Milí čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 21. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s ktorými ste sa v roku 2018 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste danému vzorovému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Fyzikálny Náboj pokračuje vo svojej medzinárodnej tradícii. V roku 2018 sa do Náboja zapojili okrem Bratislavy takisto mestá Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Moskva. Výsledky vzájomného súboja si môžete pozrieť na našich stránkach.

Táto zbierka by nikdy nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa koniec koncov podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Sme študentmi Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a väčšina z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

*FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom zimného a letného polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke* `https://fks.sk/`.

Za finančnú pomoc ďakujeme firmám ESET a PosAm a za medzinárodnú spoluprácu lokálnym organizátorom: Róbert Hajduk (za Košice), Daniel Dupkala (za Prahu), Lenka Plachtová (za Ostravu), Ágnes Kis-Tóth (za Budapešť), Kamil Żmudziński (za Gdańsk) a Patrik Lamoš (za Moskvu). V mene celého organizačného tímu veríme, že ste si v roku 2018 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že vás všetkých uvidíme aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov (v prípade, že už budete vysokoškolákmi).

*Jaroslav Valovčan*

*Hlavný organizátor*

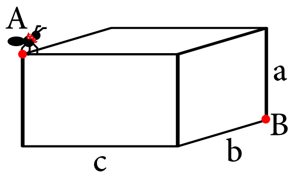
**Zbierku zostavili:**


| | |
|---|---|
| Matej Badin | matob@fks.sk |
| Martin Baláž | kvik@fks.sk |
| Katarína Dančejová | katkad@fks.sk |
| Matúš Jenča | matus.jenca@fks.sk |
| Dušan Kavický | dusan@fks.sk |
| Simon Mičky | simon@fks.sk |
| Justína Nováková | plys@fks.sk |
| Kristián Šalata | kiko@fks.sk |
| Adam Škrlec | adam@fks.sk |
| Jaroslav Valovčan | jaro@fks.sk |
| Mária Zelenayová | majka.zelenayova@fks.sk |


Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke https://physics.naboj.org/.

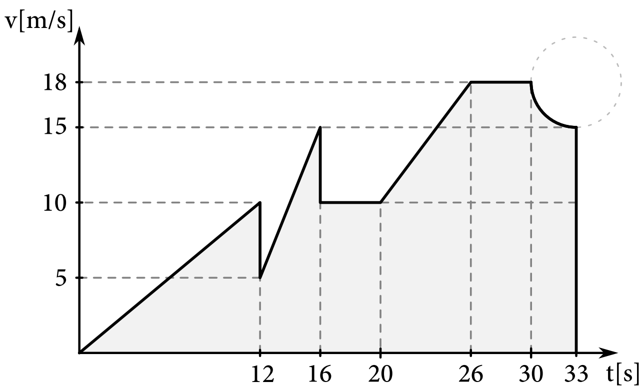
# Zadania

**1** Mravec, mravec, ide sa na vec! Mravec Kiko sedí na rohu kvádra s rozmermi $a \times b \times c$, pričom $a < b < c$. Rád by sa dostal z bodu $A$ do bodu $B$ čo najrýchlejšie! Rýchlosť jeho pohybu je $v$. Ako dlho mu to bude trvať?




**2** Andrej sa učí jazdiť na jednokolke. Na grafe vidíme, akou rýchlosťou sa pohyboval počas jednej svojej jazdy. Vypočítajte jeho priemernú rýchlosť v m/s.

*Výsledok odovzdajte s presnosťou na aspoň dve desatinné miesta.*




**3** Michal a Martin sa vybrali stopom do Krakova. Michal sa postavil na miesto, kde v želanom smere autá prechádzajú s frekvenciou 50 áut za minútu. Martin sa postavil na miesto s frekvenciou 25 áut za minútu. Z Michalovho miesta bude cesta do Krakova trvať 100 minút, z Martinovho 90 minút. Kto príde do Krakova štatisticky skôr a o koľko, ak zo skúsenosti vedia, že stopárovi zastaví každé dvesté auto?

**4** Babička Justína v lavóri objavila neurčitý alkoholický nápoj. Zistila, že je v ňom 40 objemových percent alkoholu a zvyšok tvorí prakticky samá voda. Koľko je to hmotnostných percent, ak hustota etanolu je 790 kg/m$^3$?

*Výsledok odovzdávajte s presnosťou na desatiny hmotnostných percent.*

**5** Jano ide autom z Liptovského Mikuláša do Liptovského Hrádku. Z pokoja rovnomerne zrýchľuje na maximálnu povolenú rýchlosť, tú chvíľu udržuje a nakoniec rovnomerne brzdí až do zastavenia. Zrýchľovanie a spomaľovanie mu trvalo dohromady čas $t_1$. Naspäť sa ponáhľa, no nesmie prekročiť maximálnu povolenú rýchlosť, takže jediné, čo mu ostáva, je zrýchľovať a brzdiť prudšie. Zrýchľovanie a spomaľovanie cestou späť mu trvalo spolu iba čas $t_2 < t_1$. O koľko menej mu trvala cesta späť, ako cesta tam?

**6** Záhradný postrekovač strieka vodu hustoty $\rho$ z dýzy s polomerom $r$ rýchlosťou $v$ zvislo nahor. Aká je hmotnosť vody, ktorá sa v ľubovoľnom okamihu nachádza vo vzduchu?

**7** Jaro sa ošíva. A nedúfa. Naberie však odvahu a podíde k pultu.

„Máte duté tehly?“

Na jeho obrovskú radosť predavač nezavolá bezpečnostnú službu ako obvykle, ale odpovie s nadšeným úsmevom:

„Samozrejme! Akú veľkú si prosíte?“

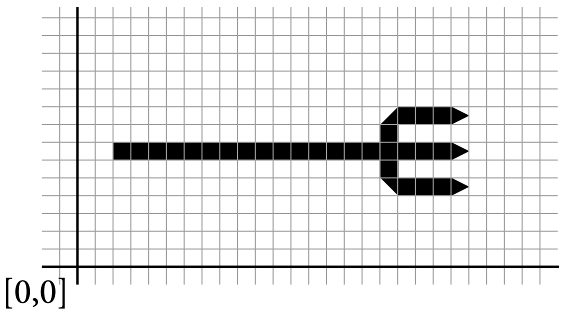
Jaro má teraz na výber z dokonale dutých (t. j. úplne prázdnych) tehál s dĺžkami strán $k$, $2k$ a $4k$. Plošná hustota materiálu, z ktorého sú vyrobené, je 0,04 kg/m$^2$. Jaro však chce, aby jeho prvá dutá tehla bola niečím výnimočná. Napríklad tým, že sa bude vo vzduchu s hustotou 1,3 kg/m$^3$ voľne vznášať. Aký bude parameter $k$ tehly, ktorá mu jeho želanie splní?

*Výsledok odovzdajte s presnosťou na centimetre.*

**8** Arthur si počas horúceho letného dňa nalial svoj obľúbený perlivý nápoj. Na hladine sa vytvorila vrstva peny. Vrch peny klesá rýchlosťou $u$ a hladina stúpa rýchlosťou $v$. Aký objemový podiel peny tvorí vzduch?

**9** Od budúceho roka by sa Náboj mohol uskutočniť aj v oceánoch. Lenže bez vhodného žezla tam nikto nebude organizátorov brať vážne. Nájdite súradnice ťažiska trojzubca, ak je štvorčeková sieť tvorená štvorčekmi rozmeru $a \times a$.

*Odovzdajte výsledok v tvare zlomku.*




**10** Vo veži v Minas Tirith sa vo výške 3 m odtrhol výťah. V kabíne výťahu stojí úbohý hobit. Keďže je fyzikálne podkutý, vie, že ak tesne pred dopadom vyskočí, náraz sa trochu zmierni. Keď je hobit na zemi, dokáže vyskočiť do výšky 0,7 m.

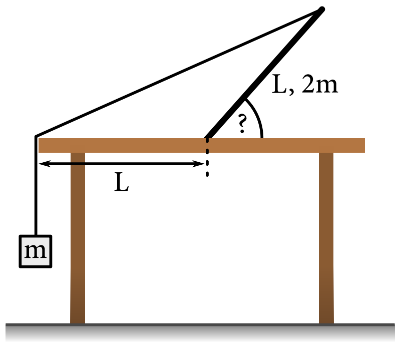
Z akej výšky by musel spadnúť mimo výťahu, aby bola rýchlosť jeho dopadu rovnaká ako po výskoku vo výťahu? Hobit vyskočí v najneskoršom možnom okamihu a jeho hmotnosť je zanedbateľná oproti hmotnosti kabíny výťahu.

*Výsledok odovzdávajte s presnosťou na centimetre.*

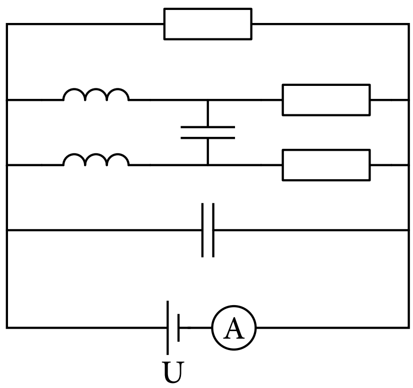
**11** Špagetka sa sčista-jasna ocitla ponorená vo veľkom jazere. Avšak skôr, než si túto situáciu stihla náležite užiť, ju prírodné sily opäť vymrštili nahor. Špagetka má hustotu 200 kg/m$^3$ a pri ľahkej nelichotivosti ju možno považovať za valec s polomerom podstavy 0,3 m a výškou 1,8 m. Ako najvyššie nad hladinu sa dostala jej vrchná podstava, ak sa na začiatku vznášala tesne pod hladinou?

*Predpokladajte, že Špagetka bola počas celého pohybu vo vertikálnej polohe. Efekty prúdenia vody a povrchové napätie neuvažujte.*

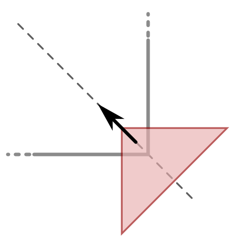
**12** Tyč dĺžky $L$ s hmotnosťou $2m$ je pripevnená jedným koncom na stôl tak, že sa môže voľne otáčať okolo vodorovnej osi. Na jej voľnom konci je priviazané nehmotné lano, ktoré bez trenia visí cez okraj stola. Oň je priviazané závažie s hmotnosťou $m$. Vzdialenosť konca tyče od hrany stola je takisto $L$. Aký uhol musí zvierať tyč so stolom, aby bola v labilnej rovnovážnej polohe?




**13** Elektrikár Fero vo svojej zásuvke s haraburdami našiel zopár dokonalých súčiastok (rezistory s odporom $R$, kondenzátory s kapacitou $C$, cievky s indukčnosťou $L$, dokonalé ampérmetre a vodiče) a postavil si z nich obvod. Potom ho pripojil na zdroj jednosmerného napätia $U$. Aký prúd ukazuje ampérmeter?




**14** Matúš sa pred grilovačkou rozhodol zastrešiť svoj záhradný altánok. K dispozícii má dosku tvaru pravouhlého rovnoramenného trojuholníka, ktorú chce položiť na dve kolmé steny altánku. Začal ju vysúvať pozdĺž uhlopriečky smerom od rohu, ako je nakreslené na obrázku, až dosiahol maximálnu možnú vzdialenosť, za ktorou by sa už strecha prevážila. Aká časť strechy teraz zakrýva vnútro altánku?



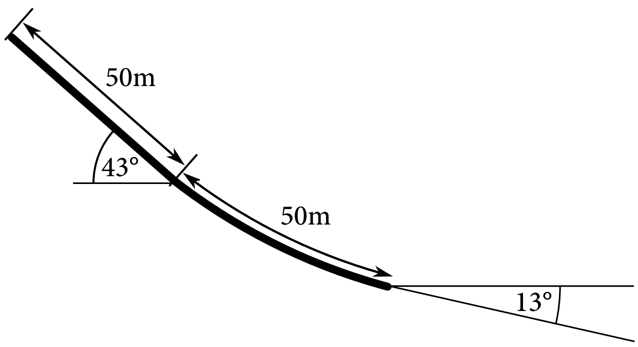
**15** Cestovateľ Jožko sa stratil v púšti a jediné, čo so sebou má, je sklenený hranol so štvorcovou podstavou dlhou 10 cm, výškou 20 cm a indexom lomu 1,5. Jeho horná podstava je z neznámych dôvodov natretá na čierno. Po pár dňoch si všimol, že tieň podstavy je obvykle podstatne menší, ako samotná podstava. Ako najvyššie môže byť Slnko na oblohe, aby podstava nevrhala na zem žiaden tieň?

**16** Teplota na dne mora hlbokého 1 km je 4 °C. Rybička Dory pomaly pláva v tejto hĺbke. Premýšľajúc nad zmyslom života vypustí bublinu s polomerom 2 cm, ktorá začne stúpať na povrch. Aký bude polomer bubliny tesne pod hladinou, ak teplota vody na povrchu je 18 °C? Uvažujte, že voda je nestlačiteľná a príspevok kapilárneho tlaku k celkovému tlaku v bubline je zanedbateľný. Ďalej predpokladajte, že vzduch v bubline sa okamžite zahrieva na teplotu okolitej vody.

*Výsledok odovzdajte s presnosťou na milimetre.*

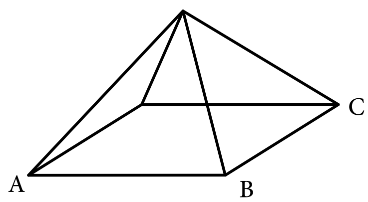
**17** Filip sa dal na adrenalínové športy. Minulú zimu sa rozhodol, že vyskúša skoky na lyžiach. Vybral sa k mostíku, ktorý je zobrazený na obrázku. Ten začína naklonenou rovinou dlhou 50 m so sklonom 43°, ktorá plynulo prechádza do kružnicového oblúka dlhého 50 m a v závere zviera uhol 13° s vodorovným smerom. Aké maximálne preťaženie pôsobí na Filipa počas rozbehu na mostíku?

*Preťaženie je definované ako zrýchlenie telesa oproti voľnému pádu.*




**18** Adam rád skáče bungee-jumping. S prázdnym žalúdkom má hmotnosť $M$ a po zoskoku kmitá s periódou $T$. Koľko palaciniek hmotnosti $m$ musí zjesť, aby sa perióda jeho pohybu predĺžila o polovicu?

**19** Katka bola tento rok na dovolenke v Egypte. Po návrate domov si z ôsmich rovnakých drôtov s dĺžkovým odporom $\xi$ a dĺžkou $L$ zospájkovala takúto odpornú pyramídu. Aký je pomer odporov medzi dvojicami bodov $A$–$B$ a $A$–$C$?

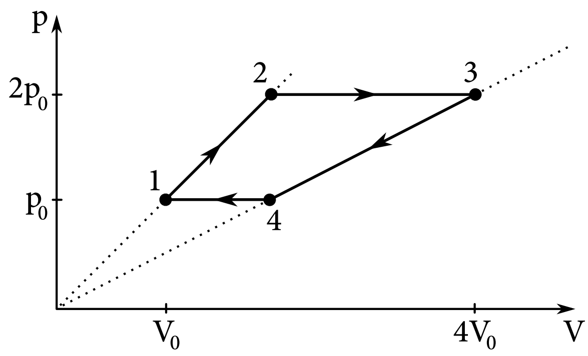



**20** Kvík minule opäť očumoval vzdialené galaxie. Keďže výhľad zo Slovenska sa mu už zunoval, vybral sa do exotickejších krajín. Ako tak leží priamo na rovníku, zrazu zbadá nad západným horizontom satelit, ktorý to mal namierené priamo na východ presne ponad neho. Prelet satelitu od západného po východný horizont trval presne 8 minút.

Ako vysoko nad Zemou prelietal satelit? Predpokladajte, že sa pohyboval po kružnicovej trajektórii. Nezabúdajte na rotáciu Zeme!

*Táto úloha nemá analytické riešenie. Budú akceptované výsledky, ktoré sa od presného riešenia o menej než 1 km.*

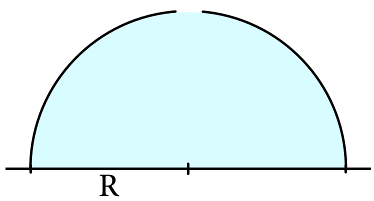
**21** S ideálnym plynom s počiatočným tlakom $p_0$, objemom $V_0$ a teplotou $T_0$ sa uskutočnil kruhový dej zobrazený v $pV$–diagrame. Prekreslite tento dej do $VT$–diagramu. Množstvo pracovného plynu sa počas deja nemenilo. Nezabudnite na osiach vyznačiť všetky podstatné hodnoty.



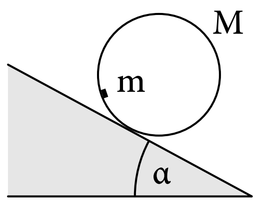

**22** V nekonečnom doskovom kondenzátore so vzdialenosťou dosiek 1 m a intenzitou elektrického poľa 1 μV/m je na spodnej elektróde umiestnený izotropný zdroj elektrónov. Elektróny z neho vylietajú rýchlosťou 1 km/s na všetky strany. Na akú plochu dosiek kondenzátorov dopadajú?

*Výsledok uveďte s presnosťou na* $m^2$.

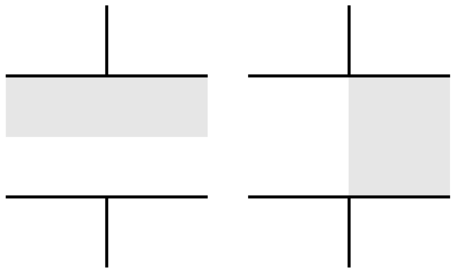

**23** Čajka už viac variť nebude! Dutú nádobu tvaru polgule s polomerom $R$ otočila hore dnom a vyvŕtala do nej dieru. Následne začala do diery nalievať vodu s hustotou $\rho$. Skôr, než by sa nádoba naplnila, voda nádobu nadvihla a pretiekla popod jej steny. Aká najväčšia mohla byť hmotnosť nádoby, aby táto situácia mohla nastať?




**24** V dutom sude hmotnosti $M$ máme voľne položený syr v tvare kvádra s hmotnosťou $m$. Koeficient trenia medzi sudom a syrom je $\mu$. Sud so syrom položíme na strmý kopec. Aký môže byť jeho maximálny sklon $\alpha$, aby sme naň sud dokázali postaviť bez toho, aby sa skotúľal? Trenie medzi sudom a svahom kopca je dostatočne veľké na to, aby sa sud nešmýkal.



**25** Do doskového kondenzátora sme umiestnili dielektrikum s relatívnou permitivitou $\varepsilon$ dvomi rôznymi spôsobmi. Najprv sme vyplnili jeho vrchnú polovicu a potom pravú polovicu. Aký je pomer kapacít v prvom a druhom prípade?

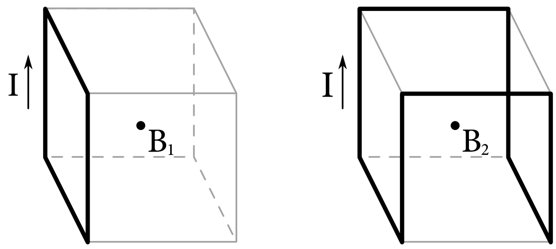


**26** Kvík, Nina a Jaro sú v Poľsku na vrchole Tarnice. V úsilí donútiť Jara byť aspoň chvíľu ticho a počúvať, navrhol Kvík hru na anemometer. Rozostavia sa do troch vrcholov štvorca so stranou 90 m tak, že Kvíka a Ninu spája jeho uhlopriečka. Postupne obaja začnú kričať, pričom Jaro počúva a zaznačí si čas, za ktorý zvukový prejav Kvíka (255 ms) a Niny (285 ms) dorazí k nemu.

Kvík to ale nedomyslel: v rámci zabezpečenia funkčnosti anemometra teraz musia aj s Ninou počúvať Jara, pričom ku Kvíkovi zvuk došiel za 304 ms a k Nine za 272 ms. Aká je rýchlosť vetra na Tarnici? Rýchlosť zvuku v poľskom vzduchu našim trom gráciám nie je známa.

*Výsledok uvádzajte s presnosťou na desatiny* m/s.

**27** Odporové siete z kociek už nikoho nebavia. Namiesto toho sa Dušan rozhodol merať veľkosť magnetických polí. Keď prúd obiehal okolo jednej strany kocky, Dušan v jej strede nameral intenzitu $B_1$. Rozhodol sa vám však poriadne zavariť a vyformoval vodič do nového tvaru. Koľkokrát väčšia bude intenzita magnetického poľa uprostred kocky oproti prvému prípadu?

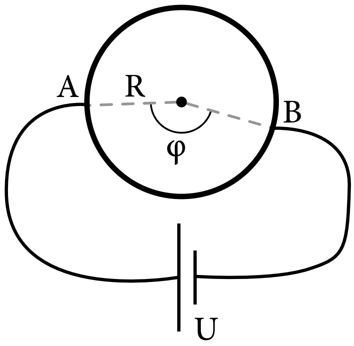



**28** Jimi sa pohybuje po šikmej ploche. Raz si kúpil mlieko v škatuli tvaru kvádra so štvorcovou podstavou s hranou dĺžky 1 dm a výškou 3 dm. Jimi teraz chce zo škatule odpiť a potom ju postaviť na naklonenú rovinu so sklonom 30° tak, že hrana podstavy je rovnobežná s vrstevnicou. Koľko najviac mlieka v nej môže nechať, aby stabilne stála?

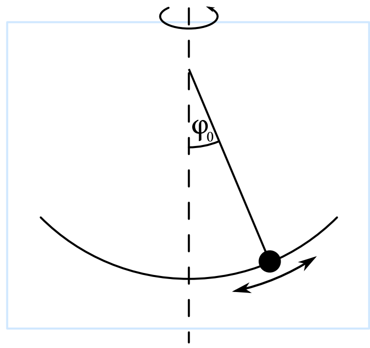
**29** Planéta obieha okolo svojej hviezdy po kruhovej dráhe. Pokojné vesmírne okolie však už nie je čo bývalo: všade preletujú otravné asteroidy, dohárajúca hviezda svieti čoraz silnejšie a blízka civilizácia vypúšťa čoraz viac navigačných satelitov a škriekajúcich elektromobilov. Nuž nečudo, že to planéta nevydrží s nervami a od samej zlosti sa roztrhne na dva kusy.

Oba kusy sa stále hýbu v pôvodnej rovine obehu, ale už po parabolických dráhach, ktorých príslnia zodpovedajú polohe planéty v okamihu explózie. Aký je pomer hmotností ľahšej a ťažšej časti?

**30** Sméagol sa v rámci krátenia času vo svojom podzemnom jazierku zabával s elektronickými súčiastkami. Vzal svoj obľúbený prsteň s polomerom $R$, dĺžkovým odporom $\lambda$ a pripojil naň zdroj jednosmerného napätia $U$ tak, že spojnice kontaktov drôtov na prsteni s jeho stredom zvierali uhol $\varphi$. Následne zmeral magnetickú indukciu v jeho strede. Čo nameral?




**31** Vladko sa minule zabával s matematickým kyvadlom. Najprv ho umiestnil medzi dve rovnobežné platne, aby obmedzil jeho pohyb na rovinný. Potom ho roztočil spolu s platňami okolo vertikálnej osi konštantnou uhlovou rýchlosťou. Kyvadlo sa ustálilo v rovnovážnej polohe odchýlené o uhol $\varphi_0 \gg 0$ od vertikálneho smeru. Potom doň slabo ťukol, následkom čoho sa kyvadlo zo svojej rovnovážnej polohy vychýlilo a začalo okolo nej kmitať. Nájdite pomer periódy obehu kyvadla okolo vertikálnej osi k perióde týchto malých kmitov.




**32** Plackozem má tvar nekonečnej rovnej platne, nad ktorou sa vo výške $h = 500$ km vznáša guľaté Slnko s polomerom $R_\odot = 10$ km a teplotou $T_\odot = 5777$ K. Kdesi pod Slnkom sa vytvorila obývateľná zóna, čiže plocha, kde sa rovnovážna teplota pohybuje v rozpätí 0 °C až 30 °C. Aká je jej rozloha?

*Slnko aj Plackozem vyžarujú ako dokonale čierne telesá. Plackozem veľmi zle vedie teplo a vyžaruje iba do polpriestoru nad ňou. Uhlový rozmer Slnka pri pohľade z Plackozeme zanedbajte. Uznané budú riešenia, ktoré sa od správnej hodnoty nelíšia o viac ako* 10 000 km$^2$.

**33** Astronaut stojí na neveľkom guľatom asteroide s hmotnosťou $M$ a polomerom $R$. Povrch asteroidu však nie je práve bohatý na vzrušujúce udalosti. A keďže cez skafander si ani nechty obhrýzať nemôže, po chvíľke začne od samej nudy poskakovať.

Určitou rýchlosťou vyskočí pod uhlom 45° voči povrchu a vznesie sa do priestoru. Po chvíli pristane vo vzdialenosti štvrtiny obvodu asteroidu. Ako dlho potrvá jeho let?

*Uvažujte, že hmotnosť asteroidu je omnoho väčšia ako hmotnosť astronauta.*

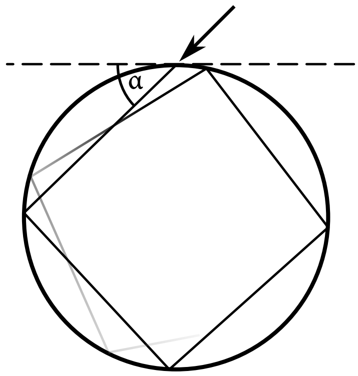
**34** Z Kvíka sa vykľul cestný pirát. Darmo mu Jaro kričal "stoj, stoj, červená!", on si to veselo túroval ďalej. Až keď prešiel cez križovatku, začal hútať, ako by sa vyhovoril, keby ho zastavili policajti. Ako rýchlo by musel vchádzať do križovatky, aby videl červené svetlo ako zelené? Vlnová dĺžka zeleného svetla je 550 nm a červeného svetla 660 nm.

*Výsledok odovzdávajte ako zlomok rýchlosti svetla.*

**35** Rosnička Katka a ropušiak Vladko visia na lane prevesenom cez kladku, pričom sú od nej obaja vzdialení $H$. Vladko je dvakrát ťažší ako Katka. Aby sa sústava nehýbala, na Katkinej strane sme k lanu pripevnili závažie s rovnakou hmotnosťou. Keď Vladko ani po štvrtom upozornení neprestáva kvákať, Katka sa začne šplhať nahor konštantnou rýchlosťou vzhľadom na lano.

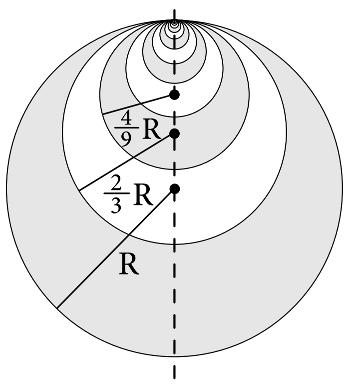
Ktorá žaba sa dostane ku kladke skôr a ako ďaleko vtedy od nej bude druhá žaba?

**36** Rapper Sajmon si za svoje ťažko zarobené peniaze kúpil luxusný kabriolet s dokonale lesklými pochrómovanými kolesami s polomerom $R$. Keď dovnútra kolesa zasvieti laserom v rovine kolmej na jeho os, lúč sa odráža od stien prakticky nekonečne dlho. Aká veľká **ťahová** sila napína obruč kolesa, ak výkon Sajmonovho lasera je $P$ a svieti ním po dobu $t$ pod uhlom $\alpha$?

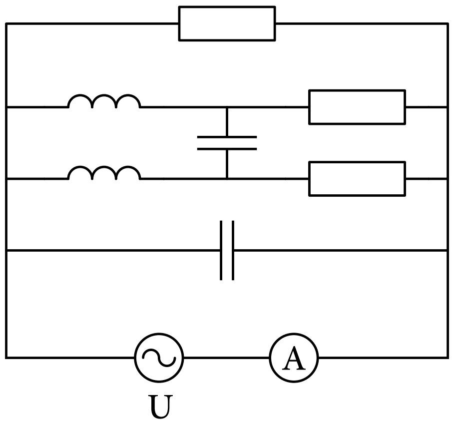



**37** Samko si v obchode kúpil veľkú cibuľu. Zabudol ju však na balkóne a časť vnútra mu zoschla. Cibuľa teraz vyzerá ako guľa s polomerom $R$, v ktorej je prázdna guľa s polomerom $\frac{2}{3}R$. V tejto dutine je opäť plná guľa s polomerom $\left(\frac{2}{3}\right)^2 R$, v ktorej je dutina s polomerom $\left(\frac{2}{3}\right)^3 R$. V tejto dutine je opäť plná guľa, a tak ďalej…

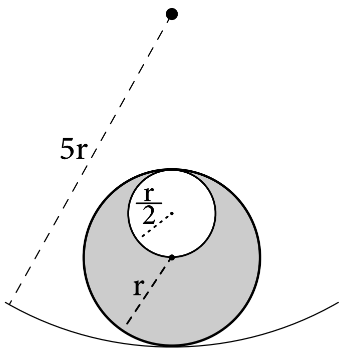
Aký je moment zotrvačnosti zhnitej cibule okolo osi symetrie zobrazenej na obrázku, ak jej hmotnosť je $M$?



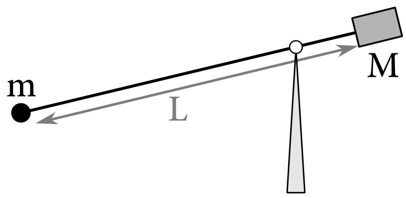
**38** Elektrikár Fero opäť vzal svoj starý známy obvod (rezistory s odporom $R$, kondenzátory s kapacitou $C$, cievky s indukčnosťou $L$, dokonalé ampérmetre a vodiče). Tentokrát ho zapojil na zdroj striedavého napätia s amplitúdou $U$ a uhlovou frekvenciou $\omega$. Akú amplitúdu prúdu ukazuje ampérmeter?




**39** Pohonič Jonáš zapadol so svojím vozom v jame s polomerom $5r$. Ako sa ho pokúšal vytiahnuť, odtrhol jedno z kolies s polomerom $r$ a navyše doň vyrazil okrúhlu dieru s polomerom $r/2$ ako na obrázku. Zaujalo ho, že odtrhnuté koleso pri prevaľovaní po dne jamy vykonáva kmitavý pohyb. Aká je perióda malých kmitov rozbitého kolesa?




**40** Helboj chce dobývať stredoveké hrady. Z poslednej návštevy v nemenovanom švédskom obchode si priniesol TREBÖCHET – nehmotnú tyč dĺžky $L$, závažie hmotnosti $M$, projektil s hmotnosťou $m$ a kĺb, okolo ktorého sa má tyč otáčať. V návode však zabudli spomenúť, kam treba kĺb umiestniť. Ako ďaleko od protizávažia ho má pripevniť, aby bolo obvodové zrýchlenie projektilu po uvoľnení protizávažia maximálne?



# Vzorové riešenia

**1** Dostať sa na protiľahlý roh najkratšou cestou nie je pre mravca vôbec žiaden problém! Stačí si rozložiť povrch kvádra na sieť a nájsť spojnicu bodov $A$ a $B$. Spôsobov je však viac a každý vedie k inému výsledku, takže musíme nájsť najlepší.

Dĺžky spojníc na sieti sú podľa Pytagorovej vety

$$s_1 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}, \quad s_2 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \quad \text{a} \quad s_3 = \sqrt{(c+a)^2 + b^2}.$$

Podľa zadania však platí $a < b < c$. Najkratšia z dráh je tá, ktorá zodpovedá uhlopriečke obdĺžnika najviac podobného štvorcu. V našom prípade to je $s_1$ a pre výsledný čas mravca potom platí

$$t = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}.$$

**2** Priemerná rýchlosť sa počíta ako pomer celkovej dráhy k celkovému času. Celkový čas rovno odčítame z grafu a celkovú dráhu vieme vypočítať ako obsah plochy pod krivkou, čo je:

$$s = \frac{12 \cdot 10}{2} + \frac{(15-5)\cdot 4}{2} + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + \frac{(18-10)\cdot 6}{2} + 10 \cdot 6 + 18 \cdot 4 + \left(3^2 - \frac{\pi 3^2}{4}\right) + 15 \cdot 3 \doteq 342{,}931.$$

Po dosadení dostávame

$$v = \frac{s}{t} = \frac{342{,}931\ \mathrm{m}}{33\ \mathrm{s}} \doteq 10{,}39\ \mathrm{m/s}.$$

**3** Tento príklad si vyžaduje zistiť, za aký čas chlapcom v priemere zastaví auto, a potom už len stačí pripočítať čas ich jazdy do Krakova. Vieme, že v priemere zastaví každé dvesté auto, takže priemerný čas zastavenia vypočítame ako $\frac{200}{k}$, ak okolo chlapcov prechádzajú autá s frekvenciou $k$.

Takto jednoducho dostávame výsledok: Michal príde do Krakova v priemere za $\frac{200}{50} + 100 = 104$ minút a Martin za $\frac{200}{25} + 90 = 98$ minút. Odpoveďou je teda, že Martin príde do Krakova o šesť minút skôr.

**4** Najprv si musíme uvedomiť, čo je to objemové percento. V našom prípade je to pomer objemu etanolu a celého objemu nápoja, ktorý babička našla. Objemové percento sa dá previesť na hmotnostné percento (inak povedané hmotnostný zlomok), keď poznáme hustotu etanolu a hustotu nápoja. Hmotnostné percento si označíme $\varrho$:

$$\frac{V_{\mathrm{et}}\rho_{\mathrm{et}}}{V_{\text{nápoj}}\rho_{\text{nápoj}}} = \frac{m_{\mathrm{et}}}{m_{\text{nápoj}}} = \varrho.$$

Zo zadania vieme hustotu etanolu, hustotu nápoja dopočítame. Nápoj, ktorý babička "objavila", je zložený z vody a alkoholu. Máme hmotnostné percento etanolu, zvyšok je voda:

$$\rho_{\text{nápoj}} = 0{,}4\rho_{\text{etanol}} + 0{,}6\rho_{\text{voda}},$$

$$\rho_{\text{nápoj}} = 0{,}4 \cdot 790\ \mathrm{kg/m^3} + 0{,}6 \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^3},$$

$$\rho_{\text{nápoj}} \doteq 916\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Toto dosadíme do výrazu pre hmotnostné percento:

$$\varrho = \frac{V_{\text{et}}\rho_{\text{et}}}{V_{\text{nápoj}}\rho_{\text{nápoj}}} = 0{,}4\frac{\rho_{\text{et}}}{\rho_{\text{nápoj}}},$$

$$\varrho = 0{,}4 \times \frac{790\ \text{kg/m}^3}{916\ \text{kg/m}^3},$$

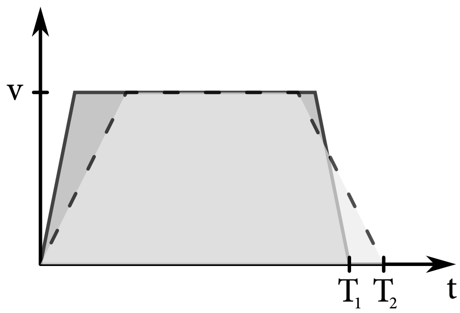
$$\varrho \doteq 0{,}345 = 34{,}5\ \%.$$

Nápoj teda obsahuje zhruba 34,5 hmotnostných percent alkoholu.

**5** Ako pri všetkých podobných úlohách, základom je nakresliť si graf a spočítať dráhu ako plochu pod ním. Zo zadania vyplýva, že graf bude mať tvar lichobežníka. Spomenieme si na vzorec na obsah lichobežníka:

$$s = \frac{v\,(a+c)}{2},$$

kde $a$ a $c$ sú základne lichobežníka a $v$ je jeho výška.




Obrázok 1: *Priebeh rýchlosti*

Keďže cesta tam aj cesta naspäť sú rovnako dlhé, aj plochy pod grafom sa v oboch prípadoch musia rovnať:

$$\frac{(2T_1 - t_1)\,v}{2} = \frac{(2T_2 - t_2)\,v}{2},$$

kde $T_1$ je celkový čas cesty tam, $T_2$ je čas cesty späť a $v$ je maximálna rýchlosť. Z tejto rovnice už vieme vyjadriť rozdiel časov

$$T_1 - T_2 = \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

**6** Vieme, že voda z postrekovača vystrekuje rýchlosťou $v$. Každý kúsok vody si vieme predstaviť ako malé teliesko, ktoré sa pohybuje zvislo nahor rovnomerne spomaleným pohybom so spomalením $g$. Čas, ktorý pobudne voda vo vzduchu, vypočítame zo vzorca pre zvislý vrh. Kinematická rovnica pohybu vystreknutého kúsku vody je

$$0 = vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

z čoho dostávame čas pobytu vody vo vzduchu

$$t = \frac{2v}{g}.$$

Teraz stačí vypočítať množstvo vody, ktoré za tento čas pretečie dýzou. Poznáme rýchlosť, polomer aj hustotu vody, takže môžeme vyjadriť mmotnostný prietok $Q_m = \pi r^2 v \rho$. Hmotnosť vody vo vzduchu je daná súčinom prietoku a času pobytu vo vzduchu, takže

$$m = \frac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}.$$

**7** Archimedov zákon nám hovorí, že na tehlu vo vzduchu okrem tiažovej sily pôsobí aj vztlaková sila, a aby sa vo vzduchu vznášala, tieto dve sily musia mať rovnakú veľkosť, a teda

$$\rho_v V g = mg,$$

kde $\rho_v$ je hustota vzduchu. Objem tehly bude $V = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$. Hmotnosť vyrátame ako súčin povrchu tehly a plošnej hustoty $\sigma$, teda

$$m = \sigma \cdot 2\left(k \cdot 2k + k \cdot 4k + 2k \cdot 4k\right) = 28k^2\sigma.$$

Po dosadení hmotnosti a objemu do prvého vzorca dostávame

$$k = \frac{7\sigma}{2\rho_v} \doteq 10{,}77\ \mathrm{cm} \doteq 11\ \mathrm{cm}.$$

**8** Nech celá pena klesne za nejaký čas $t$. V pohári tak pribudne stĺpec nápoja vysoký $vt$ a stĺpec vzduchu vysoký $ut$, pričom peny celkovo pôvodne bolo $(u + v)\,t$. Vzduch teda tvoril $\frac{u}{u+v}$ objemu peny.

**9** Ťažisko komplikovanejšieho telesa vyrátame podľa momentovej vety nasledovne:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Začnime s $x$-ovou zložkou ťažiska. Rozdeľme si trojzubec na menšie časti, ktorých hmotnosti a ťažiská vieme jednoducho vyčítať z obrázka. Pre štvorce a obdĺžniky je to ich geometrický stred, pre trojuholníky využijeme fakt, že ťažisko trojuholníka sa nachádza v jednej tretine jeho výšky. Pre jedno z možných delení vyzerá dosadenie nasledovne:

$$X = \frac{16m \cdot 10a + 2m \cdot 17{,}5a + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{17+18+18}{3}a + 3 \cdot 3m \cdot 19{,}5a + 3 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{21+21+22}{3}a}{16m + 3m + 9m + \frac{3}{2}m} = \frac{2521}{177}a \doteq 14{,}242a.$$

S $y$-ovou súradnicou ťažiska to budeme mať jednoduchšie, stačí si všimnúť, že trojzubec je symetrický vzhľadom na svoju rukoväť. Preto $y$-ová zložka ťažiska je rovná

$$Y = \frac{13}{2}a = 6{,}5a.$$

**10** Úbohý hobit tesne pred dopadom výťahu vyskočí dúfajúc, že mu to pomôže prežiť. Má však ale skutočne pravdu? Pri výskoku zo zemského povrchu hobit vyskočí do výšky $h$, jeho svaly teda efektívne vykonali prácu $W = mgh$. Po krátkom zamyslení si možno uvedomiť, že vo výťahu sa deje to isté. Keďže hmotnosť výťahu je oveľa väčšia ako hobita, množstvo energie, ktoré hobit odovzdá výťahu bude zanedbateľne malé, rovnako ako pri výskoku zo zeme.

Výsledná rýchlosť, ktorú bude mať hobit pri dopade bude teda rovná rozdielu rýchlostí výťahu a rýchlosti pri výskoku zo Zeme. z kinematických rovníc teda vyplýva:

$$v_{\mathrm{dopad}} = v_{\mathrm{výťah}} - v_{\mathrm{skok}} = \sqrt{2gH} - \sqrt{2gh} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right),$$

kde $H$ je výška, z ktorej padá výťah a $h$ je výška, do ktorej dokáže vyskočiť hobit na zemi. Aby sme získali výšku, z ktorej by voľným pádom hobit dosiahol rovnakú rýchlosť, stačí do vzorca pre voľný pád dosadiť $v_{\mathrm{dopad}}$. Dostaneme

$$s = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)\right)^2}{2g} = \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)^2.$$

Nakoniec dosadíme hodnoty zo zadania, čiže $h = 0{,}7$ m a $H = 3$ m. Zistíme, že ak hobit vyskočí, rýchlosť jeho dopadu bude zodpovedať iba pádu z výšky 80 cm, čo mu pravdepodobne naozaj zachráni kožu.

**11** Túto úlohu vieme vyriešiť porovnaním energie sústavy na začiatku a pri dosiahnutí maximálnej výšky. Označme výšku Špagetky $h$, jej hustotu $\rho_s$ a jej objem $V$. Keď sa Špagetka vynorí, jej pôvodné miesto zaujme voda. Stanovme si nulovú hladinu energie v bode, ktorý je v hĺbke $h/2$ pod vodnou hladinou.

Valec má ťažisko vo svojom strede. Priestor, kde sa predtým Špagetka nachádzala, zaplní voda. Jej potenciálna energia pritom klesne o

$$E_v = \rho_v V g \frac{h}{2}.$$

V koncovom okamihu má nenulovú potenciálnu energiu iba Špagetka s ťažiskom v neznámej výške $x$, pre ktorú platí

$$E_s = V g x \rho_s.$$

Ich porovnaním získame výšku $x$

$$\rho_v V g \frac{h}{2} = V g x \rho_s \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h\rho_v}{2\rho_s} = 4{,}5 \text{ m}.$$

Je to výška ťažiska nad referenčnou hladinou a jej hodnota je samozrejme rovnaká, ako výška vrchnej podstavy nad vodnou hladinou.

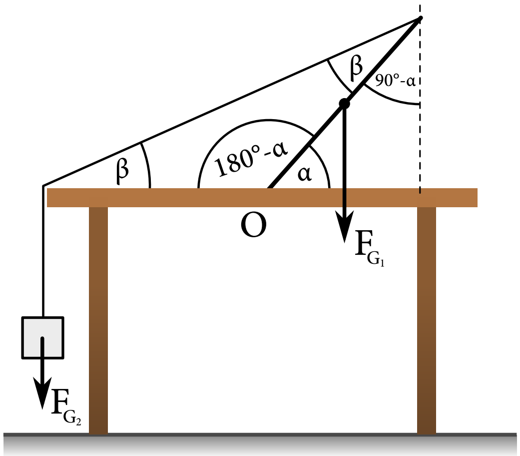
**12** Treba sa zamyslieť, kedy je sústava v rovnováhe. Jediné, čo môže paličku uviesť do pohybu, je moment sily, ktorou závažie pôsobí na paličku a moment od tiažovej sily paličky. Sústava bude v rovnováhe, keď sa tieto momenty budú rovnať. Počítajme momenty vzhľadom na bod $O$.

Rameno tiažovej sily paličky $F_{G1}$ je $\frac{L}{2}\cos\alpha$. Rameno tiažovej sily závažia $F_{G2}$ je $L\sin\beta$. Aby palička bola v rovnováhe, musí platiť

$$M_1 = M_2,$$

$$2mg\cos\alpha\frac{L}{2} = mgL\sin\beta,$$

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$




Obrázok 2: *Situácia na stole so zakreslenými silami*

Zo zadania vieme, že lano s paličkou tvoria rovnoramenný trojuholník. Z toho, že súčet uhlov v trojuholníku je 180° zistíme, že

$$2\beta + (180° - \alpha) = 180°,$$

$$2\beta = \alpha.$$

Dostávame teda rovnicu

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Buď jej riešenie vidíme okamžite, alebo si ju môžeme poctivo spočítať. Pre sínus polovičného argumentu platí $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. Po drobných úpravách vieme rovnicu upraviť do podoby

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

čo je kvadratická rovnica pre kosínus. Jej riešením je

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Nás bude zaujímať riešenie so znamienkom "+", pretože je zrejmé, že hľadaný uhol je z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$. Tomu zodpovedá uhol

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

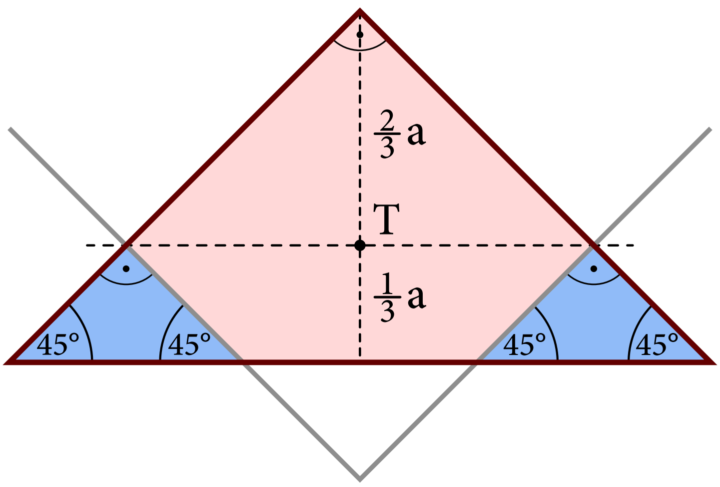
**13** Prúd, ktorý preteká ampérmetrom, zistíme pomerne jednoducho. Keďže sa nachádza v hlavnej vetve hneď vedľa zdroja, stačí nám zistiť, aký je celkový odpor zapojenia. To síce vyzerá na prvý pohľad pomerne komplikovane, no keďže je v ňom zapojený iba zdroj jednosmerného napätia, vieme ho výrazne zjednodušiť.

Kondenzátory sa v jednosmernom obvode správajú, ako keby tam neboli – prúd cez ne netečie, sú jednoducho medzerou v obvode. Naopak cievky sa správajú ako dokonalé vodiče a nekladú žiaden odpor. To znamená, že v celom Ferovom zapojení stačí uvažovať len tri paralelne zapojené rezistory s odporom $R$, zdroj a ampérmeter. Odpor celého zapojenia je triviálne $\frac{R}{3}$ a ampérmeter teda bude ukazovať hodnotu prúdu

$$I = \frac{U}{\frac{R}{3}} = 3\frac{U}{R}.$$

**14** Na strechu pôsobí tiažová sila v jej ťažisku a reakčná sila od stien. Aby strecha nespadla, súčet pôsobiacich momentov síl musí byť nulový. Osou otáčania bude spojnica bodov, ktoré ju podopierajú. V prípade maximálneho možného vysunutia strechy bude jej ťažisko na tejto spojnici.

Teraz treba vypočítať plochu, ktorú strecha zakryje. Jednoduchšie bude vypočítať plochu malých trojuholníčkov a odpočítať od plochy veľkého $S_1 = \frac{a^2}{2}$, kde $a$ označuje dĺžku odvesny. Keď sa nad tým najprv zamyslíme, vieme z podobnosti trojuholníkov určiť, že malé trojuholníčky budú tiež pravouhlé a rovnoramenné (pozri obrázok). Ďalej využijeme, že ťažnica rovnoramenného trojuholníka je zároveň jeho výškou a osou uhla oproti základni. Ťažisko sa nachádza v jednej tretine ťažnice, bližšie k príslušnej základni. To znamená, že všetky rozmery menších trojuholníkov sú tretinové.




Obrázok 3: *Maximálne vysunutá strecha*

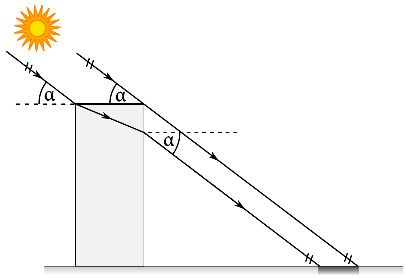
Preto obsah strechy bez trojuholníkov možno vypočítať ako

$$S = \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{7}{18}a^2.$$

Časť strechy pokrývajúca altánok je preto

$$k = \frac{\frac{7}{18}a^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{7}{9}.$$

**15** Veru, nedostatok tekutín spôsobuje všelijaké preludy. V skutočnosti takáto situácia nastať nikdy nemôže, teda až na jeden patologický prípad. Lúč, ktorý dopadá na hranol pod uhlom $\alpha$, hranol takisto pod uhlom $\alpha$ opustí. Vplyvom hranola teda tieň skutočne zmenšíme, no nikdy úplne nezmizne, ibaže by sa lúče od Slnka šírili horizontálne pod uhlom 0°. Vtedy by však zem nebola osvetlená vôbec, a teda podstava by určite nevrhala na zem žiaden tieň.




Obrázok 4: *Lúče po prechode hranolom*

**16** V bubline je vzduch, ktorý môžeme považovať za ideálny plyn. A ako všetci vieme, platí stavová rovnica ideálneho plynu

$$pV = NkT,$$

kde $p$ je tlak plynu, $V$ je jeho objem a $T$ je jeho teplota. $N$ je počet molekúl v plyne, ktorý je v našom prípade konštantný, a $k$ je Boltzmannova konštanta. Stavovú rovnicu teda vieme prepísať na tvar $\frac{pV}{T}$ = konšt. Teraz si stačí uvedomiť, aké sú tieto veličiny pre našu bublinu na dne a pod hladinou. Položíme ich do rovnosti

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Teploty $T_1$ a $T_2$ sú známe zo zadania, objem $V_1$ vieme vypočítať z polomeru bubliny ako $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. Polomer $r_2$ máme vypočítať. Preto si ho vyjadríme:

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{p_1 T_2}{T_1 p_2}}.$$

Teraz nám stačí už len vypočítať tlaky. Na prvý pohľad sa zdá, že máme len hydrostatický tlak $p = h\rho g$. To však nie je pravda, musíme započítať aj atmosférický tlak, ktorý pôsobí na hladinu mora. Pascalov zákon hovorí, že tlak stúpne o hodnotu atmosférického tlaku $p_a$ v celom objeme kvapaliny. Z toho vyplýva, že dostaneme tlaky $p_1 = h\rho g + p_a$ a $p_2 = p_a$. To už len dosadíme do stavovej rovnice a dostaneme

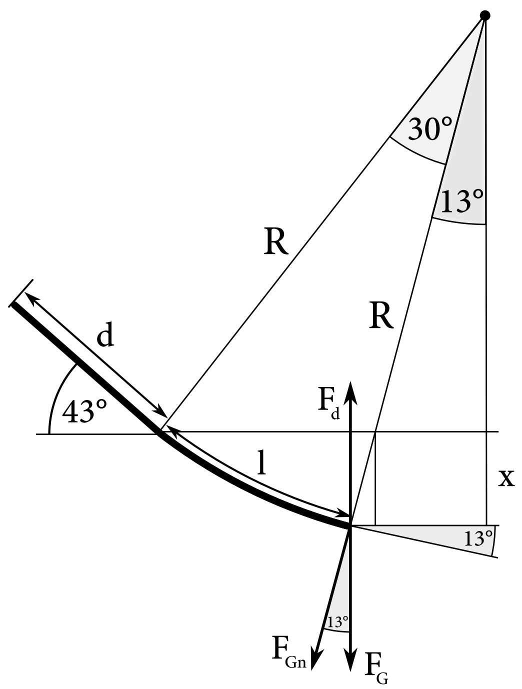
$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2}{T_1}\left(1 + \frac{h\rho g}{p_a}\right)}.$$

Číselne vyjadríme výsledok z našej rovnice. Pritom si musíme dávať pozor na to, aby sme dosadili termodynamickú teplotu. Po dosadení všetkých hodnôt nám vyjde

$$r_2 \doteq 9{,}5\ \mathrm{cm}.$$

Všimnite si, že pri počítaní sme mohli zanedbať efekt povrchového napätia, keďže tlak spôsobený povrchovým napätím je približne o päť rádov menší ako atmosférický tlak.

**17** V prvom rade si vyjasnime, prečo by na Filipa malo pôsobiť nejaké preťaženie, keď sa voľne spúšťa dolu mostíkom. Po krátkej úvahe si uvedomíme, že v záverečnej fáze pred odrazom sa pohybuje po zakrivenom mostíku, takže naňho musí pôsobiť dostredivá sila $F_d$. Veľkosť dostredivého zrýchlenia je $a_d = \frac{v^2}{R}$, kde $R$ je polomer zakrivenia mostíka.




Pozrime sa na geometriu mostíka. Najprv nájdeme prevýšenie $h$ medzi najvyšším a najnižším bodom. To pozostáva z prevýšenia naklonenej roviny dlhej $d = 50$ m a prevýšenia zakrivenej časti, t. j.

$$h = d \sin 43° + x.$$

S trochou trigonometrie bez väčších okolkov nájdeme

$$x = R\left(\cos 13° - \cos 43°\right).$$

Ďalej vieme, že na kružnicovom oblúku dlhom $l = 50$ m sa sklon zmení o 30°. Na základe toho vieme vypočítať polomer krivosti mostíka

$$R = \frac{6l}{\pi}.$$

Rýchlosť v momente odskoku dostaneme zo zákona zachovania energie. Platí, že $\frac{1}{2}v^2 = gh$. Pre odstredivé zrýchlenie preto vieme písať vzťah

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{2h}{R}g.$$

Využijúc známu geometriu mostíka môžeme písať

$$a_d = \frac{2}{R}\left[d \sin 43° + R\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g = \left[\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 2\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g.$$

Nezabúdajme však, že Filip sa nachádza v gravitačnom poli Zeme. To znamená, že k celkovému preťaženiu prispieva aj jeho tiaž – konkrétne jej normálová zložka $F_{G\perp} = F_G \cos 13°$. Pre výsledné preťaženie potom dostávame

$$a = a_d + g\cos 13° = \left(\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 3\cos 13° - 2\cos 43°\right)g \doteq 2{,}17\,g.$$

**18** Elastické lano, aké sa používa na bungee jumping, sa správa ako pružinka, takže Adamov pohyb môžeme popísať ako pohyb harmonického oscilátora. Perióda takéhoto oscilátora je vo všeobecnosti $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Keď je Adam lačný, perióda jeho pohybu na lane bude

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Po zjedení N palaciniek bude kmitať s periódou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+Nm}{k}}.$$

Zo zadania vieme, že perióda bude trojpolovičná, takže $T_2 = \frac{3}{2}T_1$. V tom prípade

$$\frac{3}{2}2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+Nm}{k}},$$

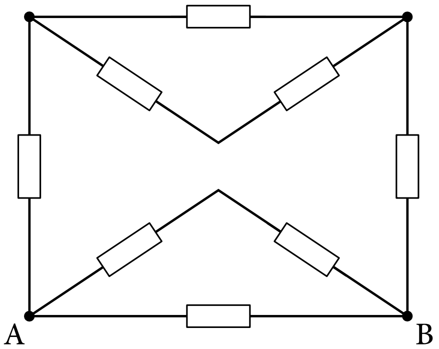
a po umocnení

$$\frac{9}{4}\frac{M}{k} = \frac{M+Nm}{k}.$$

Nakoniec už iba vyjadríme

$$N = \frac{5}{4}\frac{M}{m}.$$

**19** Zadanie je jasné, treba spočítať odpory jednotlivých zapojení. Ako prvý nás bude zaujímať odpor medzi bodmi $A$ a $B$. Odpor sa nezmení, ak vrchol pyramídy nahradíme dokonale vodivým drôtom, ktorý spája vodiče smerujúce od bodov $A$ a $B$ so zvyšnými dvoma. Keď si teraz uvedomíme, že tento dokonalý vodič leží na zrkadlovej osi symetrie zapojenia, zistíme, že pri zapojení k zdroju napätia je na oboch koncoch dokonalého vodiča rovnaký potenciál. To znamená, že ním nikdy nepotečie prúd a vôbec nič sa nestane, keď ho prestrihneme. Ekvivalentná odporová schéma vyzerá teda nasledovne:

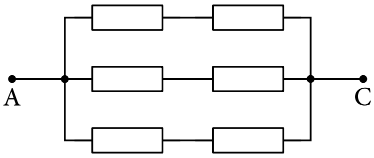



Obrázok 5: *Ekvivalentná odporová schéma medzi bodmi A a B*

Pri tom sme nahradili odpor každého odporového drôtu rezistorom s odporom $R = \xi L$ a dokonalými vodičmi. Vidíme, že už je to iba obyčajné sériovo-paralelné zapojenie. Výsledný odpor je

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{\left[2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R}\right]\frac{2R\cdot R}{2R+R}}{2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R} + \frac{2R\cdot R}{2R+R}} = \frac{8}{15}R.$$

Pri výpočte odporu medzi bodmi $A$ a $C$ použijeme rovnaký trik so strihaním drôtu ako pred chvíľou. Tentokrát sú na osi symetrie dva odporové vodiče, ktoré môžeme zahodiť. Tým prichádzame k zapojeniu




Obrázok 6: *Ekvivalentná odporová schéma medzi bodmi A a C*

Ľahko vypočítame, že odpor je

$$R_{AC} = \frac{2}{3}R$$

a hľadaný pomer odporov nadobúda hodnotu

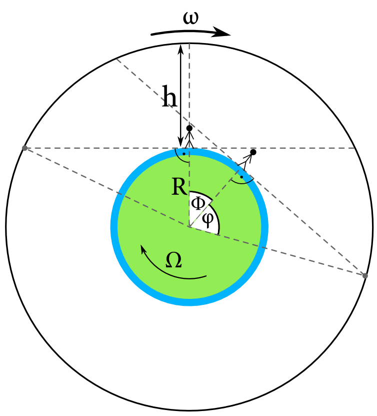
$$\frac{R_{AB}}{R_{AC}} = \frac{\frac{8}{15}R}{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{5}.$$

**20** Predpokladajme, že satelit letí vo výške $h$ nad povrchom Zeme po kružnicovej trajektórii. Na tejto orbite ho drží gravitačná sila, ktorá preň plní funkciu dostredivej sily, preto možno písať

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2 (R+h),$$

kde $R$ je polomer Zeme, $M$ je jej hmotnosť, $m$ je hmotnosť satelitu a $\omega$ je jeho obežná uhlová rýchlosť. Odtiaľ

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}.$$




Obrázok 7: *Satelit na orbite, pohľad na južný pól*

Nech prelet satelitu trvá $T$. Za tento čas satelit preletí uhol $\phi = \omega T$. Horizonty vidíme pod uhlom $\varphi = 2 \arccos \frac{R}{R+h}$. Nezabúdajme, že v dôsledku rotácie Zeme sa Kvík ešte pootočí o dodatočný uhol $\Phi = \Omega T$, kde $\Omega$ je uhlová rýchlosť rotácie Zeme. Keď to dáme do rovnosti, dostaneme rovnicu

$$\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T = \Omega T + 2 \arccos \frac{R}{R+h},$$

z ktorej by sme radi vyjadrili neznámu výšku $h$.

A tu narážame na problém – dostali sme rovnicu, ktorú nevieme riešiť analyticky. Preto ju budeme riešiť numericky. Použijeme metódu binárneho vyhľadávania. Za týmto účelom zadefinujeme funkciu

$$F(h) = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T - \Omega T - 2 \arccos \frac{R}{R+h}$$

a budeme hľadať jej nulový bod $F(h) = 0$.

Princíp binárneho vyhľadávania je nasledovný. Na začiatok odhadneme interval $(a;b)$, v ktorom očakávame, že leží koreň rovnice. Vzhľadom na to, že funkcia $F(h)$ je spojitá, tak ak $F(a) \cdot F(b) < 0$, t. j. ak znamienka na koncoch intervalu sú opačné, potom $\exists c \in (a;b) : F(c) = 0$.[1] Následne interval rozdelíme na polovicu, čím dostaneme dvojicu intervalov $\left(a; \frac{a+b}{2}\right)$ a $\left(\frac{a+b}{2}; b\right)$.

Ak máme to šťastie, že $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, algoritmus ukončíme. V opačnom prípade pokračujeme prehľadávaním jedného z dvojice intervalov – toho, ktorý spĺňa podmienku, že v krajných bodoch intervalu sú opačné znamienka. Algoritmus ukončíme, keď dosiahneme požadovanú presnosť. V našom prípade zadanie požaduje presnosť 1 km, čo znamená, že skončíme, keď dĺžka intervalu klesne pod túto hodnotu.

Poďme na vec. Zaujíma nás výška letu satelitu. Tá je zrejme menšia ako 1000 km, takže ako náš počiatočný odhad možno použiť interval $(0\,\mathrm{km}; 1000\,\mathrm{km})$. Chceme dosiahnuť presnosť 1 km. Vzhľadom na to, že pri každej iterácii sa zmenší veľkosť intervalu na polovicu, potrebujeme vykonať aspoň 10 iterácií, čím dosiahneme veľkosť intervalu $\frac{1000\,\mathrm{km}}{2^{10}} < 1\,\mathrm{km}$. Celý výpočet možno zapísať do tabuľky.

Tabuľka 1: Ukážka riešenia binárnym vyhľadávaním

| Iterácia | $a$ [m] | $b$ [m] | $\frac{a+b}{2}$ [m] | $F(a)$ | $F(b)$ | $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 000 000 | 500 000 | 0,56 | −0,61 | −0,27 |
| 1 | 0 | 500 000 | 250 000 | 0,56 | −0,27 | −0,02 |
| ⋮ | | | ⋮ | | | ⋮ |
| 10 | 230 469 | 231 445 | 230 957 | 0,000 48 | −0,000 73 | −0,000 13 |

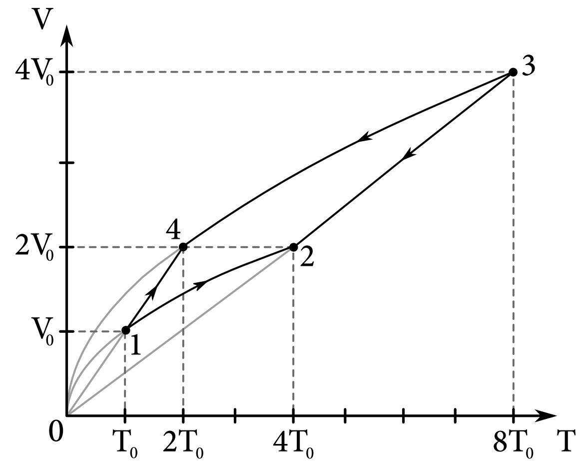
V desiatej iterácii sme konečne dostali $b - a < 1$ km, čiže sme dosiahli požadovanú presnosť. Za riešenie možno zobrať hodnotu zo stredu intervalu ako naše približné numerické riešenie $\tilde{h} = 231{,}0$ km. Ak by sme pokračovali ďalej, dostali by sme presné riešenie $h \doteq 230{,}9$ km.

[1] Navyše funkcia $-\arccos \frac{R}{R+h}$ je monotónne rastúca na intervale $h \in [0; \infty]$ a podobne $\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$ je monotónne klesajúca na tomto intervale, takže riešenie rovnice $F(c) = 0$ bude práve jedno.

**21** Skôr než sa pustíme do prekresľovania $pV$–diagramu na $VT$–diagram, je nutné zistiť, aké termodynamické deje v plyne prebiehajú a aké objemy a teploty má plyn v jednotlivých fázach deja. Na to všetko nám bude stačiť rovnica ideálneho plynu $pV = NkT$, kde $N$ je nemenný počet častíc.

- Pri prechode 1 → 2 v plyne stúpa tlak priamo úmerne s objemom, takže zo stavovej rovnice $\frac{pV}{T}$ = konšt. vyplýva, že objem a teplota sa budú meniť podľa závislosti $V \propto \sqrt{T}$ a v bode 2 bude mať plyn objem $2V_0$ a teplotu $4T_0$.
- Pri prechode 2 → 3 vykonáva plyn izobarický dej, to znamená, že objem sa mení priamo úmerne s teplotou. V bode 3 bude mať plyn objem $4V_0$ a teplotu $8T_0$.
- Pri prechode 3 → 4 tlak v plyne klesá priamo úmerne s objemom, takže závislosť objemu a teploty je opäť odmocninová a v bode 4 má plyn objem $2V_0$ a teplotu $2T_0$.
- Pri prechode 4 → 1 sa objem mení opäť lineárne s teplotou.

Pri prekresľovaní na $VT$–diagram by sme už nemali mať žiaden problém, stačí si dať pozor na to, aby všetky krivky po predĺžení prechádzali počiatkom grafu. Prekreslený cyklus vyzerá nasledovne:

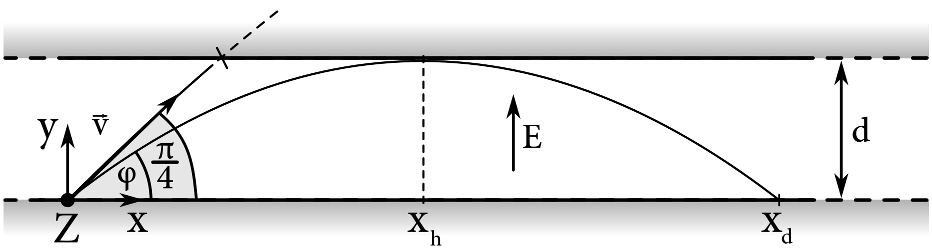



Obrázok 8: *Cyklus prekreslený do VT–diagramu*

**22** Keďže uvažované elektrické pole je homogénne, na všetky vylietavajúce elektróny bude smerom nadol pôsobiť konštantná sila veľkosti $Ee$. Tá bude udeľovať elektrónom zrýchlenie $a = \frac{Ee}{m_e}$. Môžme si tiež uvedomiť, že gravitačná sila pôsobiaca na elektróny je oproti elektrickej sile zanedbateľná. Celá sústava je rotačne súmerná, takže vo výpočte sa stačí obmedziť na jeden rez obsahujúci zdroj. Analogicky k šikmému vrhu v homogénnom gravitačnom poli môžeme popísať súradnice elektrónu uniknuvšieho zo zdroja pod uhlom $\varphi$

$$x = v_x t = v\cos\varphi \cdot t,$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}at^2 = v\sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}at^2.$$



V závislosti na počiatočnej rýchlosti a elevačnom uhle elektrónu môžu vo všeobecnosti nastať tri prípady:

- elektrón narazí do hornej dosky kondenzátora;
- elektrón sa obtrie o hornú dosku kondenzátora;
- elektrón nedosiahne dostatočnú výšku na to, aby sa dotkol hornej dosky kondenzátora.

Pozrime sa na elektrón, ktorý sa práve obtrie o hornú dosku. Letiaci elektrón dosiahne svoju maximálnu výšku po čase

$$T = \frac{v_y}{a} = \frac{v \sin\varphi}{a}.$$

Ak tento čas dosadíme do vzorca pre $y$-súradnicu a položíme ju rovnú $d$, zistíme pod akým uhlom musí byť vypustený elektrón, aby svoju maximálnu výšku dosiahol práve vo výške dosky, čo teda znamená, že sa o ňu obtrie.

$$d = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{a} - \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a} = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2ad}}{v}.$$

Ak do tohoto vzťahu dosadíme zadané hodnoty, vyjde uhol $\varphi \doteq 36{,}37°$. Tento uhol je menší ako 45°, čo znamená, že všetky elektróny, ktoré by mohli doletieť ďalej, narazia do hornej dosky. Ak dosadíme tento uhol spolu s časom $T$ do rovnice pre $x$-súradnicu, zistíme v akej vzdialenosti od stredu sa budú elektróny obtierať o hornú dosku

$$x_h = \frac{v^2 \cos\varphi \sin\varphi}{a}.$$

Vieme teda, že vrchol trajektórie takéhoto elektrónu je vo vodorovnej vzdialenosti $x_h$ od zdroja. Ak si uvedomíme, že elektrón dosiahne vrchol trajektórie presne v polovici prejdenej vodorovnej vzdialenosti, zistíme, že maximálny dolet na spodnej doske je $x_d = 2x_h$.

Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame $x_h = 2{,}715$ m. Ak vezmeme do úvahy rotačnú súmernosť úlohy, zistíme, že elektróny budú na hornú dosku dopadať do kruhu s polomerom 2,715 m a na dolnú dosku do kruhu s polomerom 5,43 m. Pre celkovú plochu dopadu teda dostávame výsledok

$$S = \pi\left(x_h^2 + x_d^2\right) = 5\pi x_h^2 \doteq 116\ \mathrm{m}^2.$$

**23** Pozrime sa na to, aká sila pôsobí na podložku. Musí to byť súčet reakcie na tiažovú silu misky $F_{\text{miska}} = Mg$ a tiažovú silu vody $F_{\text{voda}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$.

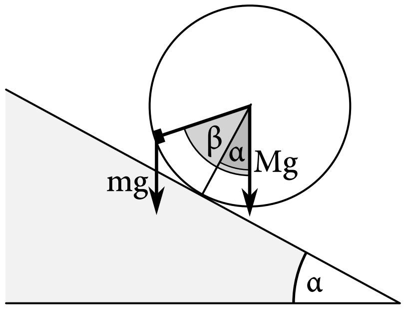
Teraz sa zamyslime, aká sila spôsobí zdvihnutie misky. Treba si uvedomiť, akú úlohu zohráva tlak vody v dolnej podstave. Podľa tretieho Newtonovho zákona musí rovnaká tlaková sila, aká pôsobí na podložku, pôsobiť aj od podložky na kvapalinu. Práve tento tlak s veľkosťou $p = h\rho g$ spôsobuje zdvihnutie misky. Pre silu potom platí $F = pS = \rho g \pi R^3$. Teraz už len stačí dať sily do rovnosti a vyjadriť výslednú hmotnosť misky ako

$$\rho g \pi R^3 = Mg + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g,$$

odkiaľ

$$M = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho.$$

**24** Počítajme momenty síl vzhľadom na bod dotyku suda s podložkou. Budú tu pôsobiť dva momenty síl.




Obrázok 9: *Sud so syrom*

Moment sily v ťažisku samotného suda sa pokúša otočiť sud v zápornom smere a moment sily od syra zasa v kladnom:

$$M_{syr} = mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right),$$

$$M_{sud} = -MgR\sin\alpha.$$

V prípade, že sa sud nebude otáčať, bude výsledný moment nulový, teda musí platiť:

$$M_{syr} + M_{sud} = 0,$$

$$mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right) = MgR\sin\alpha$$

a teda

$$\frac{m}{M+m}\sin\beta = \sin\alpha.$$

Aby sme maximalizovali uhol, stačí nám maximalizovať jeho sínus a následne vyjadriť jeho hodnotu. Keďže $\sin\alpha$ je priamo úmerný $\sin\beta$, musí byť uhol $\beta$ čo najväčší. Pre hraničný stav syra v sude teda platí rovnosť tangenciálnej zložky tiažovej sily a trecej sily:

$$mg\sin\beta = \mu mg\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \mu.$$

Následne využijeme, že $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$ a dostaneme

$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Po dosadení

$$\sin\alpha = \frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

a teda

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right).$$

**25** Vieme, že kapacita kondenzátora vyplneného dielektrikom s relatívnou permitivitou $\varepsilon$ vzrastie $\varepsilon$-krát. Ale čo ak je vyplnená iba časť? Jednou z možností je prerobiť kondenzátor na ekvivalentné zapojenie viacerých kondenzátorov, ktoré budú dielektrikom vyplnené buď celé, alebo vôbec.

Ak do kondenzátora vložíme tenkú vodivú dosku rovnobežne s jeho platňami, elektrické pole v ňom sa nezmení, keďže celkový náboj na doske je nulový. To znamená, že elektrické vlastnosti takéhoto kondenzátora sa nezmenia. Tiež sa nič nezmení, ak teraz túto dosku rozdelíme rovnobežne s povrchom na dve a spojíme ich vodičom. Pri tom sme vlastne získali dva sériovo zapojené kondenzátory. Pozor, vzniknuté kondenzátory ale majú dvojnásobnú kapacitu oproti kapacite $C$ pôvodného kondenzátora, pretože vzdialenosť platní sa zmenšila na polovicu.

To znamená, že kapacita kondenzátora v prvom prípade je rovnaká ako kapacita dvoch sériovo zapojených kondenzátorov s kapacitou $2C$, pričom dielektrikom je vyplnený iba jeden:

$$C_1 = \frac{2C \cdot \varepsilon 2C}{2C + \varepsilon 2C} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} C.$$

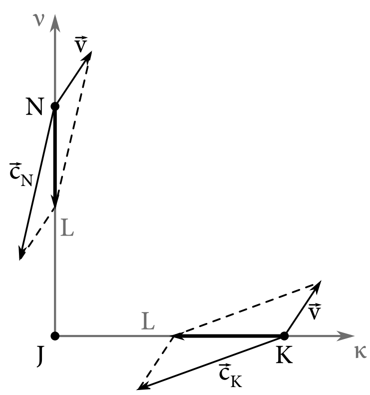
V druhom prípade je zjavné, že ak kondenzátor "rozrežeme" vertikálne, polia sa opäť nezmenia a my dostaneme dva kondenzátory spojené paralelne (každý tentoraz s kapacitou $C/2$ kvôli polovičnej ploche platní). Takže kapacita v druhom prípade je

$$C_2 = \frac{C}{2} + \varepsilon \frac{C}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2} C.$$

Pre pomer kapacít polovyplnených kondenzátorov dostávame

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

**26** Pozrime sa najprv na prvú fázu. V nej kričia Nina s Kvíkom a Jaro, síce s veľkým sebazaprením, ale predsa len počúva. Keď vypustia zo svojich útrob zvuk, šíri sa v guľových vlnoplochách vzhľadom na masu vzduchu. Jej pohyb sa dá popísať síce neznámym, ale konštantným vektorom $\vec{v}$. Ten sa bude skladať s takými vektormi $\vec{c}$, predstavujúcimi pohyb zvuku vo vzduchu, aby výsledná rýchlosť šírenia zvukového prejavu mala smer k Jarovi.




Označme si $\vec{c_K}$ vektor rýchlosti Kvíkovho akustického produktu vo vzdušnej mase. Tak, ako sme ho vybrali, preň platí

$$c_{K\nu} + v_\nu = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{K\kappa} + v_\kappa = -\frac{L}{T_{KJ}},$$

kde $L$ je vzdialenosť Kvíka a Niny od Jara a $T_{KJ}$ je zadaný čas, za ktorý sa Kvíkov poryv hlasiviek dostane k Jarovi. Analogicky pre $\overrightarrow{c_N}$ platí

$$c_{N\kappa} + v_\kappa = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{N\nu} + v_\nu = -\frac{L}{T_{NJ}},$$

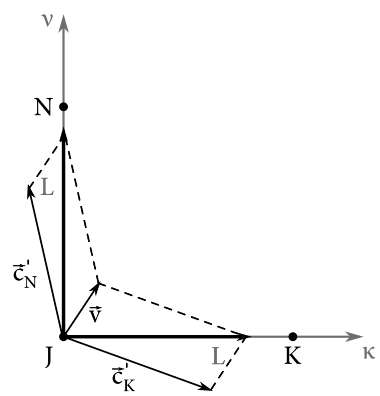
a pre oba vektory rýchlosti zvuku prirodzene platí

$$\left|\overrightarrow{c_K}\right| = \left|\overrightarrow{c_N}\right| = c.$$

Vyššie uvedené vzťahy nám umožňujú odstrániť z ďalších výpočtov zložky $\overrightarrow{c_K}$ a $\overrightarrow{c_N}$.

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} + v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} + v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2$$

V druhej fáze sa situácia otočí. Zvuk sa od Jara ku Kvíkovi a Nine nesie vektormi $\overrightarrow{c_K}' + \overrightarrow{v}$, resp. $\overrightarrow{c_N}' + \overrightarrow{v}$. Pre tie musia platiť vzťahy analogické tým v prvej fáze.




Teda platí

$$c'_{K\nu} + v_\nu = 0, \qquad c'_{K\kappa} + v_\kappa = \frac{L}{T_{JK}},$$

$$c'_{N\kappa} + v_\kappa = 0, \qquad c'_{N\nu} + v_\nu = \frac{L}{T_{JN}}$$

a tiež

$$\left|\overrightarrow{c_K}'\right| = \left|\overrightarrow{c_N}'\right| = c.$$

Odstránenie zložiek $\overrightarrow{c_K}'$ a $\overrightarrow{c_N}'$ zo sústavy rovníc vyústi do vzťahu

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} - v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} - v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2.$$

Skombinovaním tohto vzťahu s jeho už uvedeným blízkym príbuzným dostaneme

$$v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2 .$$

Túto súpravu rovníc môžeme trochu sprístupniť odčítaním prvých dvoch členov od všetkých prítomných strán.

$$2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2 =$$

$$= -2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2 =$$

$$= -2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2 .$$

Ak využijeme rovnosť 1. a 3. riadku, resp. 2. a 4. riadku v predchádzajúcom odseku, vieme pomocou zadaných veličín pohodlne vyjadriť

$$v_\kappa = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JK}} - \frac{1}{T_{KJ}}\right) \qquad \text{a} \qquad v_\nu = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JN}} - \frac{1}{T_{NJ}}\right),$$

čo znamená, že

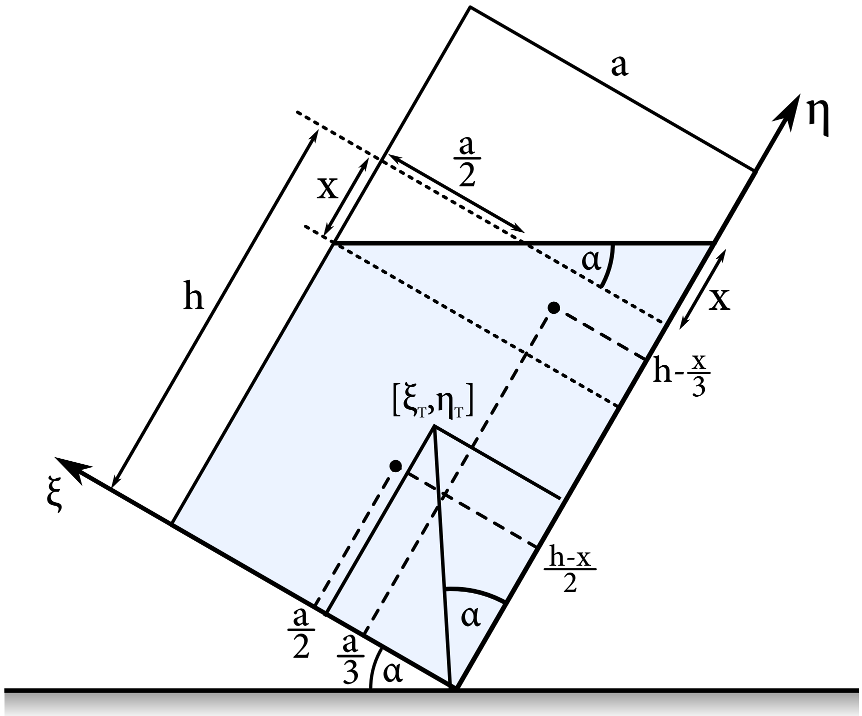
$$\left|\vec{v}\right| = \frac{L}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{T_{JK}} - \frac{1}{T_{KJ}}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_{JN}} - \frac{1}{T_{NJ}}\right)^2} = 29{,}43\ \mathrm{m/s}.$$

**27** Výsledné magnetické pole vieme určiť superpozíciou jednotlivých hrán pôvodného štvorca. Komu by sa však chcelo rozdeľovať štvorce na kúsky, keď môžeme výsledný útvar vyskladať zo samotných štvorcov?

Stačí zobrať tri pôvodné siete a uložiť ich na požadované miesta, aby vytvorili výsledný útvar. V našom prípade to bude jeden štvorec v ľavej stene, druhý v pravej a tretí v hornej podstave. Vďaka superpozícii prúdov nám dvomi hranami v hornej podstave prestane pretekať prúd.

Keďže magnetické pole od jedného štvorca je kolmé na rovinu pôvodnej siete, magnetické pole od pravej a ľavej steny sa vyruší a výsledkom bude iba magnetické pole od hornej podstavy smerujúce nadol s rovnakou veľkosťou ako pôvodné. Pre veľkosť výsledného magnetického poľa $B_2$ teda platí $B_2 = B_1$.

**28** Nech hladina mlieka siaha do výšky $h$. Položíme ho na naklonenú rovinu so sklonom $\alpha$. Uvedomme si, že voľná hladina mlieka bude vždy vodorovná. Nakoľko je podľa zadania mlieka v škatuli rozumné množstvo, mlieko nadobudne tvar zrezaného hranola. Jeho bočná stena teda bude mať tvar lichobežníka, ako vidieť na obrázku.




V medznom prípade musí platiť, že ťažisko mlieka má byť nad osou otáčania. Nájdime si teda polohu ťažiska. Zaveďme si súradnicovú sústavu tak, že jej osi zodpovedajú hranám škatule. Lichobežník pozostáva z obdĺžnika s rozmermi $a \times (h - x)$ a pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžok $a$ a $2x$. Ťažisko obdĺžnika má súradnice $\left[\frac{a}{2}; \frac{h-x}{2}\right]$, ťažisko trojuholníka súradnice $\left[\frac{a}{3}; h - \frac{x}{3}\right]$. Súradnice ťažiska lichobežníka sú teda

$$\xi_T = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\left(h - x\right) + \frac{a}{3} \cdot ax}{ah} = \frac{a}{2} - \frac{ax}{6h};$$

$$\eta_T = \frac{\frac{h-x}{2} \cdot a\left(h - x\right) + \left(h - \frac{x}{3}\right) \cdot ax}{ah} = \frac{h}{2} + \frac{x^2}{6h}.$$

Z obrázka vidíme, že pre naklonenie vodnej hladiny vzhľadom na steny škatule platí

$$\tan\alpha = \frac{2x}{a}.$$

Zároveň však z podmienky, že v limitnom prípade má byť ťažisko nad hranou škatule dostávame, že

$$\tan\alpha = \frac{\xi_T}{\eta_T} = \frac{12ah - 2a^2\tan\alpha}{12h^2 + a^2\tan^2\alpha}.$$

Vylúčením neznámej $x$ dostávame kvadratickú rovnicu pre výšku mlieka v škatuli

$$h^2 - \frac{a}{\tan\alpha}h + a^2\left(\frac{\tan^2\alpha}{12} + \frac{1}{6}\right) = 0.$$

Jej riešením je

$$h = \frac{a}{2\tan\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tan^2\alpha\left(\frac{\tan^2\alpha}{3} + \frac{2}{3}\right)}\right).$$

Ľahko overíme, že musíme zobrať riešenie so znamienkom "+". Druhé riešenie totiž s rastúcim uhlom náklonu klesá, čo by znamenalo, že čím miernejší je sklon, tým menej mlieka stačí na prevrhnutie a v limitnom prípade vodorovnej roviny hovorí, že by sa mala prevrhnúť aj prázdna škatuľa od mlieka, čo je samozrejme nezmysel. Pre $a = 1$ dm a $\alpha = 30°$ dostávame $h \doteq 1{,}6$ dm a pre objem mlieka v škatuli

$$V = a^2 h \doteq 1{,}6\ \mathrm{dm}^3.$$

**29** Úbohá planéta sa pred rozpadom pohybovala kruhovou rýchlosťou vo vzdialenosti $r$. Jej obežná rýchlosť teda musela byť

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Po rozpade sa oba kusy pohybovali po parabolickej trajektórii, ktorej zodpovedá práve úniková rýchlosť. Tá má vo vzdialenosti $r$ hodnotu

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Rýchlosť prvého kusu sa teda zmenila o

$$\Delta v_1 = v_e - v_k = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a druhého o

$$\Delta v_2 = v_e + v_k = \left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva podmienka pre hmotnosti kusov

$$\Delta v_1 m_1 = \Delta v_2 m_2,$$

a teda

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

**30** Po napojení prsteňa na napätie $U$ začne obvodom pretekať prúd. Ako to už v príkladoch s odpormi býva, prúd si vyberá cestu menšieho odporu. Čím je však časť drôtu dlhšia, tým je jej odpor väčší v súlade s rovnicou $R = \rho\frac{l}{S}$, kde $S$ je obsah prierezu drôtu, $\rho$ rezistivita a $l$ dĺžka drôtu. To znamená, že kratšou časťou prsteňa bude pretekať väčší prúd. Bude teda platiť

$$I \propto \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad I \propto \frac{1}{l}.$$

Magnetické pole v okolí prúdovodiča je priamo úmerné prúdu a jeho efektívnej dĺžke. Zakrivenú slučku si vieme predstaviť ako veľmi krátke prúdovodiče rovnako vzdialené od stredu, kde každý z nich rovnako prispieva k magnetickému poľu. Pozor! Smer magnetického poľa je taktiež dôležitý, no ten ľahko určíme z Ampérovho pravidla pravej ruky. Z toho dôvodu teda bude platiť

$$B_{\mathrm{hore}} \propto I_1 \cdot l_1 \quad \text{a} \quad B_{\mathrm{dole}} \propto I_2 \cdot l_2.$$

Z toho vyplýva, že zatiaľ čo prúd s dĺžkou klesá, veľkosť magnetického poľa rastie. Keďže je však výsledné magnetické pole závislé od $I$ aj $l$ lineárne, oba vplyvy sa vyrušia a výsledné magnetické pole v strede nebude od uhla $\varphi$ závisieť vôbec. Pre jednotlivé zložky výsledného poľa teda bude platiť:

$$B_{\mathrm{hore}} = B_{\mathrm{dole}}.$$

Jedno však smeruje nahor, druhé nadol. Výsledná veľkosť magnetického poľa bude teda nulová pri akomkoľvek bode zapojenia.

**31** Nech kyvadlo obieha s uhlovou rýchlosťou $\omega$. Potom jednu obrátku zvládne za čas $T_o = 2\pi/\omega$. Ďalej nech tejto uhlovej rýchlosti zodpovedá rovnovážna poloha kyvadla odchýlená o uhol $\varphi_0$ od vertikálneho smeru. Na kyvadlo potom pôsobí odstredivá sila veľkosti $F_O = m\omega^2 R \sin\varphi_0$ a tiažová sila $F_G = mg$. Pre rovnovážnu polohu kyvadla platí

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_O}{F_G} = \frac{\omega^2 R \sin\varphi_0}{g}.$$

Odtiaľ

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}; \qquad \sin\varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2}.$$

Napíšme teraz pohybovú rovnicu pre kmity kyvadla. Nech $\varphi$ je uhol meraný od rovnovážnej polohy kyvadla. Potom pohybová rovnica vyzerá nasledovne:

$$mR^2\varepsilon = -mgR\sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) + m\omega^2 R\sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) R\cos\left(\varphi_0 + \varphi\right).$$

Rovnica sa dá upraviť použitím súčtových vzorcov:

$$\varepsilon = -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_0\right) + \omega^2\left(\sin\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0\cos\varphi - \sin\varphi_0\sin\varphi\right).$$

Táto rovnica nie je obzvlášť vábna, preto sa ju pokúsime linearizovať. Do prvého rádu presnosti pre malé uhly platí $\sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1$. Potom

$$\begin{aligned}\varepsilon &\approx -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0 \cdot 1 + \varphi \cdot \cos\varphi_0\right) + \omega^2\left(\sin\varphi_0 \cdot 1 + \varphi \cdot \cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0 \cdot 1 - \sin\varphi_0 \cdot \varphi\right) \\ &\approx \left(\omega^2 \sin\varphi_0\cos\varphi_0 - \frac{g}{R}\sin\varphi_0\right) + \left(\omega^2\cos^2\varphi_0 - \omega^2\sin^2\varphi_0 - \frac{g}{R}\cos\varphi_0\right)\varphi.\end{aligned}$$

Spomeňme si, že sme našli vzťah medzi rovnovážnym uhlom $\varphi_0$ a uhlovou rýchlosťou $\omega$ a dĺžkou matematického kyvadla $R$. Keď príslušné výrazy pre sínusy a kosínusy dosadíme do pohybovej rovnice, vypadne z nej absolútny člen a dostávame rovnicu harmonického oscilátora

$$\varepsilon \approx \left(\frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2\right)\varphi,$$

ktorého perióda malých kmitov je

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}}}.$$

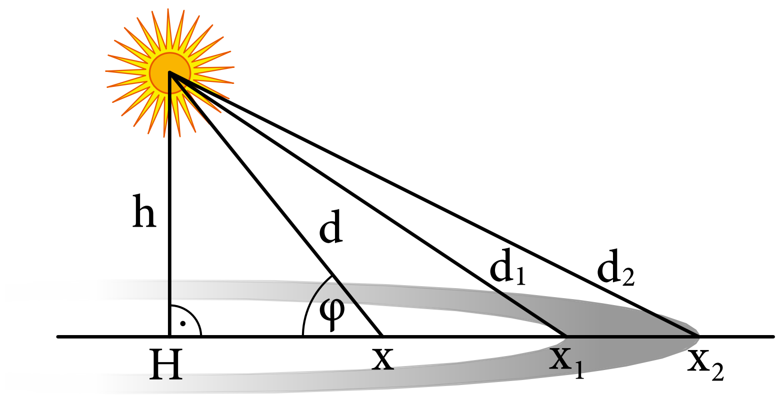
Hľadaný pomer periód je

$$k = \frac{T_o}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2},$$

čo možno spätne vyjadriť pomocou rovnovážneho uhla

$$k = \sin \varphi_0.$$

$\boxed{\textbf{32}}$ V tejto úlohe ide o nájdenie tepelnej rovnováhy žiarenia absolútne čiernych telies. Slnko izotropne vyžaruje určitý výkon, ktorý Plackozem dokáže absorbovať. Zároveň však sama vyžaruje do polpriestoru nad sebou, takže nakoniec sa ustáli rovnováha. Zakreslime si podstatné veličiny a vzdialenosti:




Hustota toku klesá so štvorcom vzdialenosti. Z geometrie úlohy by nám teda malo byť jasné, že najvyšší absorbovaný výkon bude v bode $H$, ktorý sa nachádza na Plackozemi priamo pod Slnkom. Označme teplotu v tomto bode $T_H$. V ostatných bodoch bude vzdialenosť od Slnka určite väčšia, takže tok výkonu bude menší; a navyše lúče už nebudú dopadať kolmo, ale sa budú distribuovať na väčšiu plôšku. Navyše vieme povedať, že vo veľkej vzdialenosti sa teplota bude limitne blížiť k 0 K.

Ako bude vyzerať obývateľná zóna? Označme hranice teplotného intervalu $T_1$ a $T_2$, pričom $T_1 < T_2$. Teraz máme tri možnosti:

- Ak $T_H < T_1$, celá Plackozem bude príliš chladná. Nachádza sa príliš ďaleko od slabého Slnka, a teda obývateľnej zóny niet.
- Ak $T_1 < T_H < T_2$, obývateľnou zónou bude nejaké symetrické okolie bodu $H$ až po určitú kritickú vzdialenosť – čiže kruh.
- Napokon ak $T_2 < T_H$, okolie bodu $H$ je príliš horúce. Avšak teplota s rastúcou vzdialenosťou rýchlo klesá, takže v určitej vzdialenosti dosiahne $T_2$, neskôr aj $T_1$ a medzi nimi sa vytvorí obývateľná zóna v tvare medzikružia.

No a teraz to poďme celé spočítať. Pomocou Stefan-Boltzmannovho zákona ľahko určíme, že celkový svetelný výkon nášho Slnka je

$$P = S_\odot \sigma T_\odot^4 = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$

kde $S_\odot$ je jeho povrch. Ďalej nás bude zaujímať množstvo žiarenia, ktoré dopadá na nejakú malú plôšku Plackozeme vo vzdialenosti $d$ od Slnka. Uhlový priemer Slnka pri pohľade z ľubovoľného bodu Plackozeme bude dostatočne malý na to, aby sme ho mohli považovať za bodový zdroj. Svetelný tok sa šíri rovnako do všetkých smerov, takže vo vzdialenosti $d$ jeho veľkosť bude

$$\Phi = \frac{4\pi R^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi d^2} = \frac{\sigma R^2 T_\odot^4}{d^2}.$$

Pozrime sa však na malú plôšku Plackozeme vo vzdialenosti $d$ od Slnka. Tento tok na ňu nedopadá kolmo, ale pod uhlom $\varphi$. Celkový absorbovaný výkon na jednotku plochy teda ešte musíme vynásobiť $\sin\varphi$. Tento člen však vieme vyjadriť pomocou známych premenných, keďže platí

$$\sin\varphi = \frac{h}{d}.$$

Výkon na jednotku plochy je teda

$$P = \Phi \sin\varphi = \frac{\sigma R^2 T_\odot^4 h}{d^3}.$$

Tým máme vyriešenú absorpciu žiarenia. Čo ale tepelné straty? Opäť nám pomôže Stefan-Boltzmannov zákon. V rovnovážnom stave sa prijatý a vyžiarený výkon budú rovnať, takže môžeme napísať

$$\frac{\sigma R^2 T_\odot^4 h}{d^3} \overset{!}{=} \sigma T^4.$$

Jedinou neznámou je tu pre nás vzdialenosť $d$, ktorú vieme osamostatniť na ľavej strane rovnice. Dostaneme

$$d = \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T^4}\right)^{1/3}.$$

Rozlohu prípadnej obývateľnej zóny je však lepšie vyjadriť pomocou vzdialenosti od bodu $H$, ktorú označíme $x$. Z Pytagorovej vety platí

$$x^2 = d^2 - h^2.$$

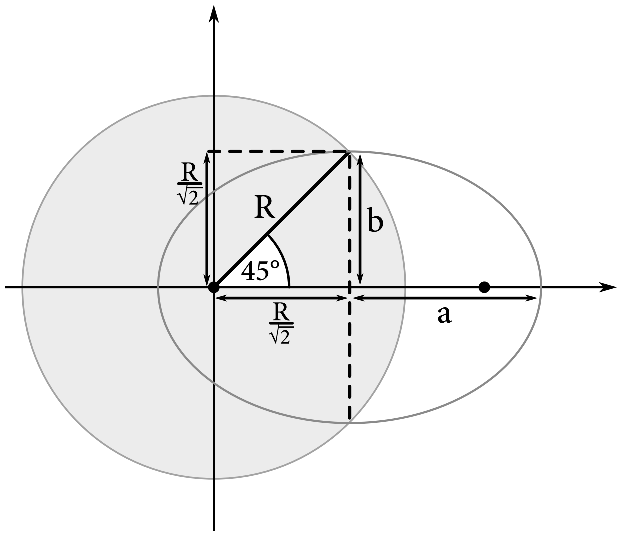
Odtiaľ si už ľahko vieme vyjadriť priamo $x$. Dosadením overíme, že pre dolnú aj hornú hranicu požadovaného intervalu teplôt dostávame reálne riešenie, a teda našou hľadanou plochou bude naozaj medzikružie. Nakoniec vypočítame plochu medzikružia ako rozdiel plôch dvoch kružníc. Po dosadení za $x^2$ pre hranice intervalu teplôt dostávame

$$S = \pi\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \pi\left(\left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_1^4}\right)^{2/3} - \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_2^4}\right)^{2/3}\right) = \pi R^{4/3} h^{2/3} T_\odot^{8/3}\left(T_1^{-8/3} - T_2^{-8/3}\right).$$

Po dosadení číselných hodnôt získame výsledok

$$S \doteq 3\,538\,765\ \mathrm{km}^2.$$

$\boxed{33}$ Je jasné, že pohyb astronauta bude prebiehať po elipse s ohniskom v strede asteroidu. Aby sme už po mnohýkrát mohli obdivovať geometriu elipsy, bude najlepšie hneď si nakresliť obrázok:




Obrázok 10: *Geometria obehu po elipse*

Rozmery a poloha elipsy bezprostredne vyplývajú zo zadania: body vzletu a pristátia sú vzdialené štvrtinu obvodu a elipsa zviera na povrchu asteroidu s jeho povrchom uhol 45°. Teda je zrejmé, že pohyb astronauta prebehne presne po polovici elipsy. Tiež je ihneď zjavná malá polos tejto elipsy, $b = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Na určenie veľkej polosi už ale treba využiť ďalšie znalosti: napríklad to, že súčet vzdialeností od ktoréhokoľvek bodu elipsy k dvom ohniskám je rovnaký. Keď sa pozrieme na bod, kde astronaut pôvodne stál, súčet vzdialeností k ohniskám je $2R$. Naopak od pericentra, teda od bodu, ktorý je na obrázku najviac vľavo, je to $2a$, odkiaľ plynie $a = R$. Elipsu máme teda určenú, ešte treba zistiť čas letu. Tu využijeme znalosť obežnej doby po celej elipse[2]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}},$$

a druhý Keplerov zákon, ktorý hovorí, že plocha opísaná sprievodičom[3], je za nejaký fixný čas vždy rovnaká. Ak teda chceme vedieť čas $t$ potrebný na prejdenie polovice elipsy, bude tvoriť rovnakú časť obežnej periódy, akú tvorí opísaná plocha z celej plochy elipsy. Opísaná plocha je

$$s = \frac{\pi ab}{2} + \frac{R^2}{2}$$

a celá plocha je

$$S = \pi ab,$$

takže

$$t = T\frac{s}{S} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \frac{\frac{\pi ab}{2} + \frac{R^2}{2}}{\pi ab} = \frac{\left(\pi + \sqrt{2}\right) R^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

[2] Ak si nepamätáte, dá sa odvodiť tak, že zistíte obežnú dobu po kruhu, a len zameníte polomer za veľkú polos. Korektnosť tohto kroku vyplýva z tretieho Keplerovho zákona.

[3] čiara spájajúca ohnisko elipsy a obiehajúci objekt

**34** Prečo by mal Kvík vidieť červené svetlo ako zelené? Po chvíľke kontemplovania prídeme na to, že za tým môže byť jedine Dopplerov efekt. No čo by to bolo za príklad, keby nemal nejaký menší háčik. Svetlo sa totiž pohybuje rýchlosťou svetla (prekvapivo), zatiaľ čo bežný vzťah pre dopplerovský posun frekvencií vychádza z Galileových transformácií, ktoré sú nerelativistické. Potrebujeme teda relativistickú verziu Dopplerovho posunu.

Po chvíľke obcovania s Lorentzovými transformáciami, poťažmo po krátkom listovaní v odbornej literatúre, dostaneme pre relativistický posun frekvencií vzťah

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Potrebujeme odtiaľ vyjadriť rýchlosť pohybu Kvíkovho auta

$$v = \frac{f^2 - f_0^2}{f^2 + f_0^2}c = \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2}c.$$

Po dosadení vlnových dĺžok zeleného a červeného svetla dostávame

$$v = \frac{11}{61}c \doteq 0{,}18\,c.$$

Kvík by si mal teda poriadne zvážiť, či sa mu oplatí viac zaplatiť pokutu za prejazd križovatkou na červenú alebo za prekročenie rýchlosti o 7 rádov.

Pre porovnanie ešte môžeme vypočítať rýchlosť vychádzajúc z klasického Dopplerovho vzťahu. Odhliadnuc od toho, že výsledok závisí na voľbe vzťažnej sústavy, zvoľme si vzťažnú sústavu spojenú so semaforom. V tejto vzťažnej sústave pre frekvenčný posun platí $f = f_0\frac{c+v}{c}$, odkiaľ vyjde

$$v = \left(\frac{f}{f_0} - 1\right)c = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1\right)c = 0{,}2\,c.$$

**35** Ako hovorí zadanie, sústava je na začiatku nehybná, pretože na oboch stranách kladky sú zavesené závažia (resp. žaby) s hmotnosťou $2m$. Otázkou je, čo sa stane, keď sa Katka pohne rýchlosťou $v$ nahor vzhľadom na lano. Odpoveď nájdeme, keď sa zamyslíme nad tým, ako presne zrýchlila na $v$. Počas aktu zrýchľovania spôsobí Katka to, že na jednu stranu kladky pôsobí sila $F(t)$, ktorá však môže mať ľubovoľný priebeh.

Podľa tretieho Newtonovho zákona teda pôsobí sila $F(t)$ aj na ľahšiu žabu so závažím $m$, ale smerom nahor. Keďže kladka je dokonalá (má nulovú hmotnosť a lano na nej neprešmykuje), sily a momenty síl na ňu pôsobiace sú vždy nulové. To znamená, že aj na Vladka pôsobí sila $F(t)$. Katke so závažím, a rovnako ako aj ťažšej Vladkovi, bol udelený impulz sily

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t,$$

ktorý spôsobí zmenu hybnosti $\Delta p = I$ na oboch stranách kladky. Ak označíme rýchlosť pohybu Vladka smerom nahor (a teda aj rýchlosť lana) $u$, z rovnosti hybností na oboch stranách kladky dostaneme

$$2mu = m\,(v-u) - mu,$$

čiže $u = \frac{v}{4}$. Katka teda stúpa ku kladke rýchlosťou $\frac{3}{4}v$ a bude tam prvá. Potrvá jej to čas

$$t = \frac{H}{\frac{3}{4}v}.$$

Za tento čas sa Vladko posunie o

$$h = ut = \frac{H}{3},$$

takže hľadaná vzdialenosť žiab bude $\frac{2}{3}H$.

Ešte dodáme krátku poznámku k hybnosti sústavy a inému spôsobu riešenia. Všimnime si, že ťažisko sústavy sa pohybuje smerom nahor. To znamená, že hybnosť sústavy sa oproti pokoju zmenila. Prečo neplatí zákon zachovania hybnosti? Keď Katka zrýchľuje a pôsobí silou na lano, vyvoláva reakčnú silu v kladke, ktorá je ale väčšia – na sústavu totiž pôsobí vonkajšia sila. Hneď ako sa Katka začne pohybovať konštantnou rýchlosťou, hybnosť sa už meniť nebude. Rovnako by sme sa mohli pozrieť na problém cez moment hybnosti. Žiaden vonkajší moment sily na sústavu nepôsobí, a teda sa nebude meniť ani moment hybnosti sústavy. Ak by sme položili celkový moment hybnosti počas pohybu rovný tomu počiatočnému, čiže nule, dostali by sme presne rovnicu pre hybnosti pravej a ľavej strany

$$2mu = m(v - u) - mu.$$

**36** Počuli ste už niekedy o solárnej plachte? Ak áno, tak asi viete, že aj dopadajúce svetlo pôsobí silou. To isté sa bude diať aj tu. Keďže svetlo pôsobí silou, znamená to, že musí mať nejakú hybnosť. A naozaj, kedysi múdri ľudia vymysleli, že svetlo sa dá chápať ako prúd akýchsi častíc, fotónov, pričom každý jeden má energiu zodpovedajúcu jeho frekvencii rovnú

$$E = hf$$

a hybnosť

$$p = \frac{E}{c}.$$

Prúd fotónov sa bude odrážať od stien kruhu pod uhlom $90° - \alpha$, meraným od kolmice. To znamená, že pri odraze jedného fotónu sa jeho hybnosť zmení o

$$\Delta p = 2p\cos(90° - \alpha) = 2\frac{E}{c}\sin\alpha.$$

Let jedného fotónu medzi dvoma bodmi odrazu trvá

$$\Delta t = \frac{2R\sin\alpha}{c}.$$

Teraz prichádza kľúčová úvaha. Keďže fotóny považujeme za diskrétne častice, sila pôsobiaca na obruč bude nepravidelná. Ale keďže fotóny sa pohybujú extrémne veľkou rýchlosťou, budú tiež veľmi často narážať do steny. A ak bude čas medzi dvoma odrazmi $\Delta t$ veľmi malý, môžeme vypočítať priemernú silu pôsobiacu počas tohto času, zanedbať fluktuácie, a považovať silu za konštantnú, rovnú práve tejto priemernej sile.

Teda priemerná sila pôsobiaca počas intervalu $\Delta t$ od jedného fotónu bude

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\frac{E}{c}\sin\alpha}{\frac{2R\sin\alpha}{c}} = \frac{E}{R}.$$

Keďže fotón v obruči divoko poletuje, túto silu môžeme na základe rovnakého argumentu považovať za rovnomerne rozloženú po celej obruči. Navyše si všimnime, že sila nezávisí od uhla, pod ktorým Sajmon svieti – menší uhol znamená častejšie zrážky, pri ktorých sa však odovzdá menej hybnosti.

Keď Sajmon zasvieti do obruče laserom s výkonom $P$ po dobu $t$, vytvorí lúč s energiou $Pt$. To znamená, že v obruči sa bude nachádzať $\frac{Pt}{E}$ fotónov. Keďže podobné argumenty platia pre všetky fotóny, výsledná sila od $\frac{Pt}{E}$ fotónov bude $\frac{Pt}{E}$ krát väčšia, teda

$$F = \frac{Pt}{E}\frac{E}{R} = \frac{Pt}{R}.$$

Znova si môžeme všimnúť, že celková sila nezávisí od energie jedného fotónu, keďže väčšia energia znamená väčšiu silu od jedného, ale menej fotónov v celom lúči. To je sila pôsobiaca na obruč v radiálnom smere, takže ešte treba určiť ťahovú silu. To možno urobiť tak, že si predstavíme, že necháme obruč máličko zväčšiť a pozrieme sa na to, aké práce budú konané všetkými pôsobiacimi silami. Zo zákona zachovania energie potom možno dopočítať chýbajúcu silu $T$[4]. Keď sa polomer obruče zväčší o $\Delta r$, jej dĺžka sa zväčší o $2\pi\Delta r$. Radiálne sily vykonajú prácu

$$W = \frac{Pt}{R}\Delta r$$

a ťahové sily

$$W = T2\pi\Delta r.$$

Porovnaním týchto prác nájdeme neznámu silu

$$T = \frac{Pt}{2\pi R}.$$

**37** Na to, aby sme zistili, aký je moment zotrvačnosti Samkovej vysušenej cibule, si musíme uvedomiť niekoľko vecí. Prvým – pomerne triviálnym – poznatkom je, že moment zotrvačnosti gule je $\frac{2}{5}mR^2$, kde $m$ je hmotnosť plnej gule. Druhým poznatkom je fakt, že moment zotrvačnosti je aditívny: ak je výsledný objekt tvorený viacerými časťami, moment zotrvačnosti výsledného objektu okolo ľubovoľnej osi je súčtom momentov zotrvačností jednotlivých častí okolo tej istej osi. Ako posledné si stačí uvedomiť, že ak každý dĺžkový rozmer zväčšíme $k$-krát, hmotnosť sa zväčší $k^3$-krát. Inak povedané, treba vedieť škálovať.

Po tomto krátkom úvode sa môžeme pustiť do počítania. Prázdna časť cibule má rovnaký tvar ako jej plná časť, len je menšia, s faktorom škálovania dve tretiny. Všeobecný výraz momentu zotrvačnosti má tvar $cMR^2$ pre nejakú konštantu $c$. Hmotnosť $M$ sa škáluje s treťou mocninou rozmeru, polomer $R$ s prvou, takže moment zotrvačnosti prázdnej časti bude $\left(\frac{2}{3}\right)^5$-násobkom momentu zotrvačnosti plnej časti. Sčítaním momentu zotrvačnosti plnej a prázdnej časti by sme mali dostať moment zotrvačnosti celej gule. Ak označíme moment zotrvačnosti plnej časti $I$, platí

$$\frac{2}{5}mR^2 = I + \left(\frac{2}{3}\right)^5 I.$$

[4] princíp virtuálnych prác

V tomto prípade $m$ predstavuje hmotnosť plnej gule, takže keď ju vyjadríme rovnakým spôsobom pomocou hmotnosti cibule $M$, platí $m = M + \left(\frac{2}{3}\right)^3 M$. Z toho už triviálne dostaneme

$$I = \frac{2}{5}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^5}MR^2 = \frac{126}{275}MR^2.$$

**38** Na rozdiel od identického zapojenia so zdrojom jednosmerného napätia, pri striedavom zapojení už kondenzátory a cievky výrazne ovplyvnia výsledok. V striedavých obvodoch platí pre amplitúdy napätia $U$ a prúdu $I$ Ohmov zákon v pozmenenej podobe

$$U = |Z|I,$$

kde $|Z|$ je amplitúda impedancie. To znamená, že nám stačí vypočítať impedanciu zapojenia.

Všimnime si, že dve stredné vetvy s cievkou a rezistorom sú symetrické. To znamená, že potenciály na oboch koncoch prostredného kondenzátora budú rovnaké, a teda prúd pretekajúci tou časťou obvodu bude vždy nulový. Inak povedané, vetvu s kondenzátorom spájajúcu stredné dve vetvy môžeme úplne zahodiť. Tým nám prejde zapojenie na čisto sériovo-paralelné, takže pre impedanciu dostávame

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{2}{R+i\omega L} + i\omega C = \frac{3R - \omega^2 RLC + i\left(\omega R^2 C + \omega L\right)}{R^2 + i\omega RL}.$$

Pre amplitúdu impedancie teda platí

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}},$$

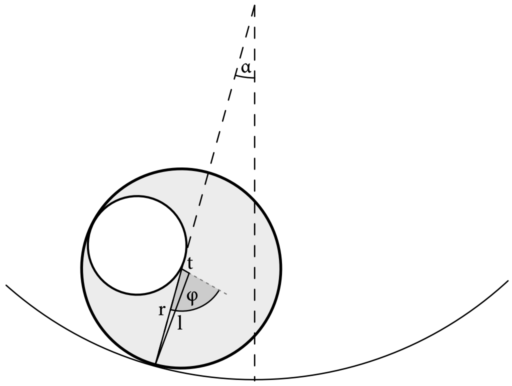
odkiaľ

$$I = U\sqrt{\frac{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}}.$$

**39** Najprv si povieme, ako vzniklo Jonášovo rozbité koleso. Predpokladajme, že je homogénne s plošnou hustotou $\sigma$. Pôvodné plné koleso má hmotnosť $\sigma\pi r^2$ a ťažisko v strede, čo si označíme ako súradnice $[0;0]$. Diera v ňom by mala hmotnosť $\sigma\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$ a ťažisko v bode $\left[0;\frac{r}{2}\right]$. To znamená, že rozbité koleso má hmotnosť $\frac{3}{4}\sigma\pi r^2$, $x$-ová súradnica ťažiska je triviálne nulová, a $y$-ovú získame z momentovej vety

$$y = \frac{\sigma\pi r^2 \cdot 0 - \sigma\pi\frac{r^2}{4}\cdot\frac{r}{2}}{\frac{3}{4}\sigma\pi r^2} = -\frac{r}{6}.$$

Toho znamienka sa nezľakneme. Hovorí iba o tom, že ťažisko je na opačnej strane ako diera v kolese. Označíme si teda $t = -y = \frac{r}{6}$ ako vzdialenosť ťažiska a stredu kolesa.




Obrázok 11: *Geometria kmitajúceho Jonášovho kolesa*

Zaujímajú nás malé kmity, takže sa pozrieme čo sa stane, keď sa koleso vychýli o uhol $\varphi$, inak povedané, keď sa dotykový bod kolesa s jamou posunie o kružnicový oblúk dĺžky $r\varphi$. Nový a pôvodný dotykový bod budú vzhľadom na stred krivosti jamy zvierať uhol $\alpha = \frac{r}{5r}\varphi = \frac{\varphi}{5}$.

Potenciálna energia vzhľadom na dno jamy bude

$$E_p = mgh = \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 gh,$$

kde výšku $h$ musíme prácne vyjadriť ako

$$h = 5r\left(1-\cos\alpha\right) + r\cos\alpha - t\cos(\varphi-\alpha) = r\left[5\left(1-\cos\frac{\varphi}{5}\right) + \cos\frac{\varphi}{5} - \frac{1}{6}\cos\frac{4\varphi}{5}\right].$$

Kinetickú energiu vyjadríme ako rotačnú energiu okolo okamžitej osi otáčania, avšak tá sa bude neustále meniť. Preto

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2,$$

kde $I_A$ je moment zotrvačnosti okolo aktuálnej osi otáčania. Ťažisko bude od tejto osi vzdialené $l$, pričom platí kosínusová veta $l^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi = r^2\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)$.

Zostala nám jediná neznáma: moment zotrvačnosti Jonášovho kolesa okolo bodu otáčania. Ako prvé si potrebujeme vypočítať moment zotrvačnosti okolo ťažiska $I_T$. Použijeme Steinerovu vetu a fakt, že sčítaním momentu zotrvačnosti rozbitého kolesa a toho, čo mu chýba okolo stredu, dostaneme moment zotrvačnosti plného, nepokazeného kolesa. Moment zotrvačnosti plného disku je vo všeobecnosti $\frac{1}{2}mR^2$, platí teda

$$\frac{1}{2}\sigma\pi r^2 r^2 = \left(I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 t^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2\right).$$

Po prácnej úprave dostaneme $I_T = \frac{37}{96}\sigma\pi r^4$. Po opätovnom použití Steinerovej vety dostávame pre moment zotrvačnosti okolo aktuálneho bodu otáčania výraz

$$I_A = I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 l^2 = \sigma\pi r^4\left(\frac{37}{32} - \frac{1}{4}\cos\varphi\right).$$

Zaujímajú nás malé kmity, takže spravíme vo výraze $I_A$ zanedbanie $\cos\varphi \approx 1$, čím sa nám výraz pre moment zotrvačnosti zjednoduší na

$$I_A = \frac{29}{32}\sigma\pi r^4.$$

Nakoniec si vyjadríme celkovú energiu rozbitého kolesa (až na konštantný člen), pričom v potenciálnej energii rozvinieme výrazy typu $\cos x$ až do druhého rádu Taylorovho rozvoja. Teda $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Dostávame

$$E = \frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g\varphi^2 + \frac{29}{64}\pi\sigma r^4\omega^2 = \text{konšt.},$$

čo nie je nič iné, ako energia harmonického oscilátora s periódou, ktorá je určená konštantami pri $\varphi^2$ a $\omega^2$. Takže Jonášovo rozbité koleso bude kmitať s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{29}{64}\pi\sigma r^4}{\frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{145}{32}\frac{r}{g}}.$$

**40** Označme si vzdialenosť od protizávažia ku kĺbu ako $x$. V zadaní sa nehovorí o tom, v ktorom okamihu natočenia trebőchetu má byť obvodové (translačné) zrýchlenie maximálne, čo ale neprekáža, keďže zrýchlenie závisí od uhla natočenia len faktorom $\cos\alpha$. Takže ak maximalizujeme zrýchlenie pre ľubovoľný uhol, bude maximálne v každom uhle. Napíšme si výraz pre obvodové zrýchlenie projektilu pre nulový uhol natočenia

$$\begin{aligned} a &= (L - x)\,\varepsilon \\ &= (L - x)\,\frac{\tau}{I} \\ &= (L - x)\,\frac{Mgx - mg\,(L - x)}{Mx^2 + m\,(L - x)^2}. \end{aligned}$$

Úloha teraz spočíva v maximalizovaní tohoto výrazu vzhľadom na premennú $x$. Za tým účelom ho upravíme do praktickejšieho tvaru

$$a = \frac{MLx}{Mx^2 + m\,(L - x)^2} - 1.$$

Ak chceme maximalizovať tento výraz, na konštantný člen môžeme zabudnúť. Ďalej si možno prácu zjednodušiť tak, že ak hľadáme maximum nejakého kladného výrazu, je to zároveň minimum jeho prevrátenej hodnoty. Takže budeme hľadať minimum výrazu

$$a = \frac{Mx^2 + m\,(L - x)^2}{MLx}.$$

Teraz možno postupovať dvoma spôsobmi – buď pomocou derivovania, alebo využitím AG nerovnosti[5]. Tá hovorí, že aritmetický priemer nejakých čísel je vždy väčší ako ich geometrický priemer. Pre dve čísla

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

[5] nerovnosť aritmetického a geometrického priemeru

čo sa dá dokázať jednoducho umocnením oboch strán. Ak teraz urobíme substitúcie $a \to ax$ a $b \to \frac{b}{x}$, pravá strana rovnice sa nezmení a nerovnosť prejde po úprave na

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Zhodou náhod sa náš výraz dá jednoducho upraviť (skoro) do tvaru ľavej strany tejto nerovnosti

$$a = \frac{m+M}{ML}x + \frac{mL}{Mx} - \frac{2m}{M}.$$

Našťastie, nadbytočný člen je opäť len konštantný, takže ho môžeme ignorovať. Z AG nerovnosti vyplýva, že tento výraz je pre ľubovoľný výber čísla $x$ väčší alebo rovný ako

$$2\frac{\sqrt{(m+M)m}}{M}.$$

My ale chceme vybrať také $x$, aby bol výraz čo najmenší, čo sa udeje práve v prípade rovnosti. Takže dostávame rovnicu pre $x$

$$\frac{m+M}{ML}x + \frac{mL}{Mx} = 2\frac{\sqrt{m(m+M)}}{M},$$

čo po úpravách prejde na kvadratickú rovnicu s riešením

$$x = \sqrt{\frac{m}{m+M}}L.$$

Pre úplnosť si ukážeme aj postup pomocou derivovania. Výraz nadobudne minimum v bode, keď je jeho derivácia nulová

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Mx^2 + m(L-x)^2}{MLx} = \frac{2Mx - 2m(L-x)}{MLx} - \frac{Mx^2 + m(L-x)^2}{MLx^2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Ak vyriešime túto rovnicu, dostaneme ten istý výsledok ako predtým.

# Výsledky

**1** $t = \dfrac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}$

**2** 10,39 m/s

**3** Martin, o 6 minút

**4** 34,5 %

**5** $\dfrac{t_1 - t_2}{2}$

**6** $\dfrac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}$

**7** 11 cm

**8** $\dfrac{u}{u+v} = \dfrac{1}{1+\frac{v}{u}}$

**9** $\left[\dfrac{2521}{177}a;\ \dfrac{13}{2}a\right]$

**10** 80 cm

**11** 4,5 m

**12** 60°

**13** $3\dfrac{U}{R}$

**14** $\dfrac{7}{9}$

**15** 0°

**16** Približne 95 mm.

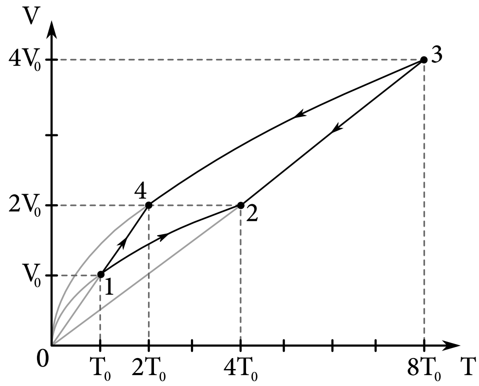
**17** 2,17 g. *Uznajte výsledky, ktoré sa líšia od uvedenej hodnoty o najviac* 0,01 g.

**18** $\dfrac{5M}{4m}$

**19** $\dfrac{4}{5}$

**20** 230,9 km. *Uznávajte hodnoty v rozsahu* 229,9 km *až* 231,9 km.

**21** *Dbajte na to, aby odovzdané grafy mali vyznačené všetky dôležité hodnoty na osiach, šípky popisujúce priebeh deja mali správny smer a priamky aj paraboly po predĺžení prechádzali cez počiatok. Pokojne sa pýtajte riešiteľov na tvar kriviek, tzn. či naozaj vedia, že sú to odmocniny.*




**22** 116 m$^2$

**23** $\dfrac{\pi R^3 \rho}{3}$

**24** $\arcsin\left(\dfrac{m}{M+m}\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$

**25** $\dfrac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$

**26** 29,43 m/s.

**27** 1-krát – intenzita poľa bude rovnaká

**28** 1,6 dm$^3$

**29** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

**30** Magnetické pole je nulové.

**31** $\sin\varphi_0$

**32** 3 538 765 km$^2$. *Uznávajte hodnoty, ktoré sa od tejto líšia o menej ako* 10 000 km$^2$.

**33** $T = \dfrac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

**34** $\frac{11}{61} \doteq 0{,}18\,c$

**35** Prvá príde na vrch kladky Katka a jej vzdialenosť od Vladka bude $\frac{2}{3}H$.

**36** $\frac{Pt}{2\pi R}$

**37** $\frac{126}{275}MR^2$

**38** $U\sqrt{\frac{(3R-\omega^2RLC)^2+(\omega R^2C+\omega L)^2}{R^4+\omega^2R^2L^2}} = U\frac{\sqrt{(3R^2+\omega^2L^2)^2+(\omega R^3C-2\omega RL+\omega^3RL^2C)^2}}{R^3+\omega^2RL^2}$

*Akceptujte aj výsledky v inom tvare, ak sú rozumne zložité a dajú sa pohľadom overiť.*

**39** $2\pi\sqrt{\frac{145}{32}\frac{r}{g}}$

**40** $x = \sqrt{\frac{m}{m+M}}L$