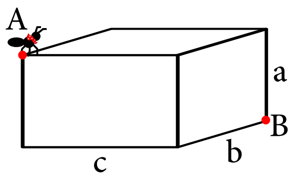
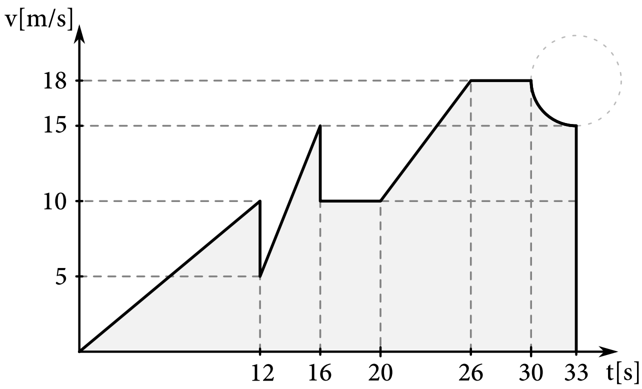
Feladatok

1 Krisz a hangya egy téglatest csúcsában ül, mely oldalai a, b és c, ahol $a < b < c$. A hangya szeretne eljutni az A csúcsból B csúcsba amilyen gyorsan csak lehet. Krisz sebessége v. Mennyi ideig fog tartani az útja?



2 Andris egykerekűzni tanul. Az ábra a pillanatnyi sebességét mutatja az idő függvényében. Határozzátok meg Andris átlagsebességét!



3 Kristóf és Adrián Krakkóba utaznak. Kristóf egy olyan út mellett áll, ahol 50 autó halad a megfelelő irányba, eközben Adrián egy másik helyen várakozik, ahol 25 autó halad percenként.

A Krakkóba vezető út 100 percbe telik Kristófnak azután, hogy sikerült egy autót lestoppolnia, Adriánnak azonban csak 90 percbe. Statisztikailag, ki érkezik előbb Krakkóba és mennyivel? A tapasztalatok alapján tudják hogy átlagosan minden 200. autó vesz fel stopposokat.

4 Joli nagyi talált egy nagy bödön ismeretlen alkoholos italt a pincéjében. Úgy találta, hogy a térfogat 40 százaléka alkohol, a maradék pedig víz. Hány tömegszázalékos az ital, ha a tömény etanol sűrűsége 790 kg/m^3?

Kerekítsd az eredményt tized tömegszázalékra!

5 John Glasgowból Edinburghbe utazik autóval. Egyenletesen gyorsít nyugalmi helyzetből egészen addig, míg eléri a maximális megengedett sebességet, ezután tartja ezt a sebességet és az utazás végén egyenletesen lassít le, míg meg nem áll. A gyorsítás és a lassítás együttesen t_1 időbe telik. A visszaúton sietnie kell, de nem mehet gyorsabban a maximális sebességnél, tehát az egyetlen dolog amit tehet, hogy kevesebb idő alatt gyorsít fel és lassít le. A gyorsítás és lassítás a visszaúton $t_2 < t_1$ időt vesz igénybe. Mi volt a különbség az utazási idők között?

6 Egy kerti locsoló r sugarú fúvókájából v sebességgel ρ sűrűségű vizet locsol felfelé. Mekkora a bármely pillanatban a levegőben lévő víz tömege? A locsoló mindig is be volt kapcsolva.

7 George idegesen fészkelődik. Már reménykedni sem mer. De összegyűjti minden bátorságát és odamegy az eladó asztalához.

“Van üreges téglájuk?”-kérdezi.

Meglepő módon az eladó nem hívja azonnal a biztonságiakat, ahogy azt általában tenni szokták, hanem mosolyogva válaszol.

“Természetesen! Milyen méretűt szeretne?”

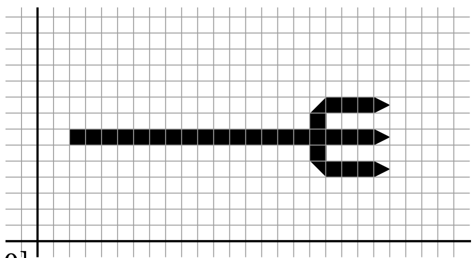
George olyan tökéletesen üreges és teljesen üres téglát rendelhet magának, amelynek három oldalhosszúsága rendre: k, $2k$ és $4k$. A tégla anyagának felületi sűrűsége 0,04 kg/m^2. De George azt szerené, ha az első üreges téglája különleges lenne. Azt akarja, hogy lebegjen a levegőben, aminek a sűrűsége 1,3 kg/m^3. Mi legyen k paraméter értéke, hogy teljesüljön a kívánsága?

Az eredményt centiméterre kerekítve adjuk meg!

8 Egy forró nyári napon Arthur kitöltötte kedvenc szénsavas italát egy pohárba. A folyadék tetején egy hab réteg képződött. Ekkor azt figyelte meg, hogy a hab szintje u sebességgel csökkent, míg a folyadék szint v sebességgel nőtt. Mekkora volt a levegő térfogat aránya a habban?

9 A Náboj Fizika terjeszkedhetne Ázsiától kezdve, Ausztrálián át, akár még az óceánokba is! Ehhez azonban a szervezőknek szükségük lenne egy megfelelő jogarra. Találjuk hát meg a háromágú szigony tömegközéppontjának koordinátáit! A rácson egy négyzet oldalának hossza a.

Az eredményt írjuk át tört alakra.



10 Minas Tirith magas tornyában történt egy kisebbfajta felvonó-baleset. A lift felvonókötelei elszakadtak és a kabin 3 m magasságból lezuhant, benne egy szerencsétlen, bent rekedt hobbittal. Öröm az ürömben, hogy épp egy képzett alkalmazott fizikus hobbittal történt az eset, aki tisztában volt azzal, hogy az ütközés rá gyakorolt hatásának erejét képes tompítani egy jól időzített ugrással, pontosan a becsapódás előtt. Normál helyzetben hobbitunk 0,7 m magasra képes ugrani.

Milyen magasságból kellene leugrania a liften kívül, hogy ugyanazt a becsapódási sebességet érje el, mint amekkorával a lift zuhanása és a saját felugrása után végül megérkezett a földre? A hobbit az utolsó lehetséges pillanatban ugrik, és a tömege elhanyagolható a kabin tömegéhez képest.

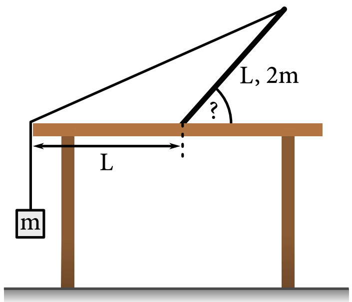
Az eredményt cm*-re kerekítve kérjük megadni.*

11 Katika egykeként magányosnak érezte magát. Ezért eldöntötte, hogy kamatoztatni fogja szobrász tehetségét és egy ikret farag magának. Azonban rengeteg beletett és átoldogott éjszaka minden munkájának ellenére az eredmény nem lett megkülönböztethető egy hengertől, melynek sugara 0,3 m, magassága 1,8 m és sűrűsége pedig 200 kg/m^3 lett. Úgy döntött elviszi a mindenkit megszégyenítően gyönyörű művét az uszodába megmutatni a barátnőinek.

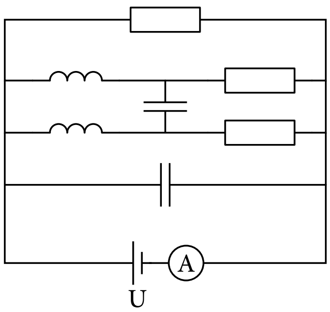
A medencében először beletette a hengert, melyet szépen lassan belenyomott a vízbe egészen addig, hogy annak teteje nem látszott ki. Ezután elengedte a szobrot, mely a felhajtóerőnek köszönhetően "felugrott" a vízben. Mi volt a maximális magassága a vízszinthez képest a henger legfelsőbb pontjának az ugrás során?

Tegyük fel, hogy a henger függőleges állapotban marad az ugrás alatt és hanyagoljuk el a víz áramlását és felületi feszültségét.

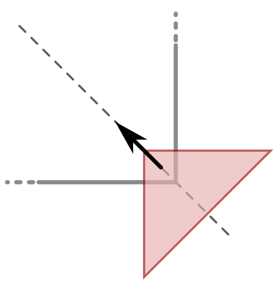
12 Egy L hosszú, $2m$ tömegű rúd egyik vége egy asztalhoz van rögzítve, úgy, hogy a vízszintes tengely körül szabadon tudjon forogni. A rúd másik végéhez egy tömeg nélküli kötél van erősítve, amely szabadon lóg az asztal szélén túl. A kötél lógó végére egy m tömegű ellensúly van rögzítve. A távolság az asztal széle és a a rudat az asztalhoz rögzítő csukló között szintén L. Mekkora a rúd és az asztal által bezárt szög, ha a rendszer instabil egyensúlyi helyzetben van?



13 Egy elektromos áramkörben R ellenállású ellenállások, C kapacitású kondenzátorok, L induktivitású tekercsek és egy ideálisnak tekinthető áramerősség mérő van. A vezetékek is ideálisnak tekinthetőek. Az áramkört U feszültségű feszültségforrásra kötöttük. Mit mutat ekkor az áramerősség mérő?



14 Tomi úgy döntött, hogy egy tetővel szeretné beborítani a fedetlen nyári házát. Tervei szerint egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú fedőlapot szeretne rakni a nyári lak két merőleges falának tetejére. Az átló mentén, ahogyan az ábra is mutatja, a lehető legbeljebb helyezné a tetőt, hogy az a lehető legjobban fedje a házat. A tető mekkora hányada fedi így a nyári lak belsejét?



15 József, a felfedező elveszett a sivatagban. Az egyetlen eszköz, amit magával vitt, egy üvegből készült téglatest, négyzet alakú alaplappal, melynek alapélei 10 cm-esek, magassága 20 cm és törésmutatója 1,5. József számára ismeretlen okokból a téglatest fedlapja feketére volt festve.

Néhány nap végtelen bolyongás után József észrevette, hogy a festett fedlap által vetett árnyék sokkal kisebb, mint maga a lap. Mekkora lehet a Nap legnagyobb magassága az égen, hogy a fedlapnak semmilyen árnyéka ne legyen?

16 Szenilla, a hal lassan úszkál a tenger felszínéhez képest 1 km mélyen és szokásához híven az élet értelméről meditál. Ebben a mélységben a víz hőmérséklete 4 °C. Szenilla 2 cm sugarú légbuborékot bocsát ki, mely rögtön elkezd emelkedni a felszín felé.

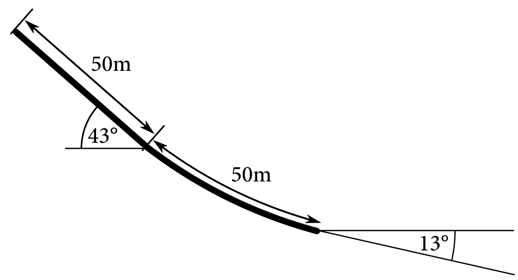
Mi lesz a sugara a buboréknak éppen a felszín elérése előtt, ahol a víz hőmérséklete 18 °C?

Tételezzük fel, hogy a tengervíz összenyomhatatlan és hogy a buborékban a kapilláris nyomás a teljes nyomáshoz képest elhanyagolható. Továbbá tegyük fel azt is, hogy a levegő a buborékon belül azonnal felveszi a környezetének hőmérsékletét.

Az eredményt mm *pontossággal add meg.*

17 Philip úgy döntött, kipróbálja az extrém sportokat. Múlt télen a síugrást választotta. A síugró sánc vázlatos rajza látható az alábbi ábrán. A sánc egy 50 m hosszú lejtővel indul, melynek meredeksége 43°, majd ez folytonosan átmegy egy körív szakaszba, melynek ívhossza 50 m. A lejtő, ahonnan végül elrugaszkodik a vízszintes tengellyel 13°-os szöget zár be. Mekkora volt a Philipet érő maximális nehézségi gyorsulás, miközben a sáncon haladt lefelé?

Az egy testre ható nehézségi gyorsulást a test szabadeséshez viszonyított gyorsulásaként definiáljuk.

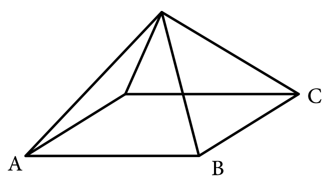


18 Ádám szereti a kötélugrást (bungee jumping). Mikor a gyomra üres, Ádám pontosan M tömegű, ekkor az oszcillációjának periódusideje T.

Mennyi palacsintát kell megennie ahhoz, hogy másfélszeresére növelje periódusidejét, ha egy palacsinta tömege m?

19 Kati idén Egyiptomban nyaralt. Hazatérése után 8 teljesen megegyező, ξ egységnyi hosszúságra jutó ellenállással rendelkező, L hosszú drót segítségével összeforrasztott egy piramist, ami az alábbi képen látható.

Mi az A–B és A–C csúcspárok közötti ellenállások aránya?



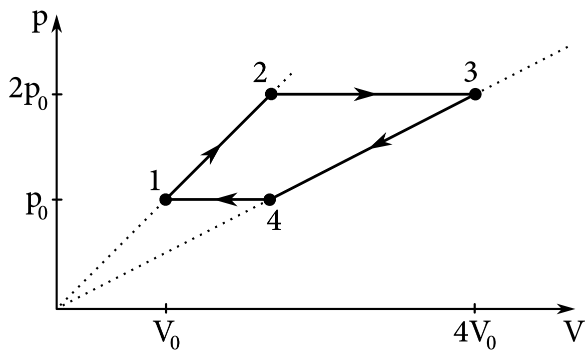
20 Martin tehetséges diákként számos csillagászati versenyen vesz részt. Utazásai alatt bejárta a fél világot. Az egyik ilyen versenyen éppen az egyenlítőn volt, amikor észrevette, hogy egy fényes mesterséges objektum suhan el a feje felett az égbolton. Stopperével lemérte, hogy a nyugati horizonttól a keleti horizontig 8 percre volt szüksége az objektumnak, hogy az égboltot bejárja.

Milyen magasan volt az objektum, ha feltesszük, hogy körpályán kering? (A Föld forgása nagyon fontos!!)

Megjegyzés: a problémának nincs analitikus megoldása. Olyan megoldásokat fogadunk el, melyek kevesebb, mint 1 km-vel térnek a tényleges eredménytől.

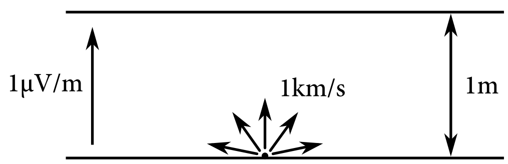
21 Egy ideális gáz kezdeti nyomása p_0, térfogata V_0 és hőmérséklete T_0. Egy körfolyamatot végzünk a gázzal, melyet mellékelt $p - V$ diagram szemlélet. Rajzoljuk újra, de VT diagrammként!

Megjegyzés: a gáz mennyisége nem változott a folyamat alatt. Ne felejtsük el az összes fontosabb mennyiséget jelölni a diagrammon.

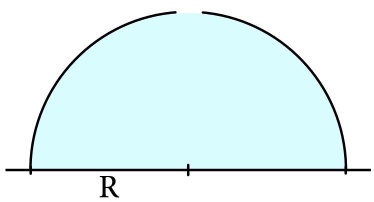


22 Egy izotrop elektronforrást egy végtelen síkkondenzátor alsó fegyverzetére helyeztünk. Az elektródák közti távolság 1 m, és az elektromos térerősség 1 μV/m. Az elektronok a forrást minden irányban 1 km/s-os sebességgel hagyják el. Mekkora a fegyverzeteknek azon összfelülete, amelyet az elektronok el tudnak találni?

Az eredményt kerekítsd m^2*-re!*



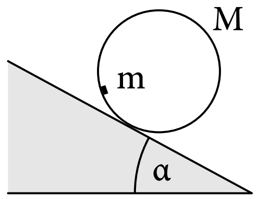
23 Karolina befejezte a főzést! Megfordítva az asztalra helyez egy félgömb alakú, R sugarú üreges edényt, és egy lyukat fúr az edény közepébe. Ezt követően ρ sűrűségű vizet kezd el önteni az edénybe a lyukon keresztül. Mielőtt teljesen megtelne és kicsordulna a víz a tetején, az edény megemelkedik és az alján keletkezett résen a víz kifolyik. Mekkora az edény lehetséges maximális tömege?



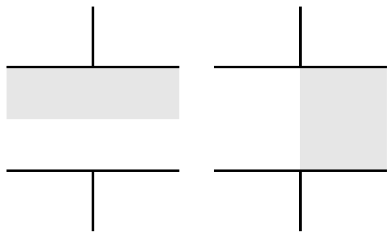
24 Egy m tömegű sajtot helyezünk egy üres, henger alakú hordóba, melynek tömege M. A súrlódási együttható a sajt és a hordó anyaga között μ. A hordót egy α meredekségű hegy oldalán helyezzük el.

Mi az a maximum α, mely mellett a hordó nyugalomban marad?

Tételezzük fel, hogy a súrlódási együttható a hegy és a hordó között elég nagy ahhoz, hogy ne csússzon meg vagy le.



25 Egy ε relatív permittivitású dielektrikumot helyeztünk két azonos kondenzátor fegyverzetei közé. Az első esetben a kondenzátor felső felébe, a második esetben a jobb oldali felébe helyeztünk a dielektrikumból. Mekkora a két kondenzátor kapacitásainak aránya? (az első aránya a másodikhoz)

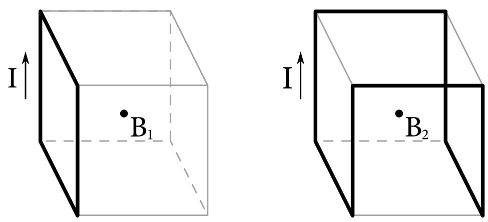


26 Kinga, Nándor és János megmászták a Tarnica csúcsát. Annak érdekében, hogy János legalább egy kis időre elhalgasson, Kinga kitalált egy játékot, melyben egy anemométert, vagyis a szél sebességének mérésére használható eszközt kell eljátszaniuk. Egy 90 m oldalú négyzet 3 csúcsában helyezkedtek el úgy, hogy Kinga és Nándor szemközti csúcsokban álltak. Először Kinga és Nándor kiáltottak, ekkor János figyelt és megmérte, mennyi idő kellett a hangnak, hogy elérje őt. Kinga kiáltásának 255 ms, és Nándor kiáltásának 285 ms kellett, hogy Jánoshoz érjen.

Sajnos Kinga tervének volt egy hátránya. Ahhoz, hogy a szélmérő jól működjön, ezután Jánosnak kellett kiáltania és nekik figyelniük. Jánostól Kingáig 304 ms, Jánostól Nándorig pedig 272 ms kellett a hangnak, hogy odaérjen. Mi volt a szélsebesség a Tarnica csúcsán? Feltételezzük, hogy a hangsebesség nem ismert.

A választ tized m/s *pontossággal adjátok meg.*

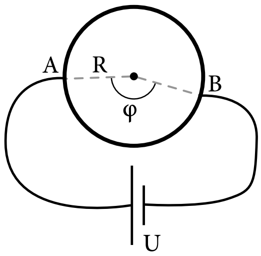
27 A kocka alakú ellenállás hálózatok nem érdekesek többé. Egy ilyen helyett, Marci inkább úgy döntött, hogy mágneses mezők magnitúdóját méri meg. Amikor az áram csak a kocka egyik oldala körül áramlott, B_1-nek mérte az intenzitását a mágneses mezőnek. Aztán Marci egy új alakzatú vezetőt vizsgált ugyanazon kockára hajlítva. Hányszor nagyobb a mágneses mezeje a második alakzatnak, mint az elsőnek?



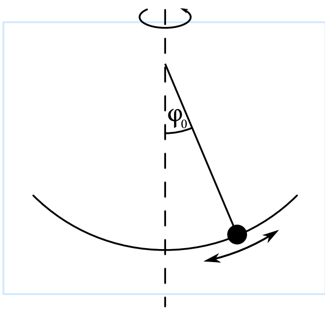
28 Nusi vett egy karton tejet. A négyzetalapú karton alapjának hossza 1 dm és a magassága 3 dm. Meg szeretné inni a tej egy részét majd ráhelyezni egy 30°-os leejtőre. Mi az a maximális térfogat dm^3-ben a tejből amit a kartonban hagyhat anélkül, hogy az felborulna?

29 Egy bolygó lassan kering a csillaga körül egy körpályán. Azonban a nyugodt környezete már nem a régi: állandóan bosszantó aszteroidák röpködnek körülötte, a csillaga túl fényesen világít és a közeli civilizáció egyre több és több zenélő autót lő ki az űrbe. Nem csoda, hogy a bolygónak betelt a pohár és széthasad két részre. Mindkét darab az eredeti pálya síkjában mozog, de most már parabolikus pályán vannak, melyek perihéliuma (napközeli pontja) az eredeti bolygó helyzete a hasadás pillanatában. Mi a tömegeik aránya (könnyebb a nehezebbhez)?

30 Szméagol szabadidejében régi elektronikus berendezésekkel játszott a földalatti tavának szélén. Elővette kedvenc aranyból készült, R sugarú és λ egységnyi hosszúságra jutó ellenállással rendelkező gyűrűjét és U feszültséget kapcsolt rá. A gyűrűre kötött vezetékek kapcsolódási pontjai a gyűrű körívén φ szöget zártak be egymással a kör középpontjából tekintve. Ezt követően megmérte a mágneses indukciót a gyűrű középpontjában. Mekkora a mező értéke?



31 Mike egy matematikai ingával játszott. Az ingát két párhuzamos lemez közé helyezte, hogy a mozgását egy síkra korlátozza. Ezt követően az ingából és a lemezekből álló rendszert állandó szögsebességgel forgatni kezdte a függőleges tengely körül. Az inga ennek következtében beállt az egyensúlyi helyzetébe, a függőleges tengellyel $\varphi_0 \gg 0$ szöget bezárva. Ezt követően Mike az inga végén lévő súlyt kissé megpöccintette, amely így az egyensúlyi helyzet körül oszcillálni kezdett. Találjátok meg az inga függőleges tengely körüli forgási periódusidejének és a kis oszcillációk periódusidejének arányát!



32 Palacsintária egy végtelen, lapos korong alakú (elképzelt) világ. Fölötte egy gömbszerű Nap kering $h = 500$ km-es magasságban, melynek sugara $R_\odot = 10$ km és a hőmérséklete $T_\odot = 5777$ K. Valahol Palacsintárián kialakult egy lakható zóna, ahol az egyensúlyi hőmérséklet 0 °C és 30 °C között van. Mekkora ennek a zónának a területe?

Mind Palacsintária, mind a Nap abszolút fekete testek. Palacsintária nem vezeti a hőt, és csak felfelé sugároz. A Nap látószöge elhanyagolható a felületről. Csak azon megoldások lesznek elfogadva, amelyek az egzakt értéktől 10 000 km^2*-nél nem többel térnek el.*

33 Egy űrhajós egy M tömegű, R sugarú aszteroidán áll. Pár óra után rájön, hogy egy aszteroida felszíne nem a legizgalmasabb hely. Nincs WiFi és mivel űrruhában van, a körmét sem tudja rágni. Hogy elszórakoztassa magát, elkezd ugrálni. A felszínhez képest 45° fokkal ugrik el, és egy rövid idő után akkora távolságban ér le, ami a kerület negyede. Mennyi ideig tartott a repülése?

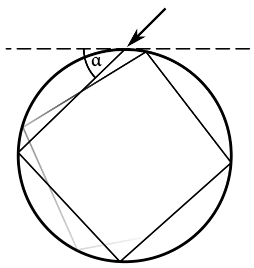
Az aszteroida sokkal nehezebb, mint az űrhajós.

$\boxed{34}$ A szerencsétlen sofőrt, Andrást megállította egy rendőr mert átment a piroson. András megpróbálta elhitetni a rendőrrel, hogy a piros lámpa neki zöldnek tűnt. Segítsünk tisztán látni a rendőrnek! Milyen gyorsan kellett volna mennie a sofőrnek ahhoz, hogy a 660 nm hullámhosszú piros fényt 550 nm hullámhosszú zöld fénynek lássa?

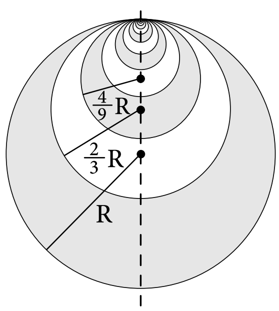
A választ a fényebesség hányadában add meg!

$\boxed{35}$ Levelibéka Kati és Varangy Misi egy kötél két végén lógnak le egy emelőcsigáról. Mindketten egyenlő H távolságra vannak a csigától. Misi kétszer olyan nehéz mint Kati. annak érdekében, hogy egyensúlyban tartsuk a rendszert, egy ellensúlyt akasztunk Kati oldalán a kötél végére. Amikor Misi a többszörös figyelmeztés ellenére sem hagyja abba a brekegést, Kati a kötélhez képest v sebességel elkezd fölfelé mászni a kötélen. Melyik béka éri el hamarabb a csigát, illetve ekkor milyen távol lesz a másik kétéltű?

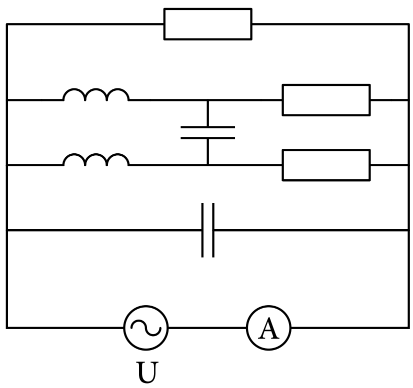
$\boxed{36}$ Saymon, a rapper eléggé megszedte magát, és vett egy luxuskabriót R sugarú, tökéletesen tükröző krómacél felnikkel. Amikor bevilágít egy lézerrel a kerékbe az annak tengelyére merőleges síkban, a nyaláb a belső felületen pattog körbe a végtelenségig. Mekkora a **szakítóerő**, ami hat a keréken, ha Saymon lézere P teljesítményű, a lézer t időn keresztül világított, illetve a szög a nyaláb és a kerék felszínének érintője közt α volt?



$\boxed{37}$ Sámuel egy orbitális méretű hagymával lepte meg magát. Azonban sajnos egy hosszú éjszaka után kint felejtette az erkélyén és a hagyma egy része kiszáradt. A maradék hagymának gömb alakja van, melynek sugara R, benne pedig egy gömbszimmetrikus üreg van, $\frac{2}{3}R$ sugárral. Az üregen belül egy újabb gömbszimmetrikus héj van $\left(\frac{2}{3}\right)^2 R$ sugárral. A héjon belül ismét egy üreg található $\left(\frac{2}{3}R\right)^3$ sugárral. Az üregben ismét egy gömbjéj van, melyen belül egy újabb üreg és így tovább… Mi a hagymánk tehetetlenségi nyomatéka az ábrán látható forgástengely körül, ha annak tömege M?

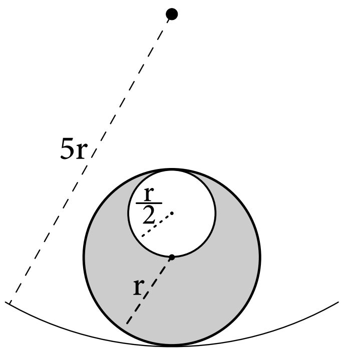


38 Egy elektromos áramkörben R ellenállású ellenállások, C kapacitású kondenzátorok, L induktivitású tekercsek és egy ideálisnak tekinthető áramerősség mérő van. A vezetékek is ideálisnak tekinthetőek. Ebben az esetben az áramkör egy AC-generátorhoz (AC = Alternating Current = Váltakozó áram) van csatlakoztatva, aminek maximális feszültsége U és körfrekvenciája ω. Mekkora az áramerősség mérőn megjelenő jel maximuma?



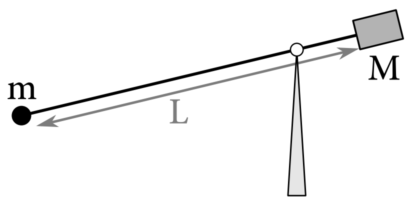
39 Jónás egy hepehupás úton haladt a lovas kocsijával. Egyik kereke, melynek sugara r, egy $5r$ sugarú gödörben megakadt. Miközben megpróbálta kihúzni a kocsit a gödörből, a kerék letörött a tengelyéről és egy $r/2$ sugarú lyukat eredményezett a kerék anyagában, mint ahogy ez a képen látható.

Jónás figyelmét felkeltette a még oda-vissza guruló törött kerék mozgása a gödörben. Mi a periódusideje a kerék kis oszcillációinak?



40 Gyuri hadászati mérnök. A következő küldetése, hogy lerombolja egy várat. Egy svéd bútoráruházba tett látogatása során, mely áruházat nem nevezzük nevén, egy csodálatos KÖHAJITÖ-re sikerült szert tennie. Ez nem más, mint egy tömegtelen, L hosszúságú rúd, M tömegű ellensúllyal és m tömegű lövedékkel felszerelve, valamint egy tengely, amely körül a rúd forogni tud.

Ám Gyurinak adódott egy kis problémája: a kőhajító darabokban érkezett meg hozzá, és össze kellene állítania. Milyen messze kell helyeznie atengelytől az ellensúlyt, hogy annak elengedésekor a lövedék egyenes gyorsulása a lehető legnagyobb legyen?



Megoldások

1 Annyit kell tennünk, hogy felrajzoljuk a téglatest hálóját. A legrövidebb út a hálón a legrövidebb út A és B pont között is. Azonban több lehetséges útvonal is van, mivel több lehetséges háló van. A Pitagorasz-tételből a legrövidebb útvonal vagy

$$s_1 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}, \text{ vagy} \quad s_2 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \quad, \text{ vagy} \quad s_3 = \sqrt{(c+a)^2 + b^2}.$$

Az $a < b < c$ feltétel miatt az a legrövidebb út az, amelyikben benne van annak a téglalapnak az átlója, amelyik legjobban hasonlít egy négyzethez. A mi esetünkben ez s_1, így a végső idő, hogy B-t elérjük

$$t = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}.$$

2 Az átlagsebesség a teljes megtett út és a teljes idő hányadosaként számolható ki. A teljes idő leolvasható a grafikonról. A teljes megtett út a grafikon alatti területből számítható ki, a következő módon:

$$s = \frac{12 \cdot 10}{2} + \frac{(15-5) \cdot 4}{2} + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + \frac{(18-10) \cdot 6}{2} + 10 \cdot 6 + 18 \cdot 4 + \left(3^2 - \frac{\pi 3^2}{4}\right) + 15 \cdot 3 \doteq 342{,}931.$$

Ezt behelyettesítve:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{342{,}931 \text{ m}}{33 \text{ s}} \doteq 10{,}39 \text{ m/s}.$$

3 Először is meg kell vizsgálnunk, hogy mennyi ideig várnak átlagosan arra a fiúk, hogy felvegyék őket. ezt követően hozzá kell adnunk, hogy mennyi időbe telik számukra a Krakkóba vezető út. Átlagban, minden 200. autós vesz fel stopposokat, szóval az átlagos idő, amit a fiúk várakozással töltenek, $\frac{200}{k}$, ahol k az autók percenkénti gyakorisága.

Arra a megoldásra jutunk, hogy Kristóf $\frac{200}{50} + 100 = 104$ perc alatt érkezik Krakkóba, míg Adrián $\frac{200}{25} + 90 = 98$ perc alatt. Tehát Adrián átlagban 6 perccel ér korábban oda, mint Kristóf.

4 Először is végig kell gondolnunk, hogy mit jelent a "térfogatszázalék". Esetünkben ez az etanol térfogatának és a teljes térfogatnak az aránya. A térfogatszázalékot át tudjuk váltani tömegszázalékra, ha ismerjük az etanol, illetve a teljes ital sűrűségét. A ϱ tömegszázalék kifejezhető:

$$\frac{V_{\text{et}} \rho_{\text{et}}}{V_{\text{ital}} \rho_{\text{ital}}} = \frac{m_{\text{et}}}{m_{\text{ital}}} = \varrho.$$

Az etanol sűrűsége meg van adva, míg az ital sűrűségét ki tudjuk számolni. Az ital vízből és etanolból áll, és a sűrűségre:

$$\rho_{\text{ital}} = 0{,}4 \rho_{\text{etanol}} + 0{,}6 \rho_{\text{víz}},$$

$$\rho_{\text{ital}} = 0{,}4 \cdot 790 \text{ kg/m}^3 + 0{,}6 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_{\text{ital}} \doteq 916 \text{ kg/m}^3.$$

Ezt a tömegszázalékra vonatkozó egyenletbe behelyettesítve:

$$\varrho = \frac{V_{\mathrm{et}}\rho_{\mathrm{et}}}{V_{\mathrm{ital}}\rho_{\mathrm{ital}}} = 0{,}4\frac{\rho_{\mathrm{et}}}{\rho_{\mathrm{ital}}},$$

$$\varrho = 0{,}4 \times \frac{790\ \mathrm{kg/m^3}}{916\ \mathrm{kg/m^3}},$$

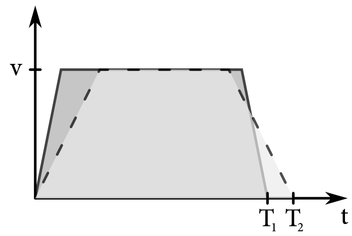
$$\varrho \doteq 0{,}345 = 34{,}5\ \%.$$

Az ital megközelítőleg 34,5 tömegszázaléknyi alkoholt tartalmaz.

5 Ahhoz, hogy kiszámítsuk a teljes távolságot, ki kell számolnunk a $v(t)$ grafikonon a görbe alatti területet. A feladat szövege alapján a görbe trapéz alakú. A trapéz területe pedig:

$$s = \frac{v\,(a+c)}{2},$$

ahol a és c a trapéz alapjai és v a trapéz magassága.



Tudjuk, hogy a teljes távolság mindkét esetben ugyanannyi, tehát a trapézok területe megegyezik.

$$\frac{(2T_1 - t_1)\,v}{2} = \frac{(2T_2 - t_2)\,v}{2},$$

ahol T_1 az odautazás teljes ideje T_2 a visszaút teljes ideje és v a maximális sebesség, ami, ahogy látjuk kiesik. Az utazási idők közti különbség így:

$$T_1 - T_2 = \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

6 Tudjuk, hogy a víz v sebességgel hagyja el a locsolófejet. A víz minden elemi tartományát ezután a gravitáció lassítja. A vonatkozó kinematikai egyenletből megkaphatjuk, a földre való visszahullás idejét.

$$0 = vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

A teljes levegőben való tartózkodás ideje:

$$t = \frac{2v}{g}.$$

Most már csak ki kell számolnunk, mennyi víz hagyja el a locsolófejet ennyi idő alatt. A tömegáramra vonatkozó egyenlet szerint $Q_m = \pi r^2 v \rho$, ebből könnyen megkaphatjuk a levegőben lévő víz végső tömegét:

$$m = \frac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}.$$

7 Arkhimédész törvényének következtében az üreges téglánkra két erő hat a levegőben: a gravitációs erő és a felhajtóerő. Ahhoz, hogy lebegjen a tégla az kell, hogy ennek a kettőnek a nagysága megegyezzen, így:

$$\rho_v V g = mg,$$

ahol ρ_v a levegő sűrűsége. A tégla térfogata: $V = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$.

A tégla tömegét ekkor úgy számolhatjuk, hogy a felszínét megszorozzuk a felszíni sűrűséggel, így:

$$m = \sigma \cdot 2\left(k \cdot 2k + k \cdot 4k + 2k \cdot 4k\right) = 28k^2\sigma.$$

Ha az első egyenletbe beírjuk a tömeget és térfogatot, akkor ezt kapjuk:

$$k = \frac{7\sigma}{2\rho_v} \doteq 10{,}77\ \mathrm{cm} \doteq 11\ \mathrm{cm}.$$

8 Tegyük fel, hogy a hab réteg eltűnik t idővel. A pohárban a folyadék szintje vt értékkel növekszik, míg a ut az a magasság, amennyit a hab nélkül veszített az eredetileg habos ital. Tehát az eredeti hab réteg vastagsága $(u+v)/t$ volt. Vagyis a levegő aránya a habban $\frac{u}{u+v}$.

9 Egy bonyolult test tömegközéppontját úgy tudjuk meghatározni, hogy felbontjuk egyszerűbb alakokra, összegezzük ezen egyszerűbb alakok koordinátáinak és tömegeiknek a szorzatát, majd az eredményt elosztjuk a teljes tömeggel:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n},$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Kezdjük az x koordinátával: Kihasználva a tényt, hogy egy háromszög tömegközéppontja a magasságvonalának első harmadoló pontjába esik, felírhatjuk a következő egyenletet:

$$X = \frac{16m \cdot 10a + 2m \cdot 17{,}5a + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{17+18+18}{3}a + 3 \cdot 3m \cdot 19{,}5a + 3 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{21+21+22}{3}a}{16m + 3m + 9m + \frac{3}{2}m} = \frac{2521}{177}a \doteq 14{,}242a.$$

Az y koordináta esetén jóval könnyebb dolgunk van, hiszen a teljes szigony tükörszimmetrikus. Ezt kihasználva a keresett koordináta, triviális módon:

$$Y = 6{,}5a.$$

10 Szegény hobbit. A túlélés reményével ugrott fel, de igaza volt? A földről felugorva h magasságot képes elérni, ehhez az izmai által biztosított effektív energia mgh. Mivel a lift kabin sokkal nehezebb volt, mint a hobbit, a kabin által átvett energia elhanyagolható, mintha csak a Föld felszínén ugrott volna.

A hobbit becsapódási sebessége ezért megegyezik a lift sebességének, illetve a hobbit ugrási sebességének különbségével. Kinematikus egyenletekből ezért:

$$v_{\text{becsapódás}} = v_{\text{lift}} - v_{\text{ugrás}} = \sqrt{2gH} - \sqrt{2gh} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right),$$

ahol H a magasság, ahonnan a lift elkezdett zuhanni. Ki kell még számolnunk a megfelelő szabadesési magasságot. Állandó gyorsulású mozgás esetén a teljes megtett út $s = \frac{v}{2g}$. v helyett most írjunk $v_{\text{becsapódás}}$-t, ekkor:

$$s = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)^2.$$

Végül behelyettesítve a megadott $h = 0{,}7$ m és $H = 3$ m-t, láthatjuk, hogy a hobbitnak valóban igaza volt; a becsapódási sebessége így mindössze annyi volt, mintha 0,8 m-ről esett volna le.

11 A példát úgy oldhatjuk meg, hogy összehasonlítjuk az ugrás előtti és utáni energiáját a szobornak. Legyen a henger magassága h, sűrűsége ρ_t és térfogata pedig V. Tűzzük ki viszonyítási magasságnak azt, ami vízfelszín alatt van $h/2$-vel.

A henger tömegközéppontja a geometriai középpontjában található. Amikor a henger kiemelkedik a vízből, akkor a vízfelszín alatti helyét víz fogja kitölteni. Potenciális energiája csökken fog, mégpedig a következő mértékben:

$$E_w = \rho_w V g \frac{h}{2}.$$

A végállapotban csak a hengernek lesz nem 0 helyzeti energiája. Jelöljük a referencia magasságtól vett magasságkülönbségét a henger középpontjának x-el, Ennek értéke:

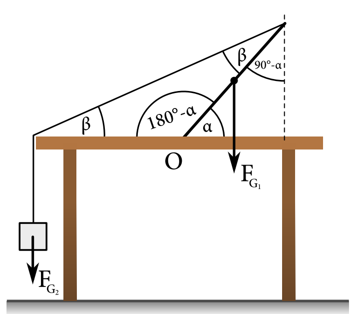
$$E_t = V g x \rho_t.$$

Az energiákat összehasonlítva az x értéke

$$\rho_w V g \frac{h}{2} = V g x \rho_t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h\rho_w}{2\rho_t} = 4{,}5 \text{ m},$$

, mely éppen annyinak adódik, mint a henger tetejének távolsága a víz felszínétől.

12 Azt szeretnénk, hogy a rendszer stacionárius legyen. Egyensúlyi helyzetben az erők és forgatónyomatékok összege minden irányban nulla. Az erők eredője könnyen adódik, ha felvesszük az egyes erőket (az ellenerők az ábrán nincsenek ábrázolva). Nyilvánvaló, hogy a rudat a forgatónyomaték tudja mozgásba hozni. Ebből kifolyólag a lényeges feltétel az, hogy a rúdon ható forgatónyomatok eredője nulla legyen. Számítsuk ki a forgatónyomatékokat az O pont körül, ami körül az ellenerőknek nincs nyomatéka!



Ahogy az ábrán látható, a rúd F_{G1} súlyához tartozó erőkar $\frac{L}{2}\cos\alpha$, a terhelő tömeg F_{G2} súlyához tartozó erőkar pedig $L\sin\beta$.

Hogy a rendszer egyensúlyban maradjon, a forgatónyomatékokra a következő egyenlőségeknek kell teljesülnie:

$$\tau_1 = \tau_2,$$

$$2mg\cos\alpha\frac{L}{2} = mgL\sin\beta,$$

$$\sin\beta = \cos\alpha.$$

A megadott hosszakból tudjuk, hogy a tömeg nélküli kötél és a rúd egyenlő szárú háromszöget alkot. Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°,

$$2\beta + (180° - \alpha) = 180°,$$

$$2\beta = \alpha$$

Az O pont körüli forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet tehát

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Ebből akár látható is a megoldás, de természetesen korrektül végig is számolhatjuk. A félszögekre vonatkozó $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ formulát használjuk fel. Néhány lépéssel később az egyenlet

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

ami $\cos\alpha$-ban négyzetes. Az egyenlet megoldása

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Minket ebből a pozitív megoldás érdekel, mivel a megoldást a $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ intervallumban várjuk. Így tehát a keresett szög

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

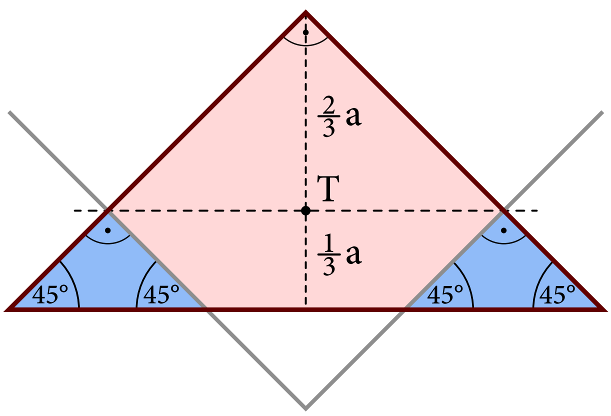
13 Az árammérőn átfolyó áramot könnyen lehet számolni. Mivel az áramerősség mérőt az áramkör fő ágába, a DC-generátor (DC=Direct Current=egyenáram) mellé csatlakoztattuk elég az áramkör teljes ellenállását kiszámolni. Ez először bonyolultnak tűnhet de mivel ez csupán egy egyenáramra kötött áramkör a feladat nagyban leegyszerűsödik.

Egyenáramú esetben a kondenzátorok ideális szigetelőkként viselkednek - vagyis nem folyik rajtuk áram. Ezzel ellentétben a tekercsek ideális vezetőkként viselkednek, vagyis az ellenállásuk nulla. Ezért az egész áramkör ekvivalens egy, 3 párhuzamosan kapcsolt, R ellenállású ellenállást tartalmazó áramkörrel, amiben DC-generátor és ideális áramerősség mérő is szerepel. Így a teljes ellenállás $\frac{R}{3}$ és az áramerősség mérőről leolvasható áramerősség:

$$I = \frac{U}{\frac{R}{3}} = 3\frac{U}{R}.$$

14 A tetőre mind a súlya, mind a normális irányú kényszererő hat. A stabilitást az biztosítja, hogy a forgatónyomatékok összege nulla. A forgástengelyt a tető fix pontjainak helyzete határozza meg. A maximális benyúlás úgy érhető el, hogy a tömegközéppont pontosan a forgástengely fölé essen.

A feladat további részében a teljes lefedett terület kiszámolása a cél. A legegyszerűbb megközelítás, ha kivonjuk azon két kisebb háromszög felületét a tető teljes felületéből ($S_1 = \frac{a^2}{2}$, ahol a a befogó hossza) amelyek a tető falakkal való átfedéséből jönnek létre. Némi geometriai okoskodásból láthatjuk, hogy a két kicsi háromszög derékszögű és egyenlő szárú, csakúgy mint a nagyobbik. Ezután kihasználjuk, hogy egy derékszögű háromszög súlyvonala megegyezik a magasságvonalával és az átfogóval szemközti szög felezőjével. A súlypont a súlyvonal harmadánál van, az átfogóhoz közelebb. Ez azt jelenti, hogy mindegyik kis háromszög oldalhossza egy harmada a nagy háromszög oldalának.



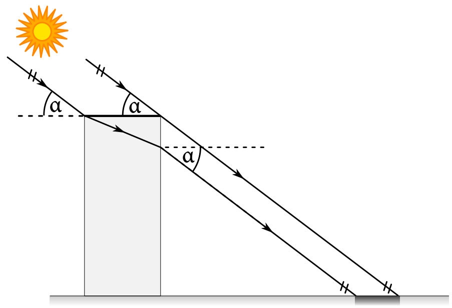
Tehát a tető kis háromszögek nélküli felülete a következőképpen számítható:

$$S = \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{7}{18}a^2.$$

A nyaralót fedő része a tetőnek:

$$k = \frac{\frac{7}{18}a^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{7}{9}.$$

15 Ez a helyzet valójában csak egyetlen esetben valósulhat meg: ha mind a nyaláb beesési szöge, mint a fénytörés szöge α. Rövidíthetjük ugyan az árnyékot a prizma használatával, de nem fog teljesen eltűnni, hacsak nem terjed a nyaláb vízszintesen, 0°-os szögben. Ekkor a talajt semmi nem világítja meg, és a fedlap se tud árnyékot vetni a talajon.



16 Egy átlagos légbuborékban lévő levegőt ideális gázként kezelhetünk, így az egyetemes gáztörvényt írhatjuk fel rá:

$$pV = NkT.$$

A mi esetünkben k és N végig konstans, így az egyenlet $\frac{pV}{T} = \text{const.}$ alakra egyszerűsödik. Emiatt össze tudjuk hasonlítani a buborék kezdeti és felszín közeli állapotát egymással:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

T_1 és T_2 adottak, V_1 kiszámolható az r_1 sugárból: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. r_2 így a következőképpen fejezhető ki:

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{p_1 T_2}{T_1 p_2}}\, r_1.$$

Most már csak p_1 és p_2 nyomásokat kell meghatároznunk. A tenger felszínén $p_2 = p_{\text{atm}}$. A hidrosztatikus nyomás miatt p_1 nyomásnak $p_1 = h\rho g + p_{\text{atm}}$ kell lennie. Ekkor:

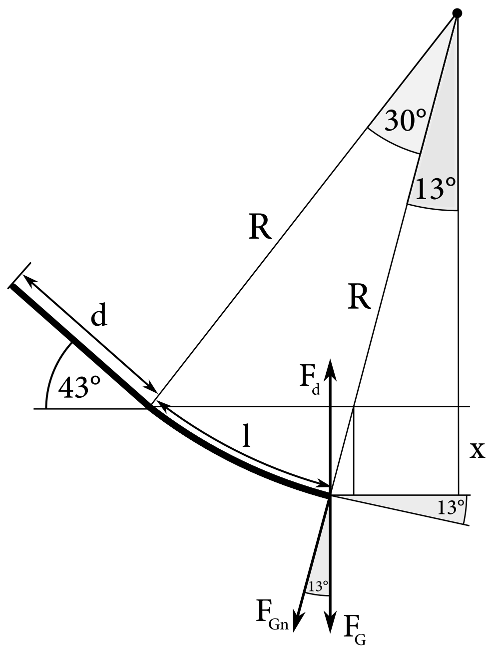
$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2}{T_1}\left(1 + \frac{h\rho g}{p_{\text{atm}}}\right)}\, r_1.$$

A paraméterek behelyettesítés után megkapjuk a végeredményt:

$$r_2 \doteq 9{,}5\ \text{cm}.$$

Vegyük észre, hogy elhanyagoltuk a felületi feszültséget. Ezt azért tehettük meg, mert az ezáltal megjelenő nyomás öt nagyságrenddel kisebb a külső nyomáshoz képest.

17 Először is: miért érné Philipet a szabadesésnél nagyobb nehézségi gyorsulás, miközben szabadon halad lefelé a lejtőn? Egy rövid ötletelés után rájöhetünk, hogy a mozgás utolsó szakaszában egy köríven mozog, tehát F_c centrifugális erő hat rá. A centrifugális gyorsulás nagysága: $a_c = \frac{v^2}{R}$, ahol R a sánc végének a görbületi sugara.



Vessünk egy pillantást a sánc geometriájára! A sánc legmagasabb és legalacsonyabb pontja közti függőleges távolság h. Ez a távolság két tagból tevődik össze: a $d = 50$ m hosszú lejtő magasságából, illetve az ívelt szakasznál mérhető magasságváltozásból, amely:

$$h = d \sin 43° + x.$$

Egy kis trigonometriával arra jutunk, hogy

$$x = R\left(\cos 13° - \cos 43°\right).$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy az $l = 50$ m hosszú köríven, a meredekség 30°-kal változik. Ezt felhsználva, kiszámolhatjuk a sánc görbületi sugarát:

$$R = \frac{6l}{\pi}.$$

Az energiamegmaradás törvényét felhasználva kiszámolhatjuk Philip sebességét az elrugaszkodás pillanatában. Tudjuk, hogy $\frac{1}{2}v^2 = gh$. Ekkor a centrifugális gyorsulásra érvényes összeffüggés:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{2h}{R}g.$$

A sánc geometriáját kihasználva az alábbi kefejezésre jutunk:

$$a_c = \frac{2}{R}\left[d \sin 43° + R\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g = \left[\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 2\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g.$$

Ne felejtsük el azonban, hogy Philip a Föld gravitációs mezőjében van. Ez azt jelenti, hogy a súlya is hozzájárul a teljes nehézségi gyorsuláshoz, pontosabban annak normálkomponense: $F_{G\perp} = F_G \cos 13°$. A Philip-re ható teljes nehézségi gyorsulásra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$a = a_c + g\cos 13° = \left(\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 3\cos 13° - 2\cos 43°\right) g \doteq 2{,}17\, g.$$

18 Egy elasztikus kötél, melyet általában kötélugráshoz (bungee jumping) használnak rugóként viselkedik, ezért Ádám mozgása megfelel egy harmónikus oszcillátornak. Egy ilyen oszcillátor pediódusideje $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, ahol k a kötélre jellemző állandó.

Mikor Ádám éhes, a periódusideje:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

N palacsinta megevése után Ádám periódusideje a következőképpen változik:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + Nm}{k}}.$$

A feladatleírásból tudjuk, hogy az új periódusidejének $\frac{3}{2}T_1 = T_2$ kéne, hogy legyen, azaz:

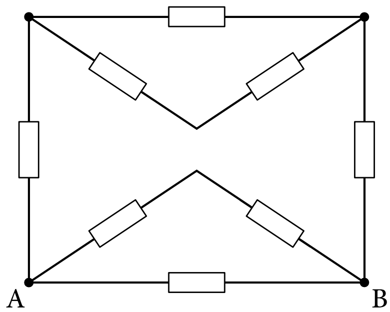
$$\frac{3}{2}2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M + Nm}{k}},$$

Átrendezve a keresett érték:

$$N = \frac{5}{4}\frac{M}{m}.$$

19 A feladat egyértelmű: ki kell számoljuk a két-két csúcs közötti ellenállásokat.

Először az A és B csúcsok közötti ellenállást számoljuk ki. Az ellenállás nem fog megváltozni ha a piramis felső csúcsát egy ideális vezetőre cseréljük, amely az A és B csúcsokat köti össze a másik kettővel. Ez az ideális vezető így az áramkör tükörtengelyén található. Tehát miután egy feszültséggenerátort kapcsolunk az áramkörhöz az ideális vezető mindkét vége azonos potenciállal fog rendelkezni. Ez azt jelenti, hogy semmilyen áram nem folyik át rajta, tehát akár el is távolíthatjuk az áramkörből. Ez így kapott ekvivalens áramkör alul látható

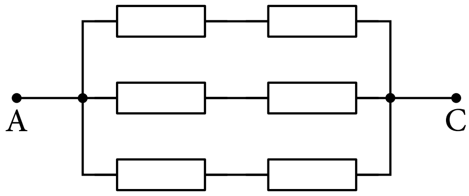


Ábra 1: *Az ekvivalens áramkör A és B csúcsok között*

Minden drót ellenállását modellezhetjük úgy, mint egy $R = \xi L$ ellenállás és egy ideális vezető. Könnyen látható, hogy a piramis egy közönséges soros és párhuzamos kapcsolású áramkör, melynek teljes ellenállása

$$R_{AB} = \frac{\left[2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R}\right]\frac{2R\cdot R}{2R+R}}{2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R} + \frac{2R\cdot R}{2R+R}} = \frac{8}{15}R.$$

Egy hasonló trükköt (azon vezető eltávolítását, amelyen nem folyik áram) használhatunk az A és C csúcsok közötti ellenállás megállapítása céljából is. Ezzen alkalommal két drót is szimmetriatengelyt alkot. Ezek eltávolításával a következő ekvivalens áramkört kapjuk



Ábra 2: *Az ekvivalens áramkör A és C csúcsok között*

Ebből könnyen kiszámolhatjuk a végső ellenállást:

$$R_{AC} = \frac{2}{3}R.$$

A keresett ellenállások aránya ezzel:

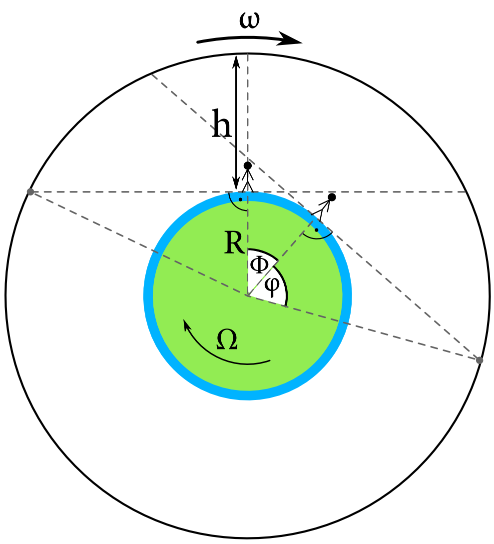
$$\frac{R_{AB}}{R_{AC}} = \frac{\frac{8}{15}R}{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{5}.$$

$\boxed{\textbf{20}}$ Tegyük fel, hogy a repülő objektum magassága h és körpályán kering. A pályáján a gravitáció és a centrifugális erő tartja:

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2 (R+h),$$

ahol R a Föld sugara, M a Föld tömege, m az objektum tömege és ω pedig a szögsebessége. Ekkora:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}.$$



A horizont-horizont megtétel ideje: T. Ez alatt az idő alatt a pályájának a következő nagyságát járja be szögben kifejezve: $\phi = \omega T$. Ez a szög, ami a Föld középpontja és a horizontok határoznak meg a következő:

$\varphi = 2\arccos\frac{R}{R+h}$. Ne felejtsük el, hogy a Föld forgása miatt is változik az objektum pozíciója az égen a következő szöggel: $\Phi = \Omega T$, ahol Ω a Föld forgásának szögsebessége. Miután egy egyenletbe behelyettesítünk, a következőeket kapjuk:

$$\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T = \Omega T + 2\arccos\frac{R}{R+h},$$

ahonnan a számunkra érdekes változó az a h.

Itt következik a probléma. Ezt az egyenletet nem lehet analitikusan megoldani. Mi numerikus módszert választunk a válasz megkeresésére, melynek neve logaritmikus keresés/algoritmus. Definiáljuk a következő függvényt:

$$F(h) = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T - \Omega T - 2\arccos\frac{R}{R+h}$$

ennek keressük a zérushelyét, azaz azt a h-t, ahol $F(h) = 0$.

A logaritmikus keresés lényege a következő: Elsőként meghatározzuk a tartományt $(a;b)$, ahol az egyenlet megoldásának lennie kell.

Mivel a $F(h)$ függvény folytonos, ezért ha $F(a)\cdot F(b) < 0$, azaz ha az intervallum végein különböző előjelű értéket kapunk, akkor $\exists c \in (a;b) : F(c) = 0$.[1]

Ezek után elfelezzük az intervallumot két darabra: $\left(a;\frac{a+b}{2}\right)$ és $\left(\frac{a+b}{2};b\right)$.

Ha szerencsések vagyunk és $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ értéket kapunk, akkor befejezhetjük az iterálást. Ameddig ez nem történik meg, addig keressük a megoldást a két intervallum egyikén – mindig azon az intervallumon, amelyik két végpontján F ellentétes előjelet vesz fel. Természetesen az iterálás befejezhető, amennyiben elérjük a szükséges pontosságot.

A mi esetünkben a megkívánt pontosság 1 km, ami jelen esetben azt jelenti, hogy az intervallumoknak kisebbnek kell lenniük ennél.

Az előbbiek segítségével próbáljuk megkeresni az objektum magasságát! Sejthető, hogy ez kisebb, mint 1000 km, ezért kezdetként a következő intervallumból induljunk ki: $(0\text{ km}; 1000\text{ km})$. Célunk a következő pontosság elérése: 1 km. Mivel minden iteráció után feleződik az intervallumunk, ezért legalább 10 iterációra van szükség, hogy elérjük a kívánt pontosságot, ezért az intervallum mérete: $\frac{1000\text{ km}}{2^{10}} < 1$ km. A következő táblázat tartalmazza a számolást:

Iteráció	a [m]	b [m]	$\frac{a+b}{2}$ [m]	$F(a)$	$F(b)$	$F\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	0	1 000 000	500 000	0,56	−0,61	−0,27
1	0	500 000	250 000	0,56	−0,27	−0,02
⋮			⋮			⋮
10	230 469	231 445	230 957	0,000 48	−0,000 73	−0,000 13

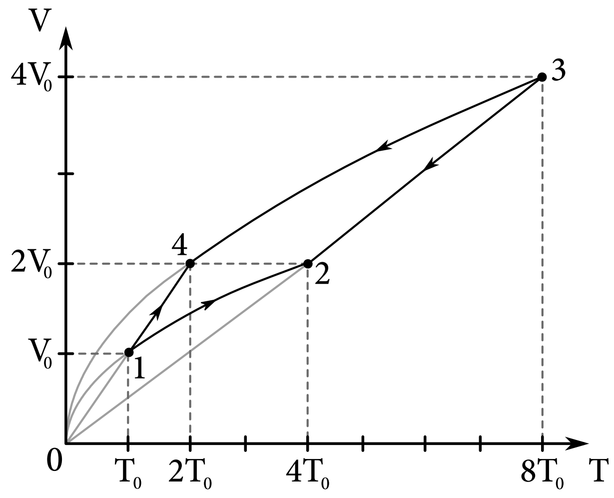
A 10. iteráció után a következőt kaptuk: $b - a < 1$ km ezzel elérve a kívánt pontosságot. A numerikus eredmény még pontosabb megállapítására válasszuk az intervallum közepét, mely: $\tilde{h} = 231{,}0$ km. Ha folytatnánk az iterációt, akkor megkapnánk a pontos éréket, mely: $h \doteq 230{,}9$ km.

[1] Ráadásul az $-\arccos\frac{R}{R+h}$ függvény monoton nő a következő tartományon: $h \in [0;\infty]$ és ehhez hasonlóan $\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$ motonon csökken a tartományon; emiatt az $F(c) = 0$ egyenletnek csak egy megoldása van.

21 Mielőtt elkezdjük a $V - T$–diagram rajzolását, ki kell találnunk, hogy hogyan változik a hőmérséklet és a térfogat a körfolyamat alatt. Az egyetlen képlet, amit használnunk kell, az általános gáztörvényt: $pV = NkT$, ahol N egy állandó, mivel nem változik a gáz mennyisége a körfolyamat során.

- Az $1 \to 2$ folyamat alatt a nyomás egyenesen arányosan nő a térfogattal, ami azt jelenti, hogy $\frac{pV}{T} =$ const., ezért a térfogat és hőmérséklet viszonyára a következő igaz: $V \propto \sqrt{T}$. Ezért a gáz térfogata $2V_0$ és hőmérséklete $4T_0$ a 2-es pontban.
- A $2 \to 3$ folyamat izobár állapotváltozás, ami azt jelenti, hogy a térfogat a hőmérséklettel egyenesen arányosan változik. Ezért a gáz térfogata $4V_0$ és hőmérséklete $8T_0$ 3-as pontban.
- A $3 \to 4$ folyamatban a nyomás egyenesen arányosan csökken a térfogattal. Ezért a gáz térfogata $2V_0$ és hőmérséklete $2T_0$ a 4-es pontban.
- A $4 \to 1$ folyamatban a térfogat lineárisan függ a hőmérséklettől.

A $V - T$–diagram megrajzolása alatt biztosra kell mennünk, hogy az összes görbe metszi az origót meghosszabításuk után. Végül a $V - T$–diagramja a vizsgált folyamatnak:



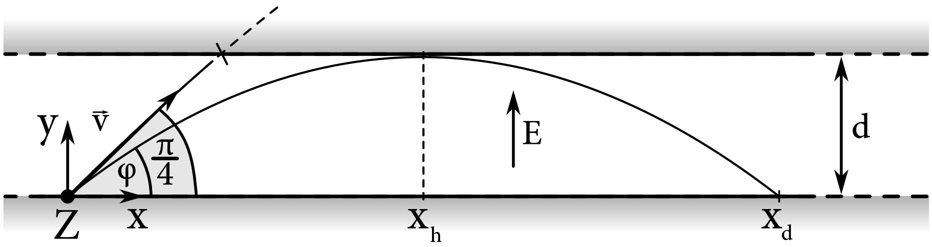
Ábra 3: *Cycle redrawn into VT-diagram*

22 Mivel az elektronok egy homogén elektromos mezőben haladnak, egy állandó Ee erő hat rájuk, és ez az erő minden elektronnak állandó $a = \frac{Ee}{m_e}$ gyorsulást okoz függőlegesen lefelé. Észrevehetjük, hogy ez a gyorsulás sokkal nagyobb a nehézségi gyorsulásnál, így utóbbit elhanyagolhatjuk a megoldás során. Mivel a teljes elrendezés invariáns a forgatásra ezért elegendő, ha csak egyetlen, a fegyverzetekre merőleges, a forrást tartalmazó síkban vizsgáljuk a kibocsátott elektronokat.

Hasonlóan a homogén gravitációs mezőben való mozgáshoz, leírhatjuk a φ szögben kibocsátott elektronok x és y koordinátáit a következőképpen:

$$x = v_x t = v \cos\varphi \cdot t,$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}at^2 = v \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}at^2.$$



Alapvetően három esetet kell megkülönböztetni az elektron kezdősebessége és kibocsátási szöge alapján:

- az elektron eltalálja a felső fegyverzetet;
- az elektron éppen súrolja a felső fegyverzetet;
- az elektron nem jut el elég magasra, hogy eltalálhassa a felső fegyverzetet.

Tekintsük most azon elektronokat, amelyek éppen súrolják a felső fegyverzetet! Egy kibocsátott elektron a maximális magasságát T idő múlva éri el, ahol

$$T = \frac{v_y}{a} = \frac{v \sin\varphi}{a}.$$

Behelyettesítve ezt az időt az y koordinátára vonatkozó egyenletbe és a magasságot d-vel egyenlővé téve megkapjuk azt a szöget, amivel az elektronnak a kibocsátás pillanatában rendelkezni kell ahhoz, hogy a pálya legmagasabb pontja éppen a felső fegyverzet síkjában legyen:

$$d = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{a} - \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a} = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2ad}}{v}.$$

Ha behelyettesítjük a megadott értékeket, azt kapjuk, hogy $\varphi \doteq 36{,}37°$. Ez kisebb mint 45°, ami azt jelenti, hogy azon elektronok, amelyek nagyobb távolságra tudnának jutni az ebben a szélsőséges helyzetben meghatározottnál, el fogják találni a felső fegyverzetet. Hogy meghatározzuk, milyen távolra jutnak el az elektronok, mielőtt súrolják a fegyverzetet, helyettesítsük be ezt a szöget a T idővel együtt az x koordinátára vonatkozó egyenletbe:

$$x_h = \frac{v^2 \cos\varphi \sin\varphi}{a}.$$

Ha eszünkbe jut, hogy az elektronok a maximális magasságukat a teljes vízszintesen megtett távolság felénél érik el, nem lepődünk meg, hogy az elektronbecsapódások teljes kiterjedésének sugara az alsó fegyverzeten $x_d = 2x_h$ lesz.

A feladatban megadott értékek behelyettesítésével $x_h = 2{,}715$ m, tehát az elektronok a felső fegyverzetet egy 2,715 m sugarú körben találhatják el, míg az alsó fegyverzetet egy 5,43 m sugarúban. Az elektronok által elért összfelület így

$$S = \pi\left(x_h^2 + x_d^2\right) = 5\pi x_h^2 \doteq 116\ \mathrm{m}^2.$$

23 Vizsgáljuk meg milyen nagyságú erők hatnak az asztalra. A tál gravitációs súlya: $F_{\text{bowl}} = Mg$. És ehhez hasonlóan a víz gravitációs súlya $F_{\text{water}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$.

Most nézzük meg a tálat felemelő erőt. Fontos figyelembe venni a víz által keltett nyomást. A nyomás ami a tál felemelkedését is okozza, $p = R\rho g$. Ez megadja nekünk az erő nagyságát $F = pS = \rho g\pi R^3$, ahol S a felület nagysága a víz és az asztal között.

A harmadik Newton-törvényt alapján, minden hatást egy ellenhatás követ, amelynek a nagysága megegyezik az őt keltő hatással. Így a ugyanakkora erő kell hasson az asztalra, amekkorát az asztal fejt ki a vízre. A két erőt így megegyezik, ez alapján a tál tömege megadható.

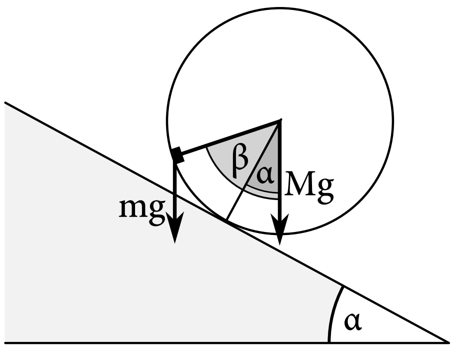
$$\rho g\pi R^3 = Mg + \frac{2}{3}\pi R^3\rho g,$$

amely

$$M = \frac{1}{3}\pi R^3\rho.$$

24 Kezdjük a hordónak a heggyel érintkező pontjára ható forgatónyomatékok meghatározásával. Alapvetően két forgatónyomatékot kell figyelembe vennünk.

A hordó súlya miatt létrejövő forgatónyomaték a hordót az óramutató irányába próbálja forgatni, míg a sajt súlya miatt létrejövő forgatónyomaték az óramutató járásával ellentétes irányba.



Ábra 4: *Hordó sajttal a belsejében*

A forgatónyomatékok nagysága:

$$M_{\text{sajt}} = mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right),$$

$$M_{\text{hordó}} = -MgR\sin\alpha.$$

Egyensúly esetén a két forgatónyomaték összegének zérusnak kell lennie:

$$M_{\text{cheese}} + M_{\text{barrel}} = 0,$$

$$mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right) = MgR\sin\alpha,$$

ekkor:

$$\frac{m}{M+m}\sin\beta = \sin\alpha.$$

Hogy maximalizáljuk α dőlésszöget, maximalizálnunk kell $\sin\alpha$ értéket.

$\sin\alpha$ és $\sin\beta$ arányos egymással, így igazából β szöget kell maximalizálnunk.

Annak érdekében, hogy a sajt nyugalomban legyen a rá ható súlyerőnek és súrlódási erőnek a hordó érintőjének mentén vett komponenseinek nagyságának meg kell, hogy egyezzen egymással:

$$mg\sin\beta = mg\cos\beta\mu,$$

$$\tan\beta = \mu.$$

Felhasználva $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$ azonosságot a következő egyenletre jutunk:

$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Behelyettesítés után:

$$\sin\alpha = \frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

És végül a kritikus szög:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right).$$

25 Tudjuk, hogy amikor teljesen teletöltünk egy kondenzátort ε relatív permittivitású dielektrikummal, a kapacitása ε-szorosára növekszik. De mi történik, ha csak részben töltjük fel? Az egyik opció, hogy olyan ekvivalens eseteket keresünk, ahol csak teljesen feltöltött vagy üres kondenzátorok vannak.

Képzeljük el, hogy behelyezünk egy vékony fémlemezt a kondenzátor fegyverzetei közé, azokkal párhuzamosan. Ez nem változtatja meg a belül lévő elektromos teret mivel a teljes töltés a lemezen nulla. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen kondenzátor elektromos tulajdonságai megegyeznek a lemez nélküliével. Ezután, ha a lemezt a felületével párhuzamosan kettévágjuk, és a két felét összekötjük egy vezetővel akkor lényegében két sorba kötött kondenzátort kapunk. Ne feledjük, hogy az új kondenzátorok kapacitása megduplázódik a fegyverzeteik közötti távolság megfeleződése miatt.

Kiderül tehát, hogy helyettesíthetjük az első kondenzátort két 2C kapacitású kondenzátor sorba kapcsolásával, melyek közül az egyik fel van töltve a dielektrikummal:

$$C_1 = \frac{2C\cdot\varepsilon 2C}{2C+\varepsilon 2C} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}C.$$

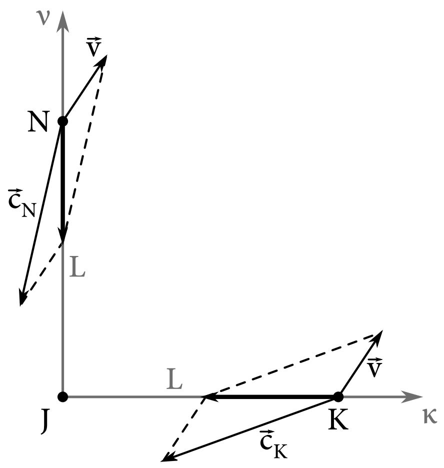
A második esetben egyértelmű, hogy ha függőlegesen vágjuk szét a kondenzátort, a fegyverzeteire merőleges módon, akkor a tér megint nem változik és két párhuzamosan kapcsolt kondenzátort kapunk. Ebben az esetben az új kondenzátorok kapacitása megfeleződik a fegyverzetek területének feleződése miatt. Így a második kondenzátor kapacitását a következőképpen fejezhetjük ki:

$$C_2 = \frac{C}{2} + \varepsilon\frac{C}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2}C.$$

Végül az arányuk:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

26 Először vegyük az első részt, amikor Nándor és Kinga kiáltanak, és János hallgatja őket. A hang gömbhullámként terjed a levegőhöz viszonyítva. A mozgása egy ismeretlen $\vec{v}$ vektorral írható le. Ez a vektor egy $\vec{c}$ vektorból állítható elő, ami a hanghullám mozgását jelöli a levegőben, úgy, hogy az eredmény vektor János felé mutat.



Kinga kiáltásának sebességét $\vec{c_K}$ vektorral jelöljük. A vektor úgy van megválasztva, hogy eleget tegyen a

$$c_{K\nu} + v_\nu = 0 \qquad \text{és} \qquad c_{K\kappa} + v_\kappa = -\frac{L}{T_{KJ}}$$

összefüggésnek, ahol L Nándor és Kinga távolsága Jánostól, és T_{KJ} az az idő, amíg a hang Kingatól Jánoshez ér. Hasonló módon a $\vec{c_N}$ vektor teljesíti a

$$c_{N\kappa} + v_\kappa = 0 \qquad \text{és} \qquad c_{N\nu} + v_\nu = -\frac{L}{T_{NJ}}$$

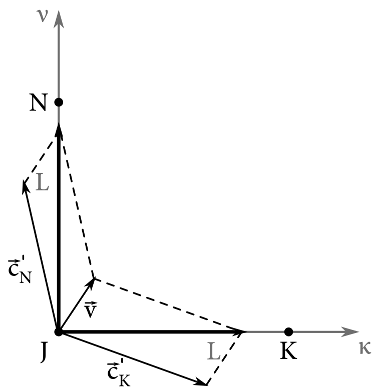
összefüggést, és a két vektor egyenlő egymással

$$\left|\vec{c_K}\right| = \left|\vec{c_N}\right| = c.$$

A fenti összefüggések segítségével $\vec{c_K}$ és $\vec{c_N}$ kiejthetőek a további számításokból.

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} + v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} + v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2$$

A második részben a helyzet megfordul. A hang most Jánostól Kingahoz és Ninához terjed rendre a $\vec{c_K}' + \vec{v}$ és $\vec{c_N}' + \vec{v}$ irányokban. Ezeknek az előző összefüggésekhez hasonló módon kell viselkedniük.



Így

$$c'_{K\nu} + v_\nu = 0, \qquad c'_{K\kappa} + v_\kappa = \frac{L}{T_{JK}},$$

$$c'_{N\kappa} + v_\kappa = 0, \qquad c'_{N\nu} + v_\nu = \frac{L}{T_{JN}}$$

és

$$\left|\overrightarrow{c_K}'\right| = \left|\overrightarrow{c_N}'\right| = c.$$

$\overrightarrow{c_K}'$ és $\overrightarrow{c_N}'$ kiejtésével az egyenletekből kapjuk, hogy

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} - v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} - v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2.$$

Továbbá a c^2-re vonatkozó másik egyenlet felhasználásával megkapjuk, hogy

$$v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2.$$

Az egyenletek leegyszerűsíthetőek az első két tag kivonásával.

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa+\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2=\\
&=2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu+\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2=\\
&=-2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa+\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2=\\
&=-2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu+\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Az első és harmadik sor, valamint a második és negyedik sor egyenlőségéből kapjuk, hogy

$$v_\kappa=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JK}}-\frac{1}{T_{KJ}}\right)\qquad\text{és}\qquad v_\nu=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JN}}-\frac{1}{T_{NJ}}\right),$$

amiből

$$\left|\vec{v}\right|=\frac{L}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{T_{JK}}-\frac{1}{T_{KJ}}\right)^2+\left(\frac{1}{T_{JN}}-\frac{1}{T_{NJ}}\right)^2}=29{,}43\ \mathrm{m/s}.$$

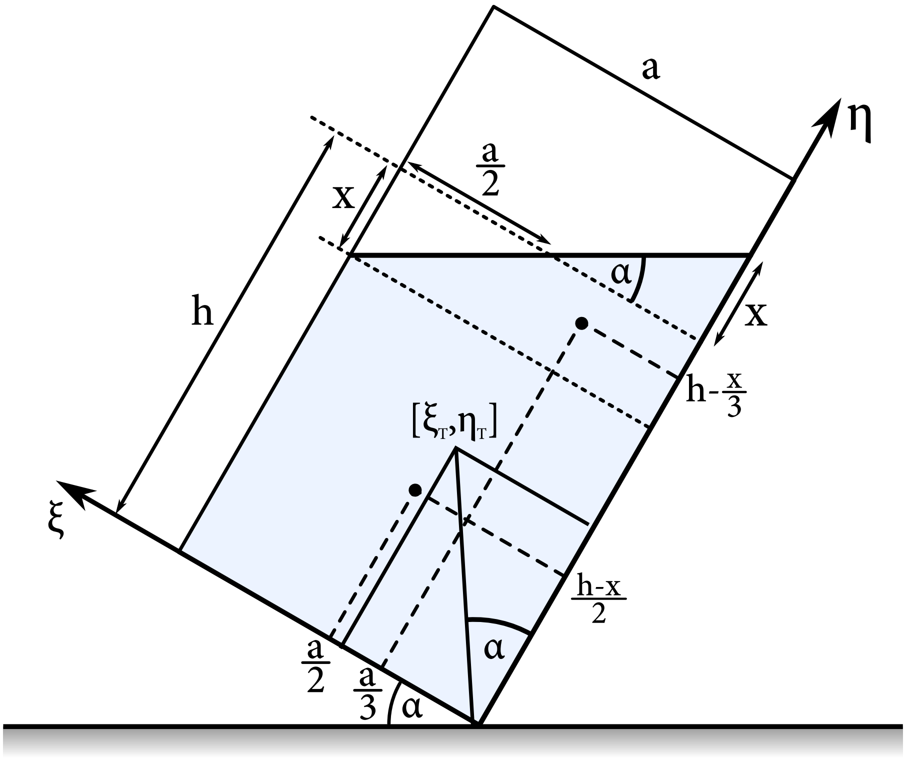
27 Az összes mágneses mező leírható az eredeti négyzet egyes éleinek szuperpozíciójával. De ki akarná kisebb részekre osztani a négyzetet, ha összerakhatjuk a végső áramkört különálló négyzetekből?

Elég, ha veszünk hármat az eredeti áramkörből és a megfelelő helyekre tesszük őket, így kialakítják a végső alakzatot. A mi esetünkben ez egy négyzet a bal oldalra, egy a jobb oldalra és egy a felső lapra való helyezését jelenti. Az áramok szuperpozíciója miatt, a felső lap két éle között nem lesz áramlás.

A mágneses mező merőleges az eredeti négyzetre, ezért a jobb és bal oldalból eredő mezők kiejtik egymást. Az eredő mágneses mező a felső lapból a középpont felé mutat és a magnitúdója azonos az eredetiével. Más szavakkal, $B_2 = B_1$.

28 Tegyük fel, hogy a felszíne a tejnek h magasságban van. Ha a tejet ráhelyezzük az α szögű leejtőre a tej felszíne vízszintes marad.

A feladat szövegéből arra következtethetünk, hogy még mindig elég nagy mennyiségű tej van a dobozban. Ez csonka hasáb alakot vesz fel. Az oldal nézet egy trapéz lesz.



A határesetben (épp mielőtt a doboz kibillen) a tömegközéppontja a tejnek a forgástengely felett kell hogy legyen. Keressük meg a tömegközéppontját a rendszernek. Először vegyünk fel egy koordinátarendszert melynek tengelyein rajta fekszenek a doboz oldalai.

A trapéz egy $a \times (h - x)$ méretű téglalapból és egy derékszögű háromszögből melynek befogói a és $2x$. A téglalap súlypontjának koordinátái $\left[\frac{a}{2}; \frac{h-x}{2}\right]$. A derékszögű háromszög súlypontjának koordinátái $\left[\frac{a}{3}; h - \frac{x}{3}\right]$. Innen a trapéz tömegközéppontjának koordinátái:

$$\xi_T = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\left(h-x\right) + \frac{a}{3} \cdot ax}{ah} = \frac{a}{2} - \frac{ax}{6h};$$

$$\eta_T = \frac{\frac{h-x}{2} \cdot a\left(h-x\right) + \left(h - \frac{x}{3}\right) \cdot ax}{ah} = \frac{h}{2} + \frac{x^2}{6h}.$$

Könnyen látszik, hogy a folyadékfelszín dőlése:

$$\tan\alpha = \frac{2x}{a}.$$

Továbbá abból a feltételből, hogy a határesetben a tej tömegközéppontja épp a doboz sarka felett van azt kapjuk, hogy

$$\tan\alpha = \frac{\xi_T}{\eta_T} = \frac{12ah - 2a^2\tan\alpha}{12h^2 + a^2\tan^2\alpha}.$$

Ahol kizártuk az ismeretlen x-et. Átalakítva egy másodfokú egyenletet kapunk az ismeretlen h-ra ami a vízszintesben lévő dobozban a tej magassága.

$$h^2 - \frac{a}{\tan\alpha}h + a^2\left(\frac{\tan^2\alpha}{12} + \frac{1}{6}\right) = 0.$$

A megoldás

$$h = \frac{a}{2\tan\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tan^2\alpha\left(\frac{\tan^2\alpha}{3} + \frac{2}{3}\right)}\right).$$

Melyik gyököt kell választanunk? A "+"-os változatot. A második megoldás (a negatív előjelű) nőni fog ha növeljük a szögét a leejtőnek. Ez azt jelentené, hogy kisebb szögeknél kevesebb tej szükséges a doboz kibillenéséhez. A végső esetben, a vízszintesnél, a negatív előjelű megoldás azt jelentené, hogy a doboz kibillenne akkor is, ha nincs tej benne. Ez természetesen nem lehet!

A megadott menyiségekkel $a = 1$ dm és $\alpha = 30°$, $h \doteq 1{,}6$ dm-t kapunk tehát a térfogata a tejnek a dobozban

$$V = a^2 h \doteq 1{,}6\ \mathrm{dm}^3.$$

29 A szétszakadás előtt a szegény bolygó a következő körsebességgel keringett r távolságban az M tömegű csillagtól:

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

A szakadás után mindkét darab parabolikus pályán mozgott, ami azt jelenti, hogy mindketten pontosan a szökési sebességgel mozogtak. Ez r távolságban

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Ezek szerint az első darb sebessége ennyivel változott:

$$\Delta v_1 = v_{sz} - v_k = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}},$$

míg a másodiké ennyivel:

$$\Delta v_2 = v_{sz} + v_k = \left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Az impulzusmegmaradás egy összefüggést ad a tömegekre és sebességekre

$$\Delta v_1 m_1 = \Delta v_2 m_2,$$

így

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

30 Azzal, hogy U feszültséget kapcsoltunk a gyűrűre, áram kezd el folyni azon. Ismeretes, hogy az áram a legkisebb ellenállású utat teszi meg. Azonban a drót hosszának növelésével az ellenállás is növekszik.

Az ellenállást az $R = \rho\frac{l}{S}$ formula adja meg, ahol S a drót keresztmetszeti területe. Ezen információ alapján, a kisebb ívű szakaszon nagyobb áram folyik át. Tehát

$$I \propto \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad I \propto \frac{1}{l}.$$

A vezető körüli mágneses mező az árammal és a vezető effektív hosszával arányos. Elképzelhetjük az ívet, mint egy, a központtól ugyanolyan távolságra lévő nagyon rövid vezetőt.

Minkét ív ugyanolyan mértékben járul hozzá a végső mágneses mezőhöz. Figyelem! A mágneses mező iránya is fontos tényező. Ezt könnyen meg lehet állapítani az Ampere-féle jobbkéz-szabály szerint.

Tehát

$$B_{\text{felső}} \propto I_1 \cdot l_1 \quad \text{a} \quad B_{\text{alsó}} \propto I_2 \cdot l_2.$$

Mit jelent mindez? Míg az áram csökken a növekvő hosszal, a mágneses mező értéke növekszik. Abból a tényből, hogy a mágneses mező linárisan függ I és l-től, ez a két mennyiség kioltja egymást, és így a végső mágneses mező nagysága a középpontban egyáltalán nem fog a szögtől függeni.

A mágneses mező mindkét komponenséből a következőt kapjuk

$$B_{\text{felső}} = B_{\text{alsó}}.$$

Azonban az első felfelé mutat, míg a második lefelé. Tehát a végső mágneses mező nagysága nulla, függetlenül attól, hogy melyik ponton kapcsolódnak a vezetékek a gyűrűhöz.

31 Tegyük fel, hogy az inga ω szögsebességgel forog. Ekkor egy teljes fordulatot $T_o = 2\pi/\omega$ idő alatt tesz meg. Az ezen szögsebességgel való forgás hatására az inga kitér a függőlegeshez képest, az egyensúlyi helyzet a függőleges tengellyel φ_0 szöget zár be. A kitérés szögét két erő határozza meg – a centrifugális erő $F_C = m\omega^2 R \sin\varphi_0$ és a gravitáció $F_G = mg$. A kitérést leíró egyenlet:

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_C}{F_G} = \frac{\omega^2 R \sin\varphi_0}{g},$$

amelyből:

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}; \qquad \sin\varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2}.$$

Írjuk fel az inga mozgásegyenletét! Jelöljük az egyensúlytól való kis kitérítés szögét φ-vel! Ekkor az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$mR^2\varepsilon = -mgR\sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) + m\omega^2 R\sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) R\cos\left(\varphi_0 + \varphi\right).$$

A fenti egyenlet a trigonometrikus összefüggéseket felhasználva átalakítható:

$$\varepsilon = -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_0\right) + \omega^2\left(\sin\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0\cos\varphi - \sin\varphi_0\sin\varphi\right).$$

Ez az egyenlet nem túl csábító, ezért próbáljuk meg linearizálni! Tudjuk, hogy kis szögek esetén igazak a követező közelítések: $\sin\varphi \approx \varphi$ és $\cos\varphi \approx 1$. Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned} \varepsilon \approx & -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0 \cdot 1 + \varphi \cdot \cos\varphi_0\right) + \omega^2\left(\sin\varphi_0 \cdot 1 + \varphi \cdot \cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0 \cdot 1 - \sin\varphi_0 \cdot \varphi\right) \\ \approx & \left(\omega^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 - \frac{g}{R}\sin\varphi_0\right) + \left(\omega^2\cos^2\varphi_0 - \omega^2\sin^2\varphi_0 - \frac{g}{R}\cos\varphi_0\right)\varphi. \end{aligned}$$

Emlékezzünk vissza, hogy már felírtunk egy összefüggést a φ_0 szög, az ω szögsebesség, és az inga R hossza között. A szinuszra és koszinuszra felírt kifejezéseket behelyettesítve a mozgásegyenletbe a konstans tag kiesik, így végül a harmonikus oszcillátor egyenletéhez jutunk:

$$\varepsilon \approx \left(\frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2\right)\varphi.$$

A harmonikus oszcillátor kis rezgéseinek periódusideje:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}}}.$$

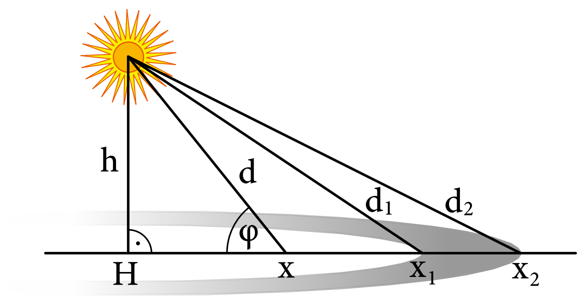
A periódusidők aránya tehát:

$$k = \frac{T_o}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2},$$

amely kifejezhető az egyensúlyi helyzethez tartozó φ_0 kitéréssel:

$$k = \sin\varphi_0.$$

32 A feladatunk az, hogy meghatározzuk a hőmérsékleti egyensúlyt két sugárzó fekete test között. A Nap izotrop módon sugároz, minden irányban azonos teljesítménnyel. Palacsintária elnyeli ezt a sugárzást, szintén lesz valamilyen hőmérséklete, így maga is sugározni kezd. Egyensúlyi helyzetben az elnyelt és kisugárzott teljesítmények egyenlőek, erre tudjuk felírni az egyensúlyi feltételt. Először készítsünk egy ábrát a releváns mennyiségekről:



A fluxussűrűség fordítottan arányos a forrástól való távolság négyzetével. Ebből egyértelműen következik, hogy a legmagasabb hőmérséklet közvetlenül a Nap alatt lesz, ezt a pontot jelöltük az ábrán H-val. Jelöljük az itt mérhető hőmérsékletet T_H-val! Palacsintária minden egyéb pontja ennél távolabb lesz a Naptól, ráadásul a sugarak nem merőlegesen érkeznek a felületre, így ugyanaz a fluxus egy nagyobb területen oszlik el, tehát kijelenthető, hogy nagy távolságokra a hőmérséklet csökken és megközelíti az abszolút nulla fokot.

Jelöljük a kívánt hőmérsékleti intervallum határait T_1-gyel és T_2-vel, ahol $T_1 < T_2$. Három lehetőség van a lakható övezetünk alakjára:

- Ha $T_H < T_1$, az egész Palacsintária túl hideg lesz ahhoz, hogy lakható terület legyen rajta.
- Ha $T_1 < T_H < T_2$, a lakható zóna egy korongot alkot a H pont körül.
- És végül, ha $T_2 < T_H$, a H pontban túl nagy lesz a forróság, de mivel a hőmérséklet csökken a távolsággal, a lakható zóna csak eltolódik a középső régióból, és egy gyűrűt alkot körülötte.

Kezdjük el a tényleges számításokat. Könnyen meghatározható a Nap által kisugárzott teljes teljesítmény a Stefan-Boltzmann-törvény segítségével:

$$P = S_\odot \sigma T_\odot^4 = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$

ahol $S_\odot$ a Nap felülete. Következőnek azt szeretnénk megkapni, hogy ennek a teljesítménynek mekkora hányada esik egy d távolságban levő kis területre. Mivel a Nap elegendően távol van Palacsintáriától, pontforrásnak tekinthető. A teljes teljesítmény így egy gömbfelületen oszlik el, d távolságban pedig a fluxus

$$\Phi = \frac{4\pi R^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi d^2} = \frac{\sigma R^2 T_\odot^4}{d^2}.$$

Továbbá, a fluxus φ beesési szöge miatt bejön egy $\sin\varphi$ faktor is, de ezt ki tudjuk fejezni ismert mennyiségekkel:

$$\sin\varphi = \frac{h}{d}.$$

Így megkaptuk, hogy a teljesítmény mekkora része jut Palacsintária egy kis, d távolságban levő felületére. Az egyensúlyi feltétel szerint a kisugárzott és az elnyelt teljesítmény megegyezik:

$$\frac{\sigma R^2 T_\odot^4 h}{d^3} \stackrel{!}{=} \sigma T^4.$$

A d távolság kifejezhető:

$$d = \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T^4}\right)^{1/3}.$$

Ez közvetlenül a Naptól való távolság, ebből a H ponttól mért x távolságot a Pitagorasz-tétellel tudjuk kifejezni:

$$x^2 = d^2 - h^2.$$

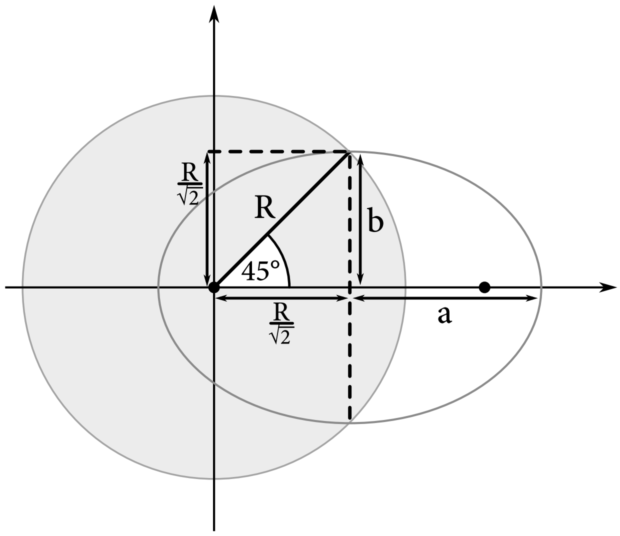
Ha behelyettesítjük a megadott értékeket, két valós megoldást kapunk, ami azt jelenti, hogy a harmadik forgatókönyv valósul meg – a lakható övezet körgyűrű alakú. A területét így a két kör területének különbségeként kapjuk meg:

$$S = \pi\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \pi\left(\left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_1^4}\right)^{2/3} - \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_2^4}\right)^{2/3}\right) = \pi R^{4/3} h^{2/3} T_\odot^{8/3}\left(T_1^{-8/3} - T_2^{-8/3}\right).$$

A számszerű végeredmény behelyettesítés után

$$S \doteq 3\,538\,765\ \mathrm{km}^2.$$

33 Az űrhajós egyértelműen egy ellipszis pályán fog mozogni, mely fókuszában az aszteroida közepe van. Úgy indulhatunk el legjobban, ha lerajzoljuk a problémát:



Ábra 5: *Ellipszispálya geometriája*

A feladat szövege szerint az elugrás és landolás pontja negyed kerület távolságra vannak, és a pálya 45° fokos szöget zár be a felszínnel. Az ellipszis fél kistengelye rögtön adódik: $b = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Az is egyértelmű, hogy az űrhajós mozgása pontosan az ellipszis felén fog végigmenni.

A fél nagytengely megtalálásához fel kell használnunk, hogy az ellipszis mentén tetszőleges ponton a fókuszokhoz mért távolságok összege állandó. Ha az ábránkon a legfelső pontot nézzük (ahol az űrhajós eredetileg állt), a távolságok összege $2R$, és ha a baloldali pontot választjuk, az összeg $2a$. Ezek szerint $a = R$. Most már meghatároztuk az ellipszist, így kiszámolhatjuk az időt. Az ellipszis körüli keringési idő általános összefüggéséből indulunk ki[2]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}.$$

Következőnek Kepler második törvényét használjuk, mely szerint a keringő testet a fókusszal összekötő egyenes azonos idők alatt mindig azonos területeket súrol. Ezek szerint a fél ellipszis feletti keringéshez szükséges idő ugyanolyan arányban van a teljes keringési időhöz, mint a lefedett terület a teljes területhez. A lefedett terület

$$s = \frac{\pi ab}{2} + \frac{R^2}{2},$$

a teljes terület pedig

$$S = \pi ab,$$

így

$$t = T\frac{s}{S} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \frac{\frac{\pi ab}{2} + \frac{R^2}{2}}{\pi ab} = \frac{\left(\pi + \sqrt{2}\right) R^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

34 Miért látná András a piros fényt zöldnek? Kis gondolkodás után rájöhetünk, hogy ezt csak a Doppler effektus okozhatja. De van benne egy kis csavar! A fény fénysebességgel halad (milyen meglepő). Emiatt a relativisztikus Doppler effektussal kell számolnunk. A megfigyelt frekvenciát tehát az alábbi módon kaphatjuk

[2] Ha nem emlékeznél, ezt egy kör körüli periódusidőből kapjuk úgy, hogy kicseréljük a sugarat a félnagytengelyre, ami Kepler harmadik törvényéből kihozható.

meg:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Ha András zöldnek látta volna a piros fényt, a kocsi sebessége:

$$v = \frac{f^2 - f_0^2}{f^2 + f_0^2}c = \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2}c.$$

Ha ebbe behelyettesítjük a hullámhosszak numerikus értékeit, megkapjuk a végső sebességet:

$$v = \frac{11}{61}c \doteq 0{,}18\,c.$$

Összehasonlításképpen kiszámolhatjuk a végső sebességet a klasszikus Doppler egyenlettel is. Rögzítsük a viszonyítási koordináta rendszert a jelzőlámpához. Ebben a rendszerben a végső megfigyelt frekvencia $f = f_0\frac{c+v}{c}$ lenne, tehát a sebesség:

$$v = \left(\frac{f}{f_0} - 1\right)c = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1\right)c = 0{,}2\,c.$$

$\boxed{\textbf{35}}$ Kezdetben a rendszer egyensúlyban van. Ugyanolyan tömeg van mindkét oldalon. Kati tömege m, Mike kétszer nehezebb, így a tömege $2m$. Hozzáadtunk a Katival megegyező oldalon egy vele egyenlő nagyságú tömeget. Ezért a kötél mindkét végén $2m$ tömeg van.

A kérdés az, hogy mi történik, hogyha a könnyebb béka elkezd felmászni a v sebességgel a kötél rendszerében? A megoldás abban rejlik, hogy megválaszolják azt kérdést, hogy hogyan gyorsul fel a béka v-sebességre? A gyorsuló béka hatására $F(t)$ erő ébred a csigakerék egyik oldalán.

A Newton törvénye alapján a $F(t)$ nagyságrendű erő hat a Kati által (felfelé). A csiga tömegtelen és csúrlódásmentes. Ezért a csigára ható erő és forgatónyomaték a csigákon nulla. Emiatt az $F(t)$ erő ébred a nehezebb békára is. Mindkét könnyebb és nehezebb béka megkapja a J impulzust.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t.$$

Impulzus J által keltett impulzusváltozás keletkezik a csiga mindkét oldalán $\Delta p = J$ Jelöljük a nehezebb béka sebességét u-val, amo felfelé irányul. Ez a kötél sebessége. Attól a ténytől, hogy az imuplzusnak meg kell egyeznie a csiga mindkét oldalán, azt kapjuk, hogy

$$2mu = m\,(v-u) - mu.$$

Így $u = \frac{v}{4}$. Ennek következtében, a könnyebb béka felfelé halad a csigához, a sebesség egyenlő $\frac{3}{4}v$ így ő éri el először a csigát. Ez a következő időt veszi igénybe

$$t = \frac{H}{\frac{3}{4}v}.$$

Ez idő alatt a nehezebb béka tömegközéppontja elmozdul $h = ut = \frac{H}{3}$ távolságra. Ezért a békák közötti távolság egyenlő lesz $\frac{2}{3}H$.

Tegyünk egy rövid megjegyzést a rendszer lendületére, illetve egy másik megoldási lehetőségre (impulzusmomentum megmaradására). Figyeljük meg, hogy a rendszer tömegközéppontja (két béka és kötél) felfelé mozdul el. Ez azt jelenti, hogy a rendszer impulzusa megváltozik a mozgás során. Ezért ez nem lehet állandó. Miért is nem lesz a rendszer teljes impulzusa állandó (konzervált)? Amikor a béka felgyorsul és ezáltal erő lép fel a kötélen, ez ellenhatást kelt a csigában. A csigában fellépő ellenhatás nagyobb, mint amit a külső erő okoz. Azonban a rendszer lendülete nem változik tovább ha a béka állandó sebességgel mozog.

Ezt a problémát megoldhatjuk a perdület megmaradás segítségével. Abban az esetben ha a rendszerben nincs nyomaték. A rendszer összperdülete megmarad. Ha a mozgás teljes időtartamára a rendszer összperdülete nulla, akkor igaz lesz az, hogy

$$2mu = m\left(v - u\right) - mu.$$

36 Hallottál már a napvitorláról? Ugyanez az alapelv itt is – a fény, ha visszaverődik egy felületről, erőt fejt ki. Mivel erőt fejt ki, lendületének is kell lennie. Néhány régen élt nagyon okos embernek köszönhetően ma a fényt már részecskék áramaként láthatjuk, és ezeknek a részecskéknek, fotonoknak mindegyike

$$E = hf$$

energiával és

$$p = \frac{E}{c}$$

lendülettel rendelkezik. A fotonok árama a kerék belső oldaláról $90° - \alpha$ szögben verődik vissza, a beesési merőlegeshez képest. Minden visszaverődés a foton lendületét Δp-vel változtatja meg, ahol

$$\Delta p = 2p\cos(90° - \alpha) = 2\frac{E}{c}\sin\alpha.$$

A foton két visszaverődése között idő telik el annak véges sebessége miatt:

$$\Delta t = \frac{2R\sin\alpha}{c}.$$

Itt kell felhasználnunk egy, a megoldás szempontjából lényeges ötletet. Mivel a fotonok diszkrét részecskék, a keréken ható erő nem konstans. De mivel a fotonoknak a sebessége nagyon nagy, nagyon gyakoriak az ütközések, és mivel ezen ütközések közti Δt idő nagyon rövid, számolhatunk az átlagos erővel, elhanyagolva a fluktuációkat, és tekinthetjük ezt az átlagos erőt állandónak.

Kifejezhetjük az egy foton által okozott átlagos erőt:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\frac{E}{c}\sin\alpha}{\frac{2R\sin\alpha}{c}} = \frac{E}{R}.$$

És mivel a foton vadul röpköd körbe a teljes keréken, a korábbi érvelést felhasználva azt mondhatjuk, hogy az erő egyenletesen oszlik el a kerék egészén. Azt is kijelenthetjük, hogy az erő független attól, hogy a lézer milyen szögben világított – kisebb szögekhez gyakoribb ütközések tartoznak, viszont ezen ütközésekkor kisebb lendületváltozás szükséges.

Amikor Saymon t ideig világít a lézerével, egy Pt energiájú nyalábot készít. Ez a nyaláb $\frac{Pt}{E}$ fotonból áll, ahol mindegyik ugyanazzal az E energiával rendelkezik. Mivel ugyanezen érvelés minden fotonra használható, a

$\frac{Pt}{E}$ fotonhoz tartozó energia $\frac{Pt}{E}$-szer nagyobb, így a teljes erő:

$$F = \frac{Pt}{E}\frac{E}{R} = \frac{Pt}{R}.$$

Itt észrevehetjük, hogy az erő nem függ a foton energiájától, hiszen a nagyobb energiához ugyan nagyobb erő tartozik, de kevesebb foton a teljes nyalábban. Ez az erő természetesen sugárirányú, így meg kell határoznunk a szakítóerőt. Hogy ezt megtegyük, képzeljük el, hogy a kerék enyhén kitágul, és fejezzük ki a jelen levő erők munkáját. Az energiamegmaradás törvénye segítségével meg fogjuk tudni találni az ismeretlen T erőt[3]. Ha a kerék sugarát Δr-rel növeljük, a kerülete $2\pi\Delta r$-rel nő. A sugárirányú erő közben

$$W = \frac{Pt}{R}\Delta r$$

munkát végez, és a szakítóerőre felírható, hogy

$$W = T2\pi\Delta r.$$

A két kifejezés egyenlőségéből megkapható az ismeretlen erő:

$$T = \frac{Pt}{2\pi R}.$$

$\boxed{37}$ Ahhoz, hogy Sámuel hagymájának tehetetlenségi nyomatékát meghatározzuk három dolog kell, hogy eszünkbe jusson. Az első a tömör gömb tehetetlenségi nyomatékának képlete, mely $\frac{2}{5}mR^2$-ként áll elő, ahol m a gömb teljes tömege. A második pedig az, hogy a tehetetlenségi nyomaték mennyisége additív, vagyis jelen esetben az egyes hagyma "üregek" tehetetlenségi nyomatékának összege a teljes objektum tehetetlenségi nyomatéka. A harmadik dolog, ami eszünkbe kell jusson az a skálázás. Ha egy objektum minden irányú méretét növeljük k-szorosára, akkor a térfogat k^3 lesz. Azonos sűrűség esetén tehát a tömeg is k^3-el skálázódik.

Az előzőekből következően a kezdeti tömör hagyma tehetetlenségi nyomatéka a végül kapott hagymából és annak a kiszáradt darabjának a térfogati nyomatékának összegéből állna össze. A kiszáradt térfogat is "gömb" alakú (terméeszetesen belül üregekkel és anyaggal), de a mérete az eredeti hagyma kétharmada. Jelöljük a hagyma tehetetlenségi nyomatékát I-vel. Az általános képlete a tehetetlenségi nyomatéknak a következőképpen néz ki: $c \times MR^2$, ahol c egy állandó, mely a megadott forgástengelyhez tartozik. Tehát a kiszáradt darab tehetetlenségi nyomatéka $\left(\frac{2}{3}\right)^5 I$.

Ennek következtében a tömör gömb tehetetlenségi nyomatéka:

$$\frac{2}{5}mR^2 = I + \left(\frac{2}{3}\right)^5 I.$$

Jelen esetben m a tömör gömb tömege. Ha az m tömeg meghatározható a hagyma M tömegének skálázásával, akkor az $m = M + \left(\frac{2}{3}\right)^3 M$ egyenlet újraírható. Ezek után triviális lépésekkel kapjuk meg a végső összefüggést:

$$I = \frac{2}{5}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^5}MR^2 = \frac{126}{275}MR^2.$$

[3] virtuális munka elve

38 Az ugyanezen áramkör DC-generátorral (DC=Direct Current=egyenáram) egybekötött verziójával ellentétben az eredményt itt jelentősen befolyásolják a kondenzátorok és a tekercsek. AC körökben, az Ohm törvény az U maximális feszültségre és az I maximális áramerősségre használható:

$$U = |Z|I,$$

ahol $|Z|$ az impedancia nagysága. Tehát elegendő az áramkör impedanciáját kiszámolni.

Egyszerűen észrevehető, hogy a tekercsekből és ellenállásokból álló két középső ág szimmetrikus. Tehát a középső kondenzátor két végén lévő potenciálnak meg kell egyeznie, ezért a kondenzátoron átfolyó feszültség és áramerősség egyaránt nulla. Más szavakkal, a két középső sort összekötő, egy kondenzátorból álló ág elhagyható. A feladat így már arra egyszerűsödött, hogy soros és párhuzamos kapcsolások impedanciáját számoljuk. A teljes impedanciája az AC áramkörnek:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{2}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{3R - \omega^2 RLC + i\left(\omega R^2 C + \omega L\right)}{R^2 + i\omega RL}.$$

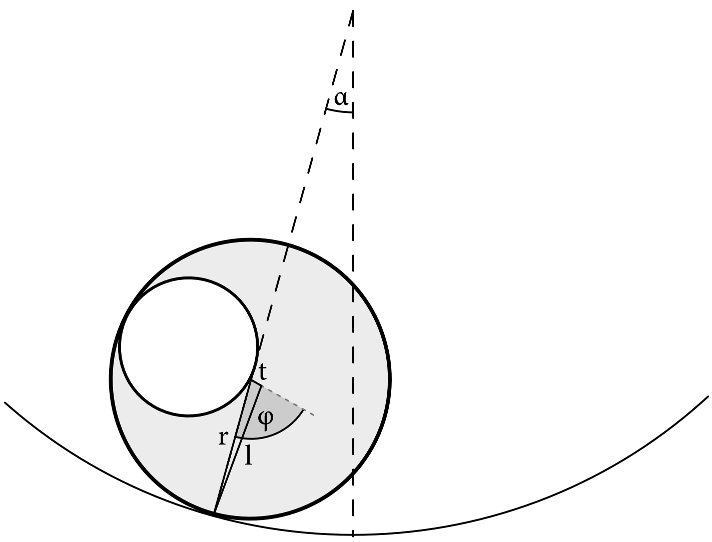
Az impedancia nagysága:

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}},$$

Így:

$$I = U\sqrt{\frac{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}}.$$

39 A kérdés megválaszolását kezdjük annak áttekintésével, hogy hogyan készült Jónás kereke. Tételezzük fel, hogy homogén anyagból készült σ felületi sűrűséggel. Az eredeti, nem eltörött kerék tömege így $\sigma\pi r^2$. A tömegközéppontja pedig a közepén van, koordinátái: $[0; 0]$.



Ábra 6: *Jónás oszcilláló kereke*

A létrejött lyuk tömege $\sigma\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$ és a tömegközéppontja a $\left[0;\frac{r}{2}\right]$ pontban van. Tehát a törött kerék tömege $\frac{3}{4}\sigma\pi r^2$, tömegközéppontjának x koordinátája zéró, y koordinátája pedig a forgatónyomatékokból kiszámítható:

$$y = \frac{\sigma\pi r^2 \cdot 0 - \sigma\pi\frac{r^2}{4}\cdot\frac{r}{2}}{\frac{3}{4}\sigma\pi r^2} = -\frac{r}{6}.$$

A negatív előjel mutatja, hogy a tömegközéppont a kitört lyukkal átellenes részen van. Az ép és a törött kerék tömegközéppontja közötti különbséget jelölje $t = -y = \frac{r}{6}$.

Emlékezzünk, hogy kis oszcillációkra kell koncentrálnunk. Mi történik, ha a kitérítjük a kereket φ szöggel? Vagy másképpen megfogalmazva, mi történik, ha a kerékügödör érintkezési pont elmozdul $r\varphi$ ívvel? A szög a régi és az új csatlakozási pont között $\alpha = \frac{r}{5r}\varphi = \frac{\varphi}{5}$ lesz.

A potenciális energia a gödör aljában:

$$E_p = mgh = \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 gh,$$

ahol h:

$$h = 5r\left(1-\cos\alpha\right) + r\cos\alpha - t\cos(\varphi-\alpha) = r\left[5\left(1-\cos\frac{\varphi}{5}\right) + \cos\frac{\varphi}{5} - \frac{1}{6}\cos\frac{4\varphi}{5}\right].$$

Ebben az esetben a kinetikus energiát a tengely körüli forgatási energiával fejezhetjük ki. Viszont a forgatási tengely folamatosan változik, ezért:

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2,$$

ahol I_A a valódi tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték. A tömegközéppont távolsága a tengelytől l. A cosinustétel értelmében $l^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi = r^2\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)$.

Csak egy ismeretlen marad, Jónás kerekének tehetetlenségi nyomatéka. Először ki kell számolnunk a tehetetlenségi nyomatékot a tömegközéppontra I_T. Majd alkalmazzuk Steiner tételét (párhuzamos tengelyek tétele) és azt, hogy a törött kerék és a kiesett kerékdarab tehetetlenségi nyomatékokait összeadhatjuk. Ezzel megkapjuk a teljes, ép kerék tehetetlenségi nyomatékát. Egy korong tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2}mR^2$, tehát:

$$\frac{1}{2}\sigma\pi r^2 r^2 = \left(I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 t^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2\right).$$

Azt kapjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték a tömegközéppontra $I_T = \frac{37}{96}\sigma\pi r^4$.

Ezután ismét Steiner tételét használjuk. Ezáltal az új forgástengelyre kapott tehetetlenségi nyomaték:

$$I_A = I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 l^2 = \sigma\pi r^4\left(\frac{37}{32} - \frac{1}{4}\cos\varphi\right).$$

Kis oszcillációkat szeretnénk leírni, ezért I_A értékét közelítjük. $\cos\varphi$ Taylor sorából $\cos\varphi \approx 1$. Ezután az egyenletünk:

$$I_A = \frac{29}{32}\sigma\pi r^4.$$

A végén keressük meg a törött kerék energiáját[4]. A potenciális energiánál a $\cos x$ Taylor sorfejtését a második rendig vesszük figyelembe ($\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$).

[4]a konstans részt elhanyagoljuk

A következőt kapjuk:

$$E = \frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g\varphi^2 + \frac{29}{64}\pi\sigma r^4\omega^2 = \text{const.},$$

mely nem más, mint egy harmónikus oszcillátor, melynek periódusidejét φ^2 és ω^2 előtti konstansok adják meg.

Végül megadhatjuk Jónás kerekének periódusidejét:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{29}{64}\pi\sigma r^4}{\frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{145}{32}\frac{r}{g}}.$$

40 Jelölje a tengely és az ellensúly közti távolságot x. A feladat nem jelöl ki egyetlen specifikus szöget sem a rúd kitérését illetően, ami összhangban van azzal, hogy a gyorsulás mindössze $\cos\alpha$-tól függ. Ez azt jelenti, hogy a gyorsulás maximalizálása egy adott szögben maximalizálás minden szögben. Vagyis a lövedék egyenes gyorsulására 0 fokos kitérés mellett a következőket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} a &= (L-x)\,\varepsilon \\ &= (L-x)\,\frac{\tau}{I} \\ &= (L-x)\,\frac{Mgx - mg\,(L-x)}{Mx^2 + m\,(L-x)^2}. \end{aligned}$$

A feladatunk, hogy ezt a kifejezést maximalizáljuk az x változóra nézve. A kifejezést kényelmesebb alakra hozva:

$$a = \frac{MLx}{Mx^2 + m\,(L-x)^2} - 1.$$

Ha ezt maximalizálni szeretnénk, a konstans tagot figyelmen kívül hagyhatjuk. Továbbá, a feladatunkat azzal is egyszerűsíthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy egy kifejezés maximuma megegyezik a kifejezés reciprokának minimumával. Vagyis valójában a következő kifejezés minimumát keressük:

$$a = \frac{Mx^2 + m\,(L-x)^2}{MLx}.$$

Ekkor két irányba is elindulhatunk. Kalkulus és differenciálszámítás segítségével, vagy az ún. *számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség* felhasználásával. Utóbbi azt jelenti, hogy bármely számsorozat számtani közepe mindig nagyobb, mint a mértani közepük. Két számra:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

Szerencsénk van, hiszen az eredeti kifejezés (majdnem) kedvező formába rendezhető át, így a bal oldal megegyezik az egyenlőtlenségben találhatóval:

$$a = \frac{m+M}{ML}x + \frac{mL}{Mx} - \frac{2m}{M}.$$

Szerencsére, a fennmaradó kifejezés csak egy konstans, ezért azt figyelmen kívül hagyhatjuk. Az egyenlőtlenség következtében bármely x szám esetén ez a kifejezés mindig nagyobb vagy egyenlő, mint

$$2\frac{\sqrt{(m+M)m}}{M}.$$

Azonban mi olyan x-et keresünk, amely esetén a kifejezés a lehető legkisebb, amely miatt muszáj az egyenlőséghez ragaszkodnunk, ezért x-re felírva az egyenletet:

$$\frac{m+M}{ML}x+\frac{mL}{Mx}=2\frac{\sqrt{m\left(m+M\right)}}{M},$$

amely átrendezhető egy másodrendű egyenletté, melynek megoldása:

$$x=\sqrt{\frac{m}{m+M}}L.$$

A teljesség érdekében bemutatjuk a deriválást használó megoldási menetet is. Egy kifejezés akkor éri el szélsőértékét, amikor a deriváltja éppen 0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Mx^2+m\left(L-x\right)^2}{MLx}=\frac{2Mx-2m\left(L-x\right)}{MLx}-\frac{Mx^2+m\left(L-x\right)^2}{MLx^2}\stackrel{!}{=}0$$

Ezt az egyenletet x-re megoldva épp a fenti megoldásra jutunk.

Válaszok

1 $t = \dfrac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}$

2 10,39 m/s

3 Adrián, 6 perccel előbb érkezik

4 34,5 %

5 $\dfrac{t_1 - t_2}{2}$

6 $\dfrac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}$

7 11 cm

8 $\dfrac{u}{u+v} = \dfrac{1}{1+\frac{v}{u}}$

9 $\left[\dfrac{2521}{177}a; 6{,}5a\right]$

10 80 cm

11 4,5 m

12 60°

13 $3\dfrac{U}{R}$

14 $\dfrac{7}{9}$

15 0°

16 95 mm

17 2,17 g

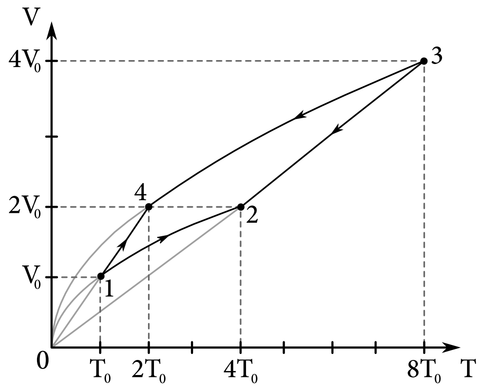
Uznajte výsledky, ktoré sa líšia od uvedenej hodnoty o najviac 0,01 g.

18 $\dfrac{5M}{4m}$

19 $\frac{4}{5}$

20 230,9 km. *Accept values between* 229,9 km *and* 231,9 km.

21 *Dbajte na to, aby odovzdané grafy mali vyznačené všetky dôležité hodnoty na osiach, šípky popisujúce priebeh deja mali správny smer a lineáry aj odmocniny po predĺžení prechádzali cez počiatok. Pokojne sa pýtajte riešiteľov na tvar kriviek, tzn. či naozaj vedia, že sú to odmocniny.*



22 116 m^2

23 $\frac{\pi R^3 \rho}{3}$

24 $\arcsin\left(\frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$

25 $\frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$

Megjegyzés: ha az eredmény reciprokát mutatják be akkor rosszul írták fel az arányt.

26 29,43 m/s.

27 1 – a mezõ magnitúdója azonos

28 1,6 dm^3

29 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

30 0, a mező értéke nulla az adott pontban.

31 $\sin\varphi_0$

32 3 538 765 km^2. *Elfogadhatók a* (3 528 765 km^2; 3 548 765 km^2) *közti eredmények.*

33 $T = \dfrac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

34 $\dfrac{11}{61} \doteq 0{,}18\,c$

35 A könnyebb béka ér először a csigához, ekkor a nehezebb béka távolsága a csigától $\dfrac{2}{3}H$

36 $\dfrac{Pt}{2\pi R}$

37 $\dfrac{126}{275}MR^2$

38 $U\sqrt{\dfrac{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}} = U\sqrt{\dfrac{\left(3 - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega \frac{L}{R}\right)^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} = U\dfrac{\sqrt{(3R^2+\omega^2 L^2)^2+(\omega R^3 C-2\omega RL+\omega^3 RL^2 C)^2}}{R^3+\omega^2 RL^2}$

39 $2\pi\sqrt{\dfrac{145}{32}\dfrac{r}{g}}$

40 $x = \sqrt{\dfrac{m}{m+M}}L$