sú indexy lomu jednotlivých prostredí a α_1 a α_2 uhly, pod ktorými v nich lúč cestuje. V našom prípade uvažujeme, že uhol α je malý, preto $\sin \alpha \approx \alpha$. Okrem toho uvažujme, že index lomu vzduchu $n_2 = 1$, a v našom prípade $n_1 = n$. Preto uhol, pod ktorým lúč vychádza, bude rovný $n\alpha$.

Všetko svetlo, ktoré lampáš opustí pod uhlom menším ako α od kolmice – čiže vnútri kužeľa s vrcholovým uhlom 2α – bude po opustení kocky vnútri kužeľa s vrcholovým uhlom $2n\alpha$. Celkové množstvo energie, ktoré prechádza kužeľom, je úmerné ploche, ktorú kužeľ vytína. Toto množstvo sa nemôže zmeniť, a keďže priestorový uhol vzrastie n^2-krát, energia na priestorový uhol musí n^2-krát klesnúť. Námorníci teda uvidia Ninkin lampáš ako n^2-krát jasnejší.

35 Sila pôsobiaca od magnetického poľa s indukciou $\mathbf{B}$ na nabitú časticu pohybujúcu sa rýchlosťou $\mathbf{v}$ s nábojom q je rovná

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

V našom prípade majú obe častice celý čas vektor rýchlosti kolmý na smer magnetického poľa. Preto sila na ne pôsobiaca od magnetického poľa bude dostredivou silou pôsobiacou počas kruhového pohybu. Táto má veľkosť

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

z čoho dostávame

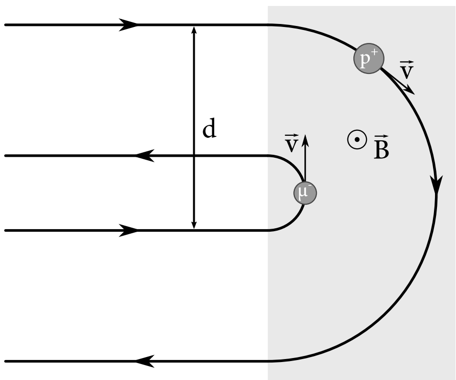
$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Poznamenajme ale, že častice sa pohybujú relativistickými rýchlosťami, preto $m = \gamma m_0$, kde m_0 je pokojová hmotnosť častice a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Náboj miónu má rovnakú veľkosť $q = e$ ako náboj protónu, len opačné znamienko. Aby v magnetickom poli leteli po sústredných polkružniciach, musia na začiatku letieť vo vzájomnej vzdialenosti

$$d = r_e + r_p = \frac{v\left(m_p + m_\mu\right)}{eB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

od seba. Pre hodnoty zo zadania vyjde $d = 2{,}44$ m.



36 Uvažujme, že plachty dosiahli rovnovážnu teplotu. Teda všetok výkon, ktorý pohltia, aj naspäť vyžiaria do svojho okolia. Z tvaru a symetrie plachty môžeme uvažovať, že energiu vyžarujú rovnako do oboch smerov. Ak uvažujeme, že plachty sú dostatočne blízko pri sebe, všetok výkon smerom k inej plachte bude pohltený danou plachtou.

Označme si plachty číslami 1, 2, 3 smerom od Slnka. Potom o plošných výkonoch jednotlivých plachiet F[3] vieme v termodynamickej rovnováhe povedať nasledovné:

$$F_1 = F_\odot + \frac{1}{2}F_2, \qquad F_2 = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_3, \qquad F_3 = \frac{1}{2}F_2.$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc sa dozvieme, že

$$F_1 = \frac{3}{2}F_\odot, \qquad F_2 = F_\odot, \qquad F_3 = \frac{1}{2}F_\odot,$$

z čoho nás zaujíma iba posledná rovnica.

Teraz si už treba len uvedomiť, že chceme zistiť plošný výkon na jednotku plochy povrchu, a ten je len polovičný, keďže plachta každým smerom vyžiari polovicu svojho výkonu. Keďže podľa zadania plachty môžeme považovať za absolútne čierne telesá, teplota bude

$$T = \sqrt[4]{\frac{F_\odot}{4\sigma}} \doteq 278{,}785\ \mathrm{K}.$$

37 Hydrostatický tlak rastie s výškou ako $p(h) = h\rho g$. Tlak v kvapaline je rovnaký v danom mieste na ľubovoľne orientovanú plôšku, preto na stenu suda vo výške h pôsobí tlaková sila veľkosti

$$\Delta F(h) = p(h)\cdot\Delta S = h\rho g\cdot 2\pi R\Delta h.$$

[3] F je celkový plošný výkon vyžiarený oboma stranami plachty

Táto sila pôsobí po celom obvode suda vo výške h kolmo na jeho povrch.

Ťahovú silu $\Delta T(h)$, ktorú táto tlaková sila vyvoláva v prúžku suda výšky Δh vo výške h, vypočítame z virtuálnych prác. Predstavme si, že tlaková sila spôsobí roztiahnutie sudu, a teda aj prúžku, o δR. Pritom vykoná prácu $\delta W = \Delta F \cdot \delta R$.

Rovnakú prácu by vykonala ťahová sila v sude, keby spôsobila rovnakú deformáciu. Keďže sa však obvod sudu zväčší o $2\pi\delta R$, je príslušná virtuálna práca $\delta W = \Delta T \cdot 2\pi\delta R$. Z rovnosti prác dostávame $\Delta T(h) = \frac{\Delta F(h)}{2\pi}$. Potom ťahová sila v sude vo výške h je

$$\Delta T(h) = R\rho gh\Delta h.$$

Táto ťahová sila napína prúžok výšky Δh. My však potrebujeme silu, ktorá pôsobí na celý sud, a preto musíme sčítať príspevky cez celú výšku. Jednou možnosťou je vypočítať integrál

$$T = \int_0^H R\rho gh \,\mathrm{d}h.$$

Druhá možnosť je uvedomiť si, že prírastok ťahovej sily závisí od výšky lineárne, takže na grafe je to len priamka prechádzajúca počiatkom. Celková ťahová sila je potom plocha pod grafom,[4] čo nie je nič iné než plocha pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžok H a $R\rho gH$, takže celková ťahová sila v sude je

$$T = \frac{1}{2}R\rho gH^2.$$

Jedna obruč je schopná uniesť ťahovú silu danú medzou pevnosti a jej prierezom $\tau = \sigma S$, takže minimálny počet obručí na sude je

$$N = \left\lceil \frac{R\rho gH^2}{2\sigma S} \right\rceil.$$

Pre číselné hodnoty zo zadania dostávame $N = 11$.

38 Vyjdeme z riešenia predchádzajúcej úlohy. Jediným rozdielom je tu to, že intenzita klesá nielen kvôli rozdielnym natočeniam filtrov, ale aj kvôli zníženej priepustnosti samotných filtrov. Zápasia tu dva vplyvy: čím viac filtrov máme, tým šetrnejšie vieme rovinu polarizácie stáčať, zároveň však stále väčšiu časť intenzity strácame kvôli absorpcii svetla.

Do výrazu pre výslednú intenzitu pribudne ešte exponenciálny člen za stratu intenzity pri prechode každým filtrom a dostaneme

$$I = I_0 \cdot 0{,}9^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{2n}.$$

Vyskúšaním prvých pár možností (alebo v horšom prípade derivovaním podľa n) zistíme, že maximum teraz nastáva už pre $n = 5$,

$$I = I_0 \cdot 0{,}9^5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^{10} \doteq 0{,}36\, I_0.$$

39 Uvažujme plôšku mydlovej bubliny ΔS. Začneme tým, že si vypočítame, aká sila pôsobí na túto plôšku v dôsledku povrchového napätia. Povrchové napätie bubliny sa prejavuje kapilárnym tlakom p_k. Ten je daný

[4] Podobne ako pri rovnomerne zrýchlenom pohybe je prírastok dráhy daný rýchlosťou, a tá je lineárnou funkciou času, takže dráha sa dá vypočítať ako plocha pod grafom $v(t)$.

Laplaceovým vzorcom. Keďže bublina má dva povrchy, platí

$$p_k = \frac{4\gamma}{R},$$

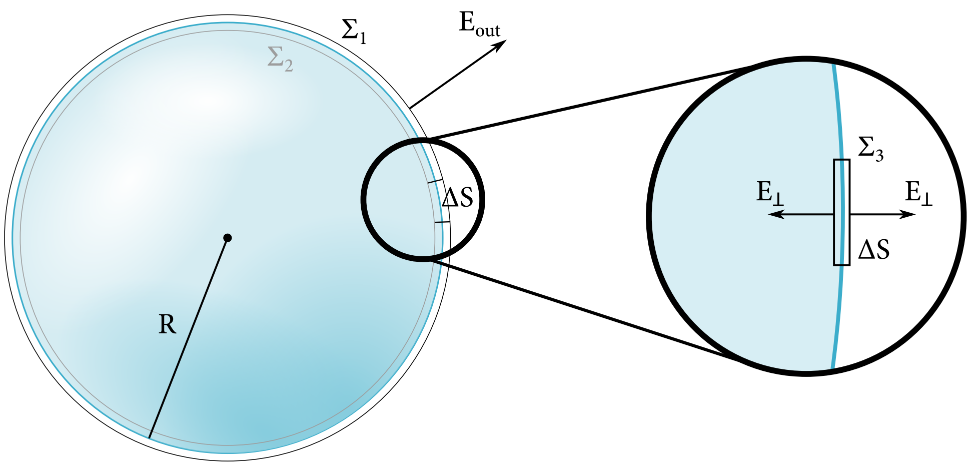
kde γ je povrchové napätie mydlovej vody a R je polomer bubliny. Potom sila pôsobiaca na plôšku ΔS je

$$\Delta F_k = p_k \Delta S = \frac{4\gamma}{R}\Delta S.$$

Táto sila vťahuje plôšku do bubliny.

Ďalej potrebujeme nájsť elektrostatickú silu, ktorou je plôška odpudzovaná po privedení elektrického náboja na bublinu. Povedzme, že Mary priviedla na bublinu náboj Q. Bublina je vodivá, preto sa náboj po povrchu rovnomerne roztečie. Povrchová hustota náboja na bubline bude

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$



Obrázek 39.1: *Elektrické polia na malom kúsku povrchu bubliny.*

Kľúčovým nástrojom k vyriešeniu úlohy je Gaussov zákon. Ten hovorí, že integrál intenzity po ľubovoľnej uzavretej ploche je úmerný celkovému náboju vo vnútri plochy. Matematicky vyjadrené

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Rozloženie náboja na bubline má guľovú symetriu. Elektrická intenzita v okolí gule bude mať teda tiež rovnakú symetriu. Zoberme si teda za Gaussovu plochu sféru Σ_1 na vonkajšom povrchu bubliny. Intenzita na tejto ploche má radiálny smer a konštantnú veľkosť. Preto

$$\oint_{\Sigma_1} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma_1} = E_{\mathrm{out}} 4\pi R^2 \overset{!}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Odtiaľ intenzita na povrchu bubliny je

$$E_{\mathrm{out}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Teraz zoberme za Gaussovu plochu sféru Σ_2 na vnútornom povrchu bubliny. V takom prípade je celkový náboj vo vnútri plochy nulový, a teda na základe rovnakých argumentov ako v predchádzajúcom prípade

$$E_{\text{in}} = 0.$$

Toto sme dostali, keď sme sa pozerali na vec na globálnej škále. Teraz sa pozrime lokálne len na plôšku ΔS. Keď sme dostatočne blízko, jej zakrivenie nevnímame a plôška sa nám javí ako rovná.[5] Za Gaussovu plochu zvoľme „plechovku“ Σ_3 s podstavami ΔS a maličkou výškou, obklopujúcu plôšku ΔS bubliny. Keďže rozloženie náboja je rovinné, elektrická intenzita bude mať zrkadlovú symetriu. Intenzita musí byť kolmá na plôšku – ak by nebola, teda ak by mala aj tangenciálnu zložku s plôškou, tiekli by ňou prúdy, dokým by sa táto zložka nevynulovala. Potom podľa Gaussovho zákona

$$\oint_{\Sigma_3} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma_3} = 2E_{\perp}\Delta S \overset{!}{=} \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

odkiaľ

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Intenzita od plôšky ΔS je na vnútornej strane bubliny v jej blízkosti nenulová. Lenže celková intenzita vo vnútri bubliny má byť rovná nule, preto intenzita od zvyšku bubliny na vnútornej strane plôšky ΔS musí byť rovná $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{\perp}$. Potom sila pôsobiaca na plôšku je

$$\Delta F_e = E\Delta Q = e\sigma\Delta S = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\Delta S.$$

Konečne môžeme zodpovedať otázku zo zadania. Aby bol vo vnútri bubliny atmosférický tlak, musí byť príťažlivá sila povrchového napätia rovná odpudivej elektrostatickej sile $\Delta F_k \overset{!}{=} \Delta F_e$. Z tejto rovnosti dostaneme

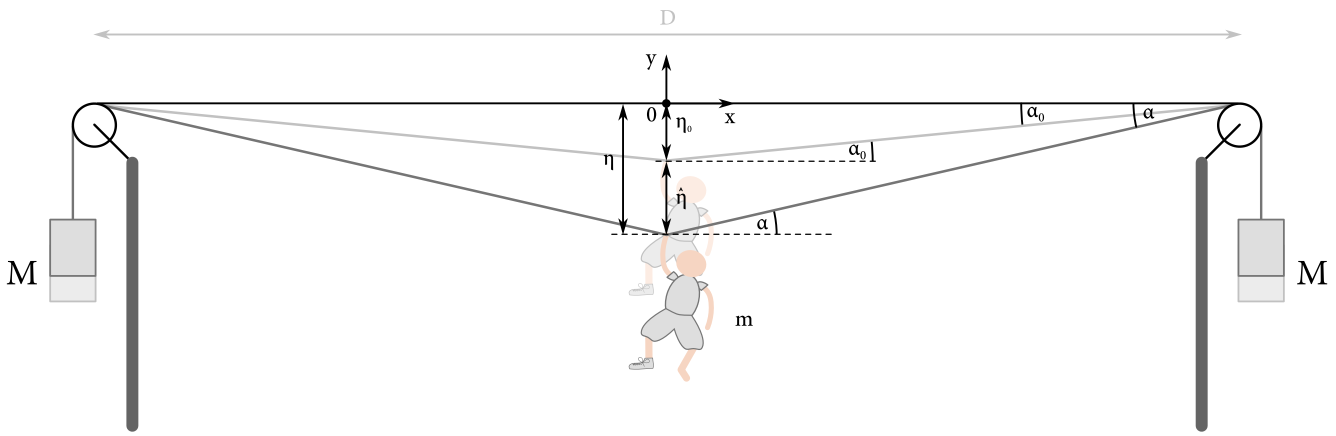
$$Q = \sqrt{128\pi^2\varepsilon_0\gamma R^3}.$$

Pre hodnoty zo zadania vyjde $Q \doteq 1{,}31 \times 10^{-7}$ C.

40 Začnime tým, že nájdeme, ako hlboko Kubo visí v rovnovážnej polohe. Označme si prehnutie lana oproti vodorovnej polohe η_0. Nech α je odklon lana od vodorovnej polohy. Potom

$$\sin\alpha_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}}.$$

[5] Z rovnakého dôvodu aj plochozemci veria, že Zem je plochá.



Lano je napínané ťahovou silou veľkosti $T = Mg$. Z rovností síl vo vertikálnom smere platí

$$2Mg \sin \alpha_0 = mg.$$

Po dosadení výrazu pre $\sin \alpha_0$ dostávame

$$\frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}} = \frac{m}{2M}.$$

Pre neskoršie potreby si vyjadrime túto rovnicu aj v nasledovných tvaroch

$$\eta_0 = \frac{mD}{2\sqrt{4M^2 - m^2}};$$

$$\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} = \frac{MD}{\sqrt{4M^2 - m^2}}.$$

Teraz nech η označuje aktuálne prehnutie lana v dynamickom prípade. Zaveďme si kartézsku súradnicovú sústavu, ako je naznačené na obrázku. Predpokladajme, že dĺžka nosného lana od závažia po závažie je L. V takom prípade už môžeme nájsť polohové vektory jednotlivých objektov. Polohový vektor ľavého závažia je

$$\mathbf{r}_\mathrm{L} = \left(-\frac{D}{2}; \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2} - \frac{L}{2}\right),$$

pravého závažia

$$\mathbf{r}_\mathrm{R} = \left(+\frac{D}{2}; \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta^2} - \frac{L}{2}\right)$$

a polohový vektor Kuba

$$\mathbf{r} = (0; -\eta)\,.$$

Ďalej nájdeme vektory rýchlosti jednotlivých objektov. Označme si rýchlosť Kuba vo vertikálnom smere $\dot{\eta}$. Potom vertikálne rýchlosti závaží sú z geometrie $\dot{\eta}\sin\alpha$, a teda hľadané vektory rýchlosti sú

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_L} &= \left(0; \frac{\eta\dot{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta^2}}\right); \\
\mathbf{v_P} &= \left(0; \frac{\eta\dot{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta^2}}\right); \\
\mathbf{v} &= (0; -\dot{\eta}).
\end{aligned}$$

Teraz už môžeme nájsť celkovú potenciálnu energiu sústavy

$$U = Mgy_L + Mgy_R + mgy = 2Mg\left(\sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta^2} - \frac{L}{2}\right) - mg\eta$$

a kinetickú energiu sústavy

$$T = \frac{1}{2}Mv_L^2 + \frac{1}{2}Mv_R^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2M\eta^2}{\frac{D^2}{4}+\eta^2} + m\right)\dot{\eta}^2.$$

Nás zaujímajú malé kmity Kuba okolo rovnovážnej polohy. Vyjadrime si preto prehnutie lana ako

$$\eta = \eta_0 + \hat{\eta},$$

kde $\hat{\eta}$ sú malé výchylky oproti rovnovážnej polohe.

V prípade malých kmitov možno výraz pre potenciálnu energiu rozvinúť do Taylorovho radu. Chceli by sme dostať harmonické kmity, preto potrebujeme nájsť rozvoj do druhého rádu.

Rozviňme funkciu

$$f(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \left(\eta_0 + \hat{\eta}\right)^2}$$

okolo nuly. Na to potrebujeme poznať hodnoty funkcie $f(\hat{\eta})$ a jej prvých dvoch derivácií v nule. Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
f(\hat{\eta})\big|_{\hat{\eta}=0} &= \sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta_0^2}; \\
\left.\frac{\mathrm{d}f(\hat{\eta})}{\mathrm{d}\hat{\eta}}\right|_{\hat{\eta}=0} &= \left.\frac{\eta_0+\hat{\eta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+\left(\eta_0+\hat{\eta}\right)^2}}\right|_{\hat{\eta}=0} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta_0^2}}; \\
\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(\hat{\eta})}{\mathrm{d}\hat{\eta}^2}\right|_{\hat{\eta}=0} &= \left.\frac{D^2}{4\sqrt{\frac{D^2}{4}+\left(\eta_0+\hat{\eta}\right)^2}^{\,3}}\right|_{\hat{\eta}=0} = \frac{D^2}{4\sqrt{\frac{D^2}{4}+\eta_0^2}^{\,3}}.
\end{aligned}$$

Dostávame teda

$$\begin{aligned} f(\hat\eta) &\approx f(\hat\eta)\big|_{\hat\eta=0} + \left.\frac{\mathrm{d}f(\hat\eta)}{\mathrm{d}\hat\eta}\right|_{\hat\eta=0} \cdot \hat\eta + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(\hat\eta)}{\mathrm{d}\hat\eta^2}\right|_{\hat\eta=0} \cdot \hat\eta^2 = \\ &= \sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} + \frac{\eta_0}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}}\hat\eta + \frac{D^2}{8\sqrt{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2}^{3}}\hat\eta^2 = \\ &= \frac{MD}{\sqrt{4M^2 - m^2}} + \frac{m}{2M}\hat\eta + \frac{D^2}{8}\frac{\sqrt{4M^2 - m^2}^{3}}{M^3 D^3}\hat\eta^2 = \\ &= \frac{D}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}} + \frac{m}{2M}\hat\eta + \frac{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^{3}}{8D}\hat\eta^2. \end{aligned}$$

Následne

$$\begin{aligned} U &\approx 2Mg\left(\frac{D}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}} + \frac{m}{2M}\hat\eta + \frac{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^{3}}{8D}\hat\eta^2 - \frac{L}{2}\right) - mg\left(\frac{mD}{2\sqrt{4M^2 - m^2}} + \hat\eta\right) = \\ &= \frac{gD}{\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}}\left(2M - \frac{m^2}{2M}\right) - MgL + \frac{Mg}{4D}\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^{3}\hat\eta^2 = \\ &= \frac{1}{2}MgD\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2} - MgL + \frac{Mg}{4D}\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^{3}\hat\eta^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz pre potenciálnu energiu obsahuje iba absolútny člen, ktorý len posúva potenciálne hladiny o konštantnú hodnotu, takže pohyb nijako neovplyvňuje a kvadratický člen, ktorý zodpovedá harmonickému kmitaniu. Využijúc analógiu s potenciálnou energiou pružinky $E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ môžeme hovoriť o efektívnej „tuhosti" systému

$$k = \frac{Mg}{2D}\sqrt{4 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}^{3}.$$

Teraz sa pozrime na kinetickú energiu. Tá má tvar $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\mu u^2$, takže možno hovoriť o efektívnej hmotnosti systému v rovnovážnej polohe

$$\mu = \frac{2M\eta_0^2}{\frac{D^2}{4} + \eta_0^2} + m = 2M\left(\frac{m}{2M}\right)^2 + m = m\left(\frac{m}{2M} + 1\right).$$

Pre uhlovú frekvenciu oscilátora s tuhosťou k a efektívnou hmotnosťou μ platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

a po dosadení príslušných výrazov pre k a μ a po siahodlhých nevábnych úpravách dostaneme

$$\omega = \sqrt[4]{(2M)^2 - m^2}\sqrt{\frac{2}{m} - \frac{1}{M}}\sqrt{\frac{g}{D}}.$$

Využijúc $\frac{2M}{m} = \frac{41}{9}$ sa tento výraz zjednoduší na

$$\omega = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{10}{41}}\sqrt{\frac{g}{D}}.$$

Potom perióda

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3\pi}{8}\sqrt{\frac{41}{10}}\sqrt{\frac{D}{g}}$$

a pre $D = 25$ m dostávame

$$T = \frac{3\sqrt{41}}{16}\pi \text{ s}.$$

Výsledky

1 147 s

2 225

3 6

4 $\sqrt{2}m$

5 $4R$

6 6 cm

7 60 kg

8 10 cm

9 $\cot 42° \cdot \cos 45° \cdot 10\ \mathrm{m}^2 \doteq 7{,}85\ \mathrm{m}^2$

10 *Dvojprvková množina* $\{54\ \mathrm{km/h}, 150\ \mathrm{km/h}\}$

11 $\dfrac{4\pi R^{3/2}}{3\sqrt{Gm}}$

12 $\sqrt{v^2 + 2gH}$

13 60°

14 $\arcsin \dfrac{1}{4} \doteq 14{,}48°$

15 50 h

16 $\dfrac{24\pi}{3\pi + 8} r\rho \doteq 4{,}327 r\rho$

17 13

18 *Uznajte ľubovoľnú z odpovedí* 03:14:54, 08:45:06, 15:14:54, 20:45:06.

19 $\left(1 - 4 \cdot 3^{-13/4}\right) \rho_v \doteq 887\ \mathrm{kg/m^3}$

20 $\sqrt{2\mu g L \left(\frac{m+M}{M}\right)}$

21 3

22 $90°/k, k \in \mathbb{N}$

23 *Akceptujte riešenia v intervale* 2,42 – 2,48 s.

24 $\dfrac{42\pi^2 + 60\pi}{24 + 28\pi + 7\pi^2} r\rho \doteq 3{,}3306 r\rho$

25 25 mm

26 0 N, nemusí pôsobiť žiadnou silou.

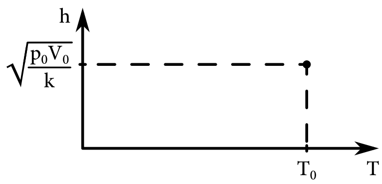
27 $\dfrac{3v^2}{4g} + r\,(1 - \cos\alpha)$

28 σa^4

29 16

30 $4\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$ sr, *alebo* $\left(2 - \sqrt{2}\right)$ priestoru.

31 *Riešením je jediný bod.*



32 $I_0 \left(\cos\frac{\pi}{20}\right)^{20} = I_0 \left(\cos 9°\right)^{20} \doteq 0{,}78\, I_0$

33 $\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\dfrac{5}{2}p_0 V_0 + E\right)\left[1 - \left(\dfrac{V_0}{LS}\right)^{2/5}\right]}$

34 Ninkin, n^2-krát

35 2,44 m

36 278,785 K $\doteq$ 6,635 °C. *Uznajte hodnoty líšiace sa o menej ako 0,5 K.*

37 11

38 $I_0 \cdot 0{,}9^5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^{10} = I_0 \cdot 0{,}9^5 \cdot \left(\cos 18°\right)^{10} \doteq 0{,}36\, I_0$

39 $1{,}31 \times 10^{-7}$ C

40 $\dfrac{3\sqrt{41}}{16}\pi$ s