Milí čtenáři,

v ruce držíte sbírku úloh 21. ročníku Fyzikálního Náboje. Ve sbírce se nachází všechny úlohy, se kterými jste se v roce 2018 mohli na soutěži potkat. K úlohám přikládáme i vzorová řešení, ze kterých se můžete mnohé naučit. Pokud byste danému vzorovému řešení nerozuměli, neváhejte sa nám ozvat, vše objasníme.

Fyzikální Náboj pokračuje ve své mezinárodní tradici. V roce 2018 se do Náboje zapojily kromě Bratislavy také Košice, Praha, Ostrava, Budapešť, Gdańsk a Moskva. Výsledky vzájemného souboje si můžete prohlédnout na našich stránkách.

Tato sbírka by nikdy nevznikla bez výrazné pomoci mnohých lidí, kteří se konec konců podíleli na celém vývoji Fyzikálního Náboje. Autoři Fyzikálního Náboje jsou studenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě a většina z nich se také aktivně podílí na organizování Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS – https://fks.sk/).

V České Republice s překladem a organizací pomohli převážně studenti Matematicko-fyzikální fakulty, kteří se podílejí na české verzi FKS, tedy FYKOSu.

FYKOS je korespondenční fyzikální soutěž. Přibližně jednou za měsíc zveřejňujeme zajímavé fyzikální úlohy, jejichž řešení nám můžete poslat buď poštou nebo elektronicky. My vám příklady obodujeme, opravíme a pošleme zpět. Ty nejlepší z vás zveme na začátku a na konci školního roku na týdenní zážitkové soustředění. Více informací najdete na stránce https://fykos.cz/.

Za finanční pomoc děkujeme firmám ESET a PosAm a za mezinárodní spolupráci lokálním organizátorům: Róbert Hajduk (za Košice), Daniel Dupkala (za Prahu), Lenka Plachtová (za Ostravu), Ágnes Kis-Tóth (za Budapešť), Kamil Żmudziński (za Gdańsk) a Patrik Lamoš (za Moskvu). Ve jméně celého organizačního týmu věříme, že jste si v roce 2018 Fyzikální Náboj užili a doufáme, že vás všechny uvidíme i příští rok! Ať už v roli soutěžících, nebo nových organizátorů.

Daniel Dupkala – hlavní organizátor v ČR

Jaroslav Valovčan – hlavní organizátor

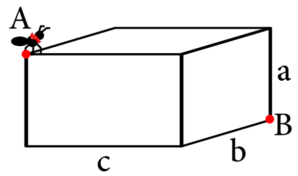
Sbírku sestavili:

Matej Badin	matob@fks.sk
Martin Baláž	kvik@fks.sk
Katarína Dančejová	katkad@fks.sk
Matúš Jenča	matus.jenca@fks.sk
Dušan Kavický	dusan@fks.sk
Simon Mičky	simon@fks.sk
Justína Nováková	plys@fks.sk
Kristián Šalata	kiko@fks.sk
Adam Škrlec	adam@fks.sk
Jaroslav Valovčan	jaro@fks.sk
Mária Zelenayová	majka@fks.sk

Výsledky soutěže, archiv úloh a další informace najdete na stránce https://physics.naboj.org/.

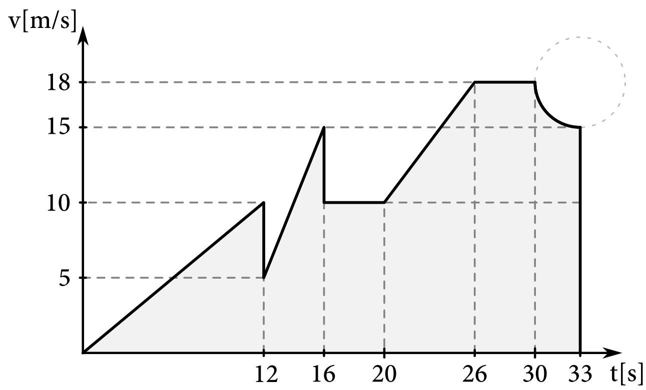
Zadání

1 Ferda mravenec sedí na rohu kvádru s rozměry $a \times b \times c$, přičemž $a < b < c$. Rád by se dostal z bodu A do bodu B co nejrychleji! Rychlost jeho pohybu je v. Jak dlouho mu to bude trvat?



2 Andrej se učí jezdit na jednokolce. Z grafu vidíme, jakou rychlostí se pohyboval po dobu jedné svojí jízdy. Vypočítejte jeho průměrnou rychlost v m/s.

Výsledek odevzdávejte s přesností na alespoň dvě desetinná místa.



3 Michal a Mirek se vydali stopem do Krakova. Michal se postavil na místo, kde v kýženém směru projíždějí auta s frekvencí 50 aut za minutu. Mirek se postavil na místo s frekvencí 25 aut za minutu. Z Michalova místa bude cesta do Krakova trvat 100 minut, z Mirkova 90 minut. Kdo přijede do Krakova statisticky dříve a o kolik, pokud ze zkušenosti vědí, že stopařovi zastaví každé dvousté auto?

4 Babička od Miši v lahvi objevila neznámý alkoholický nápoj. Zjistila, že je v něm 40 objemových procent alkoholu a zbytek tvoří prakticky samá voda. Kolik je to hmotnostních procent, pokud je hustota ethanolu 790 kg/m^3?

Výsledek odevzdávejte s přesností na desetiny hmotnostních procent.

5 Štěpán jede autem z Třince do Brna. Z klidu rovnoměrně zrychluje na maximální povolenou rychlost, tou nějaký čas jede a nakonec rovnoměrně brzdí až do zastavení. Zrychlování a zpomalování mu trvalo dohromady čas t_1. Cestou zpět spěchá, ale nesmí překročit maximální povolenou rychlost, takže jediné, co mu zbývá, je zrychlovat a brzdit prudčeji. Zrychlování a zpomalování cestou zpět mu trvalo dohromady čas $t_2 < t_1$. O kolik méně mu trvala cesta zpět, než cesta tam?

6 Zahradní postřikovač stříká vodu hustoty ρ z trysky o poloměru r rychlostí v svisle vzhůru. Jaká je hmotnost vody, která se v libovolném okamžiku nachází ve vzduchu?

7 Vašek se ostýchá. A nedoufá. Nabere však odvahu a přijde k pultu.

"Máte duté cihly?"

Na jeho obrovskou radost prodavač nezavolá bezpečnostní službu jako obvykle, ale odpoví s nadšeným úsměvem:

"Samozřejmě! Jakou velikost byste ráčil?"

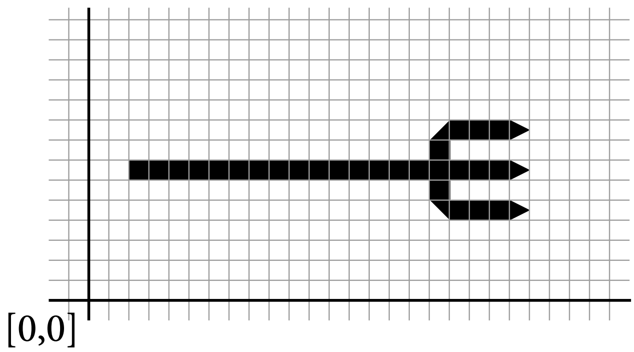
Vašek má teď na výběr z dokonale dutých (tedy zcela prázdných) cihel s délkami stran k, $2k$ a $4k$. Plošná hustota materiálu, ze kterého jsou vyrobeny, je 0,04 kg/m^2. Vašek však chce, aby jeho první dutá cihla byla něčím výjimečná. Například tím, že se bude ve vzduchu s hustotou 1,3 kg/m^3 volně vznášet. Jaký bude parametr k cihly, která mu jeho přání splní?

Výsledek odevzdejte s přesností na centimetry.

8 Jáchym si během horkého letního dne nalil svůj oblíbený perlivý nápoj. Na hladině se vytvořila vrstva pěny. Vršek pěny klesá rychlostí u a hladina stoupá rychlostí v. Jaký objemový podíl pěny tvoří vzduch?

9 Od příštího roku by se Náboj mohl konat také v oceánech. Ale bez vhodného žezla tam nikdo nebude organizátory brát vážně. Najděte souřadnice těžiště trojzubce, pokud je čtvercová síť tvořená čtverci s rozměry $a \times a$.

Odevzdejte výsledek ve tvaru zlomku.



10 Ve věži v Minas Tirith se ve výšce 3 m utrhl výtah. V kabině výtahu stojí ubohý hobit. Protože je fyzikálně vzdělaný, ví, že se náraz trochu zmírní, jestliže těsně před dopadem vyskočí. Když je hobit na zemi, dokáže vyskočit do výšky 0,7 m.

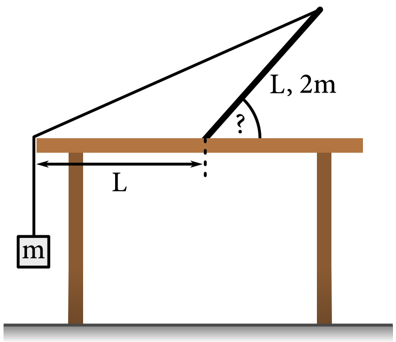
Z jaké výšky by musel spadnout mimo výtah, aby byla jeho rychlost dopadu stejná jako po výskoku ve výtahu? Hobit vyskočí v nejpozdějším možném okamžiku a jeho hmotnost je vůči hmotnosti kabiny výtahu zanedbatelná.

Výsledek odevzdávejte s přesností na cm.

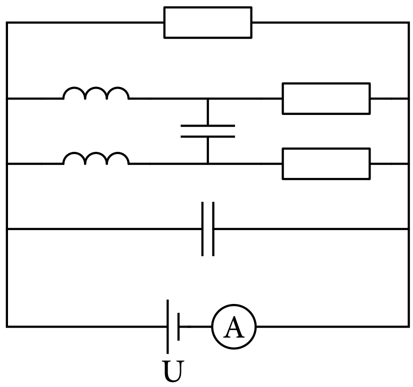
11 Špagetka sa zčistajasna ocitla ponořená ve velkém jezeře. Avšak dřív, než si tuto situaci stihla náležitě užít, jí přírodní síly opět vymrštily nahoru. Špagetka má hustotu 200 kg/m^3 a při lehké nelichotivosti jí můžeme považovat za válec s poloměrem podstavy 0,3 m a výškou 1,8 m. Do jaké největší výšky nad hladinu se dostala její horní podstava, jestliže se na začátku vznášela těsně pod hladinou?

Předpokládejte, že Špagetka byla po celou dobu pohybu ve vertikální poloze. Efekty proudění vody a povrchové napětí neuvažujte.

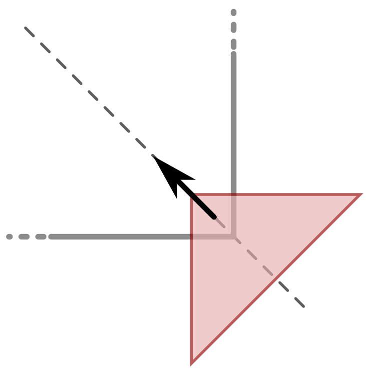
12 Tyč délky L s hmotností $2m$ je připevněna jedním koncem ke stolu tak, že se může volně otáčet kolem vodorovné osy. Na jejím volném konci je přivázáno nehmotné lano, které bez tření visí přes okraj stolu. Na něm je přivázáno závaží s hmotností m. Vzdálenost upevněného konce tyče od hrany stolu je také L. Jaký úhel musí svírat tyč se stolem, aby byla v labilní rovnovážné poloze?



13 Elektrikář Fero ve své zásuvce s harampádím našel několik dokonalých součástek (rezistory s odporem R, kondenzátory s kapacitou C, cívky s indukčností L, dokonalé vodiče a ampérmetr) a postavil si z nich obvod. Potom ho připojil na zdroj stejnosměrného napětí U. Jaký proud ukazuje ampérmetr?



14 Matouš se před grilovačkou rozhodl zastřešit si svůj zahradní altánek. K dispozici má desku tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, kterou chce položit na dvě kolmé stěny altánku. Začal ji vysouvat podél úhlopříčky směrem od rohu, jako je nakresleno na obrázku, až dosáhl maximální možné vzdálenosti, za kterou by se už střecha převážila. Jaká část střechy teď zakrývá vnitřek altánku?



15 Cestovatel Jáchym se ztratil v poušti a jediné, co s sebou má, je skleněný hranol se čtvercovou podstavou s hranou délky 10 cm, výšky 20 cm a s indexem lomu 1,5. Jeho horní podstava je z neznámých důvodů natřena na černo.

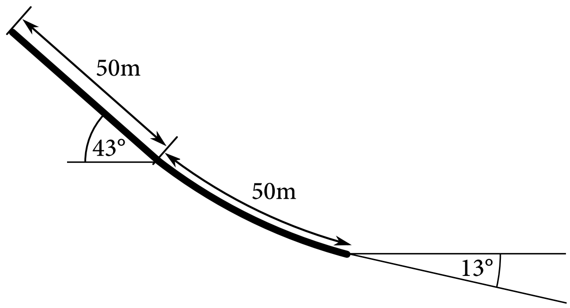
Za pár dní si všiml, že stín podstavy je obvykle podstatně menší, než samotná podstava. Jak nejvýše (úhlově) může být Slunce na obloze, aby podstava nevrhala na zem žádný stín?

16 Teplota na dně moře hlubokého 1 km je 4 °C. Rybička Dory pomalu plave v této hloubce. Přemýšlejíc nad smyslem života vypustí bublinu s poloměrem 2 cm, která začne stoupat na povrch. Jaký bude poloměr bubliny těsně pod hladinou, když teplota vody na povrchu je 18 °C? Uvažujte, že je voda nestlačitelná a že je příspěvek kapilárního tlaku k celkovému tlaku v bublině zanedbatelný. Dále předpokládejte, že vzduch v bublině se okamžitě zahřívá na teplotu okolní vody.

Výsledek odevzdejte s přesností na milimetry.

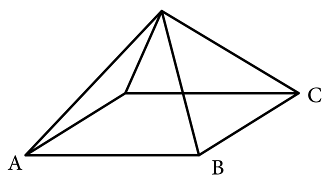
17 Filip se dal na adrenalinové sporty. Minulou zimu se rozhodl, že vyzkouší skoky na lyžích. Vydal se k můstku, který je zobrazen na obrázku. Ten začína nakloněnou rovinou dlouhou 50 m se sklonem 43°, která plynule přechází do kružnicového oblouku dlouhého 50 m, který na konci svírá s vodorovným směrem úhel 13°. Jaké maximální přetížení působí na Filipa během jízdy po můstku?

Přetížení je definováno jako zrychlení tělesa ku zrychlení při volném pádu.



18 Matěj rád skáče bungee-jumping. S prázdným žaludkem má hmotnost M a po seskoku kmitá s periodou T. Kolik palačinek o hmotnosti m musí sníst, aby se perioda jeho pohybu prodloužila o polovinu?

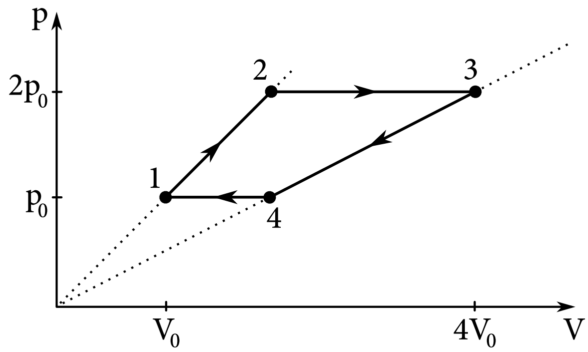
19 Katka byla tento rok na dovolené v Egyptě. Po návratu domů si z osmi stejných drátů s délkovým odporem ξ a délkou L poskládala tuto “odpornou” pyramidu. Jaký je poměr odporů mezi dvojicemi bodů A–B a A–C?



20 Kvík nedávno zase očumoval vzdálené galaxie. Protože výhled ze Slovenska ho už omrzel, vydal se do exotičtějších krajin. Jak tak leží přímo na rovníku, naráz zahlédne nad západním horizontem satelit, který to měl namířeno přímo na východ přesně přes něj. Přelet satelitu od západního po východní horizont trval přesně 8 minut. Jak vysoko nad Zemí přelétal satelit? Předpokládejte, že se pohyboval po kruhové trajektorii. Nezapomeňte na rotaci Země!

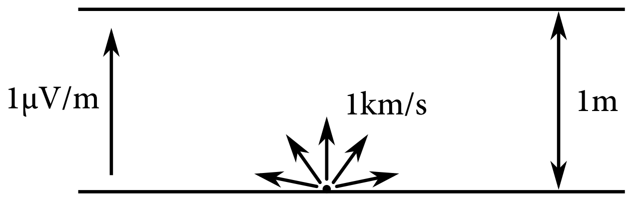
Tato úloha nemá analytické řešení. Budou akceptována řešení, která se od přesného liší maximálně o 1 km.

21 S ideálním plynem s počátečním tlakem p_0, objemem V_0 a teplotou T_0 se uskutečnil kruhový děj zobrazený v pV–diagramu. Překreslete tento děj do VT–diagramu. Množství pracovního plynu se během děje neměnilo. Nezapomeňte na osách vyznačit všechny podstatné hodnoty.

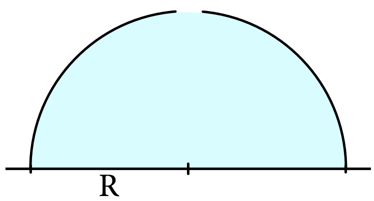


22 V nekonečném deskovém kondenzátoru se vzdáleností desek 1 m a intenzitou elektrického pole 1 μV/m je na spodní elektrodě umístěný izotropní zdroj elektronů. Elektrony z něho vylétávají rychlostí 1 km/s na všechny strany. Na jak velkou plochu desek kondenzátoru dopadají?

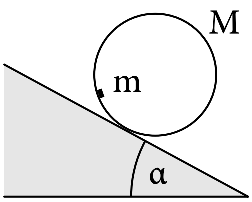
Výsledek uveďte s přesností na m^2.



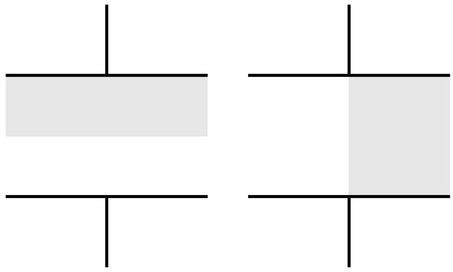
23 Katarína už víc vařit nebude! Dutou nádobu ve tvaru polokoule s poloměrem R otočila dnem vzhůru a vyvrtala do ní díru. Následně začala do díry lít vodu s hustotou ρ. Dřív, než by se nádoba naplnila, voda nádobu nadzdvihla a přetekla pod její stěnou. Jaká největší mohla být hmotnost nádoby, aby tahle situace mohla nastat?



24 V dutém sudu hmotnosti M máme volně položený sýr tvaru kvádru o hmotnosti m. Koeficient tření mezi sudem a sýrem je μ. Sud se sýrem položíme na strmý kopec. Jaký může být jeho maximální sklon α, abychom na něj sud dokázali postavit, aniž by se skutálel? Tření mezi sudem a svahem kopce je dostatečně velké na to, aby sud neprokluzoval.



25 Do deskového kondenzátoru jsme umístili dielektrikum s relativní permitivitou ε dvěma různými způsoby. Nejdřív jsme vyplnili jeho horní polovinu a potom jeho pravou polovinu. Jaký je poměr kapacit v prvním a druhém případě?

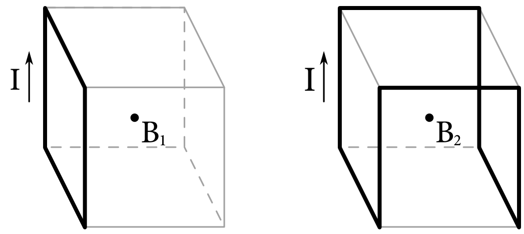


26 Štěpán, Matěj a Jáchym jsou v Krkonoších na vrcholu Sněžky. V úsilí donutit Jáchyma být alespoň chvíli ticho a poslouchat, navrhl Štěpán hru na větroměr. Rozestaví se do tří vrcholů čtverce o straně 90 m tak, že Štěpán a Matěj jsou na jeho úhlopříčce. Pak oba začnou křičet, přičemž Jáchym poslouchá a zapíše si čas, za který zvukový projev Štěpána (255 ms) a Matěje (285 ms) dorazí k němu.

Štěpán to ale nedomyslel: v rámci zabezpečení funkčnosti větroměru musí i s Matějem poslouchat Jáchyma, přičemž ke Štěpánovi zvuk došel za 304 ms a k Matějovi za 272 ms. Jaká je rychlost větru na Sněžce? Rychlost zvuku v krkonošském vzduchu není našim třem kolegům známa.

Výsledek udávejte s přesností na desetiny m/s.

27 Odporové sítě z krychlí už nikoho nebaví. Namísto toho se Matěj rozhodl měřit velikost magnetických polí. Když proud tekl okolo jedné strany krychle, Matěj v jejím středu naměřil intenzitu B_1. Rozhodl se vám však pořádně zavařit a vyformoval vodič do nového tvaru. Kolikrát větší bude intenzita magnetického pole uprostřed krychle oproti prvnímu případu?

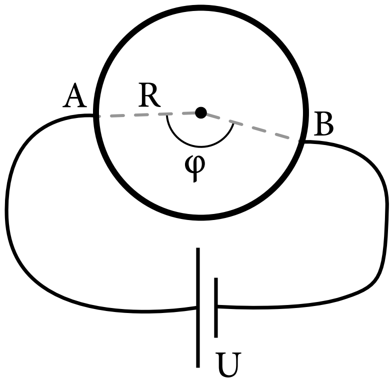


28 Jimi se pohybuje po šikmé ploše. Jednou si koupil mléko v krabici tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o hraně délky 1 dm a výšce 3 dm. Jimi teď chce z krabice upít, a poté ji postavit na nakloněnou rovinu se sklonem 30° tak, že hrana podstavy je rovnoběžná s vrstevnicí. Maximálně kolik mléka v ní může nechat, aby stabilně stála?

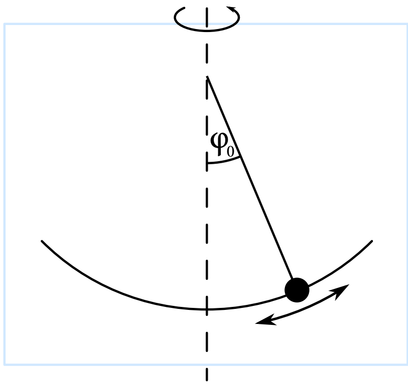
29 Planeta obíhá okolo svojí hvězdy po kruhové dráze. Poklidné vesmírné okolí však už není, co bývalo: všude prolítají otravné asteroidy, vyhasínající hvězda svítí stále silněji a blízká civilizace vypouští stále více navigačních satelitů a skřehotajících elektromobilů. No není divu, že to planeta s nervy nevydrží a ze samého rozčílení se roztrhne na dva kusy.

Oba kusy se stále pohybují v původní rovině oběhu, ale už po parabolických drahách, jejichž perihelia odpovídají poloze planety v okamžiku exploze. Jaký je poměr hmotností lehčí a těžší části?

30 Glum si v rámci krácení dlouhé chvíle ve svém podzemním jezírku hrál s elektronickými součástkami. Vzal svůj oblíbený prsten s poloměrem R, délkovým odporem λ a připojil na něj zdroj jednosměrného napětí U tak, že spojnice kontaktů drátů na prstenu s jeho středem svíraly úhel φ. Následně změřil magnetickou indukci v jeho středu. Co naměřil?



31 Vítek se zabýval matematickým kyvadlem. Nejprve ho umístil mezi dvě rovnoběžné desky, aby omezil jeho pohyb na rovinný. Potom ho roztočil i s deskami kolem vertikální osy konstantní úhlovou rychlostí. Kyvadlo se ustálilo v rovnovážné poloze odchýlené o úhel $\varphi_0 \gg 0$ od svislého směru. Potom do něho jemně ťukl a kyvadlo začalo kmitat okolo své rovnovážné polohy. Určete poměr periody oběhu kyvadla okolo vertikální osy a periody těchto malých kmitů.



32 Zeměplocha má tvar nekonečné, rovné placky, nad kterou se ve výšce $h = 500$ km vznáší kulaté Slunce o poloměru $R_\odot = 10$ km a teplotě $T_\odot = 5777$ K. Kdesi pod Sluncem se vytvořila obyvatelná zóna, tedy plocha, kde se rovnovážná teplota pohybuje v rozpětí 0 – 30 °C. Jaká je její rozloha?

Slunce i Zeměplocha vyzařují jako absolutně černá tělesa. Zeměplocha velmi špatně vede teplo a vyzařuje pouze do poloprostoru nad ní. Úhlovou velikost Slunce při pohledu ze Zeměplochy zanedbejte. Uznána budou řešení, která se od správné hodnoty neliší o více než 10 000 km^2.

33 Astronaut stojí na nevelkém kulatém asteroidu o hmotnosti M a poloměru R. Povrch asteroidu však není bohatý na vzrušující události. A protože si přes skafandr ani nehty ohryzat nemůže, po chvíli ze samé nudy začne poskakovat. Určitou rychlostí vyskočí pod úhlem 45° vůči povrchu a vznese se do prostoru. Po chvíli přistane ve vzdálenosti čtvrtiny obvodu asteroidu. Jak dlouho trval jeho let?

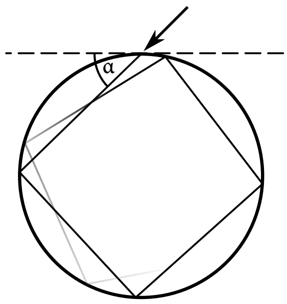
Uvažujte, že hmotnost asteroidu je mnohem větší než hmotnost astronauta.

34 Z Kvíka se vyklubal silniční pirát. Nadarmo na něj Jaro volal “stůj, stůj, červená!”, on si to vesele túroval dál. Až když přejel přes křižovatku, začal přemýšlet, jak by se vymluvil, kdyby ho zastavili policisté. Jak rychle by musel vjíždět do křižovatky, aby viděl červené světlo jako zelené? Vlnová délka zeleného světla je 550 nm a červeného světla 660 nm.

Výsledek odevzdávejte jako zlomek rychlosti světla.

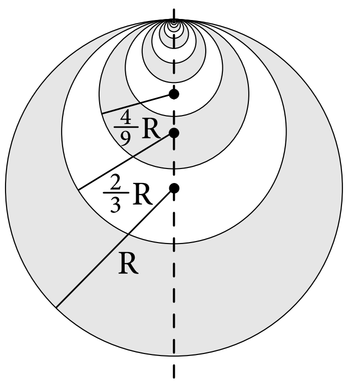
35 Rosnička Danka a ropušák Dano visí na laně zavěšeném přes kladku, přičemž jsou od ní oba vzdálení H. Dano je dvakrát těžší než Danka. Aby se soustava nehýbala, na Dančiné straně jsme k lanu připevnili závaží se stejnou hmotností. Když Dano ani po čtvrtém upozornění nepřestal kvákat, Danka začala šplhat nahoru konstantní rychlostí vzhledem k lanu. Která žába se dostane ke kladce dřív a jak daleko od ní v tu chvíli bude druhá žába?

36 Rapper Sajmon si za svoje těžko vydělané peníze koupil luxusní kabriolet s dokonale lesklými pochromovanými koly s poloměrem R. Když dovnitř kola zasvítí laserem v rovině kolmé na jeho osu, paprsek se odráží od stěn prakticky nekonečně dlouho. Jak velká **tahová** síla napíná obruč kola, je-li výkon Sajmonova laseru P a svítí-li jím po dobu t pod úhlem α?

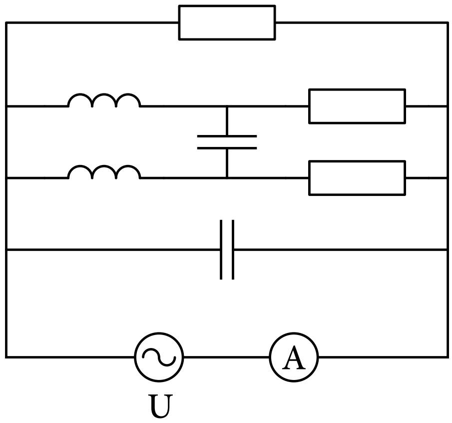


37 Samko si v obchodě koupil velkou cibuli. Zapomněl ji však na balkóně a část vnitřku mu seschla. Cibule teď vypadá jako koule o poloměru R, ve které je prázdná koule o poloměru $\frac{2}{3}R$. V této dutině je opět plná koule o poloměru $\left(\frac{2}{3}\right)^2 R$, ve které je dutina o poloměru $\left(\frac{2}{3}\right)^3 R$. V této dutině je opět plná koule, a tak dále…

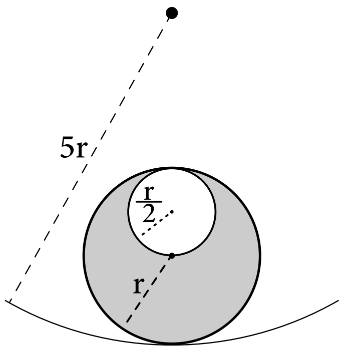
Jaký je moment setrvačnosti cibule okolo osy symetrie zobrazené na obrázku, jestliže její hmotnost je M?



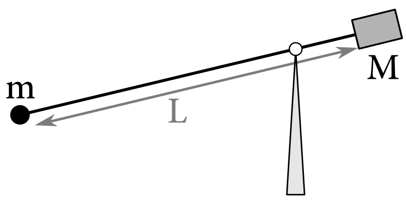
38 Elektrikář Fero opět vzal svůj starý známý obvod (rezistory s odporem R, kondenzátory s kapacitou C, cívky s indukčností L, dokonalé vodiče a ampérmetr). Tentokrát ho zapojil na zdroj střídavého napětí s amplitudou U a úhlovou frekvencí ω. Jakou amplitudu proudu ukazuje ampérmetr?



39 Vozka Dan zapadl se svým vozem v jámě s poloměrem $5r$. Když se ho pokoušel vytáhnout, odtrhl jedno z kol s poloměrem r a navíc do něj udělal kulatou díru s poloměrem $r/2$, jak lze vidět na obrázku. Zaujalo ho, že odtrhnuté kolo při převalování po dně jámy vykonává kmitavý pohyb. Jaká je perioda malých kmitů rozbitého kola?



40 Helboj chce dobývat středověké hrady. Z poslední návštěvy v nejmenovaném švédském obchodě si přinesl TREBÖCHET – nehmotnou tyč délky L, závaží o hmotnosti M, projektil o hmotnosti m a kloub, okolo kterého se má tyč otáčet. V návodu však zapomněli zmínit, kam je třeba kloub umístit. Jak daleko od protizávaží jej má připevnit, aby bylo obvodové zrychlení projektilu po uvolnění protizávaží maximální?



Vzorová řešení

1 Dostat se na protilehlý roh nejkratší cestou není pro mravence vůbec žádný problém! Stačí si rozložit povrch kvádru na síť a najít spojnici bodů A a B. Způsobů je však více a každý vede k jinému výsledku, takže musíme najít nejlepší.

Délky spojnic na síti jsou podle Pythagorovy věty

$$s_1 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}, \quad s_2 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2} \quad \text{a} \quad s_3 = \sqrt{(c+a)^2 + b^2}.$$

Podle zadání však platí $a < b < c$. Nejkratší z cest je ta, která odpovídá úhlopříčce obdélníku nejvíce podobnému čtverci. V našem případě to je s_1 a pro výsledný čas mravence potom platí

$$t = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}.$$

2 Průměrná rychlost se počítá jako poměr celkové dráhy k celkovému času. Celkový čas přímo odečteme z grafu a celkovou dráhu můžeme vypočítat jako obsah plochy pod křivkou, což je:

$$s = \frac{12 \cdot 10}{2} + \frac{(15-5) \cdot 4}{2} + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + \frac{(18-10) \cdot 6}{2} + 10 \cdot 6 + 18 \cdot 4 + \left(3^2 - \frac{\pi 3^2}{4}\right) + 15 \cdot 3 \doteq 342{,}931.$$

Po dosazení dostáváme

$$v = \frac{s}{t} = \frac{342{,}931\ \text{m}}{33\ \text{s}} \doteq 10{,}39\ \text{m/s}.$$

3 Pro řešení tohoto příkladu stačí zjistit, za jaký čas hochům v průměru zastaví auto, a potom už jen připočteme čas jejich jízdy do Krakova. Víme, že v průměru zastaví každé dvousté auto, takže průměrný čas zastavení vypočítáme jako $\frac{200}{k}$, pokud okolo projíždějí auta s frekvencí k.

Takhle jednoduše dostáváme výsledek: Michal přijede do Krakova v průměru za $\frac{200}{50} + 100 = 104$ minut a Mirek za $\frac{200}{25} + 90 = 98$ minut. Odpovědí je tedy, že Mirek přijede do Krakova o šest minut dřív.

4 Nejprve si musíme uvědomit, co je to objemové procento. V našem případě je to poměr objemu ethanolu a celého objemu nápoje, který babička našla. Objemové procento se dá převést na hmotnostní procento (jinak řečeno hmotnostní zlomek), pokud známe hustotu ethanolu a hustotu nápoje. Hmotnostní procento si označíme ϱ:

$$\frac{V_{\text{et}} \rho_{\text{et}}}{V_{\text{nápoj}} \rho_{\text{nápoj}}} = \frac{m_{\text{et}}}{m_{\text{nápoj}}} = \varrho.$$

Ze zadání známe hustotu ethanolu, hustotu nápoje dopočítáme. Nápoj, který babička "objevila", je složený z vody a alkoholu. Známe hmotnostní procento ethanolu, zbytek je voda:

$$\rho_{\text{nápoj}} = 0{,}4\rho_{\text{etanol}} + 0{,}6\rho_{\text{voda}},$$

$$\rho_{\text{nápoj}} = 0{,}4 \cdot 790\ \text{kg/m}^3 + 0{,}6 \cdot 1000\ \text{kg/m}^3,$$

$$\rho_{\text{nápoj}} \doteq 916\ \text{kg/m}^3.$$

Toto dosadíme do výrazu pro hmotnostní procento:

$$\varrho = \frac{V_{\mathrm{et}}\rho_{\mathrm{et}}}{V_{\text{nápoj}}\rho_{\text{nápoj}}} = 0{,}4\frac{\rho_{\mathrm{et}}}{\rho_{\text{nápoj}}},$$

$$\varrho = 0{,}4 \times \frac{790\ \mathrm{kg/m^3}}{916\ \mathrm{kg/m^3}},$$

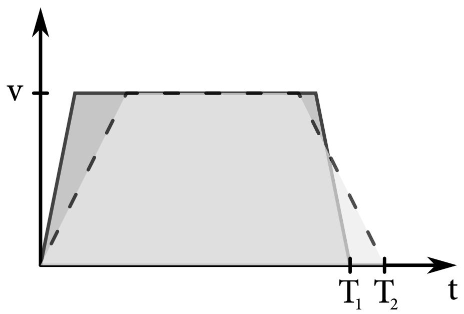
$$\varrho \doteq 0{,}345 = 34{,}5\ \%.$$

Nápoj tedy obsahuje zhruba 34,5 hmotnostních procent alkoholu.

5 Stejně jako při všech podobných úlohách, základem je nakreslit si graf a spočítat dráhu jako plochu pod ním. Ze zadání vyplývá, že graf bude mít tvar lichoběžníka. Vzpomeneme si na vzorec na obsah lichoběžníka:

$$s = \frac{v\,(a+c)}{2},$$

kde a a c jsou základny lichoběžníka a v je jeho výška.



Obrázek 1: *Průběh rychlosti*

Protože cesta tam a cesta zpět jsou stejně dlouhé, také plochy pod grafem se v obou případech musí rovnat:

$$\frac{(2T_1 - t_1)\,v}{2} = \frac{(2T_2 - t_2)\,v}{2},$$

kde T_1 je celkový čas cesty tam, T_2 je čas cesty zpět a v je maximální rychlost. Z této rovnice už dokážeme vyjádřit rozdíl časů

$$T_1 - T_2 = \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

6 Víme, že voda z postřikovače vystřikuje rychlostí v. Každý kousek vody si můžeme představit jako malé tělísko, které se pohybuje svisle vzhůru rovnoměrně zpomaleným pohybem se zpomalením g. Čas, který stráví voda ve vzduchu, vypočítáme ze vzorce pro svislý vrh. Kinematická rovnice pohybu vystříknutého kousku vody je

$$0 = vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

z čehož dostáváme čas pobytu vody ve vzduchu

$$t = \frac{2v}{g}.$$

Teď stačí vypočítat množství vody, které za tento čas proteče tryskou. Známe rychlost, poloměr i hustotu vody, takže můžeme vyjádřit hmotnostní průtok $Q_m = \pi r^2 v \rho$. Hmotnost vody ve vzduchu je dána součinem průtoku a času pobytu ve vzduchu, takže

$$m = \frac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}.$$

7 Podle Archimédova zákona na cihlu ve vzduchu působí kromě tíhové síly i vztlaková síla. Aby se cihla ve vzduchu vznášela, tyto dvě síly musí mít stejnou velikost, tedy

$$\rho_v V g = mg,$$

kde ρ_v je hustota vzduchu. Objem cihly bude $V = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$. Hmotnost spočítáme jako součin obsahu povrchu cihly a plošné hustoty σ

$$m = \sigma \cdot 2\left(k \cdot 2k + k \cdot 4k + 2k \cdot 4k\right) = 28k^2\sigma.$$

Po dosazení hmotnosti a objemu do prvního vzorce dostáváme

$$k = \frac{7\sigma}{2\rho_v} \doteq 10{,}77\ \mathrm{cm} \doteq 11\ \mathrm{cm}.$$

8 Nechť všechna pěna klesne za nějaký čas t. Ve sklenici tak přibude sloupec nápoje vysoký vt a sloupec vzduchu vysoký ut, přičemž pěny celkově původně bylo $(u+v)\,t$. Vzduch tedy tvořil $\frac{u}{u+v}$ objemu pěny.

9 Těžiště komplikovanějšího tělesa spočítáme podle momentové věty následovně:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Začněme s x-ovou složkou těžiště. Rozdělme si trojzubec na menší části, jejichž hmotnosti a polohy těžišť dokážeme jednoduše vyčíst z obrázku. Pro čtverce a obdélníky to je jejich geometrický střed, pro trojúhelníky využijeme faktu, že těžiště trojúhelníka se nachází v jedné třetině jeho výšky. Pro jedno z možných dělení vypadá dosazení následnovně:

$$X = \frac{16m \cdot 10a + 2m \cdot 17{,}5a + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{17+18+18}{3}a + 3 \cdot 3m \cdot 19{,}5a + 3 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{21+21+22}{3}a}{16m + 3m + 9m + \frac{3}{2}m} = \frac{2521}{177}a \doteq 14{,}242a.$$

S y-ovou souřadnicí těžiště to budeme mít jednodušší, stačí si všimnout, že trojzubec je symetrický vzhledem ke své rukojeti. Proto je y-ová složka těžiště rovna

$$Y = \frac{13}{2}a = 6{,}5a.$$

10 Ubohý hobit těsně před dopadem výtahu vyskočí doufajíc, že mu to pomůže přežít. Má však ale skutečně pravdu? Při výskoku ze zemského povrchu hobit vyskočí do výšky h, jeho svaly tedy efektivně vykonaly práci $W = mgh$. Po krátkém zamyšlení si můžeme uvědomit, že ve výtahu se děje to samé. Protože hmotnost výtahu je mnohem větší než hmotnost hobita, množství energie, kterou hobit odevzdá výtahu, bude zanedbatelně malé, stejně jako při výskoku ze země.

Výsledná rychlost, kterou bude mít hobit při dopadu, bude tedy rovná rozdílu rychlosti výtahu a rychlosti při výskoku ze země. Z kinematických rovnic tedy plyne:

$$v_{\mathrm{dopad}} = v_{\mathrm{výtah}} - v_{\mathrm{výskok}} = \sqrt{2gH} - \sqrt{2gh} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right),$$

kde H je výška, ze které padá výtah a h je výška, do které dokáže vyskočit hobit na zemi. Abychom získali výšku, ze které by hobit volným pádem dosáhl stejné rychlosti, stačí do vzorce pro volný pád dosadit v_{dopad}. Dostaneme

$$s = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)\right)^2}{2g} = \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)^2.$$

Nakonec dosadíme hodnoty ze zadání, tedy $h = 0{,}7$ m a $H = 3$ m. Zjistíme, že pokud hobit vyskočí, jeho rychlost dopadu bude odpovídat pádu z výšky 80 cm, což mu pravděpodobně zachrání život.

11 Tuto úlohu dokážeme vyřešit porovnáním energie soustavy na začátku a při dosažení maximální výšky. Označme výšku Špagetky h, její hustotu ρ_s a její objem V. Když se Špagetka vynoří, její původní místo zaujme voda. Stanovme si nulovou hladinu energie v bodě, který je v hloubce $h/2$ pod vodní hladinou.

Válec má těžiště ve svém středu. Prostor, kde se předtím Špagetka nacházela, zaplní voda. Její potenciální energie přitom klesne o

$$E_v = \rho_v V g \frac{h}{2}.$$

Na konci má nenulovou potenciální energii pouze Špagetka s těžištěm v neznámé výšce x, pro kterou platí

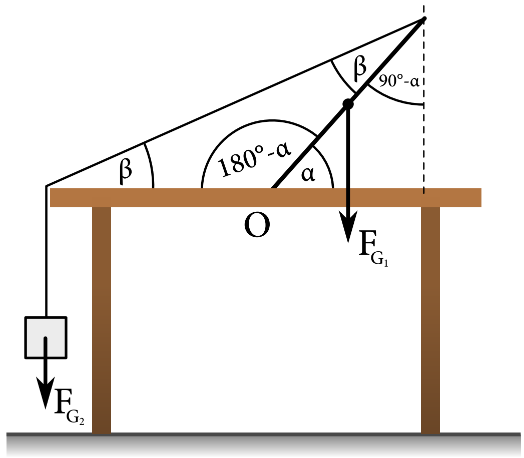
$$E_s = V g x \rho_s.$$

Jejich porovnáním získáme výšku x

$$\rho_v V g \frac{h}{2} = V g x \rho_s \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h\rho_v}{2\rho_s} = 4{,}5\ \mathrm{m}.$$

Je to výška těžiště nad referenční hladinou a její hodnota je samozřejmě stejná, jako výška vrchní podstavy nad vodní hladinou.

12 Je třeba se zamyslet, kdy je soustava v rovnováze. Jediné, co může tyč uvést do pohybu, je moment síly, kterým závaží působí na tyč a moment tíhové síly tyče. Soustava bude v rovnováze, když se tyto momenty budou rovnat. Počítejme momenty vzhledem k bodu O.



Obrázek 2: *Situace na stole se zakreslenými silami.*

Rameno tíhové síly tyče F_{G1} je $\frac{L}{2}\cos\alpha$, rameno tíhové síly závaží F_{G2} je $L\sin\beta$. Aby byla tyč v rovnováze, musí platit

$$M_1 = M_2,$$

$$2mg\cos\alpha\frac{L}{2} = mgL\sin\beta,$$

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$

Ze zadání víme, že lano s tyčí tvoří rovnoramenný trojúhelník. Z toho, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, zjistíme, že

$$2\beta + (180° - \alpha) = 180°,$$

$$2\beta = \alpha.$$

Dostáváme tedy rovnici

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Její řešení buď vidíme okamžitě, nebo si ho musíme poctivě spočítat. Pro sinus polovičního argumentu platí $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. Po drobných úpravách můžeme rovnici upravit do podoby

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

což je kvadratická rovnice pro kosinus. Jejím řešením je

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Nás bude zajímat řešení se znaménkem "+", protože je zřejmé, že hledaný úhel je z intervalu $\left\langle 0;\, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Tomu odpovídá úhel

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

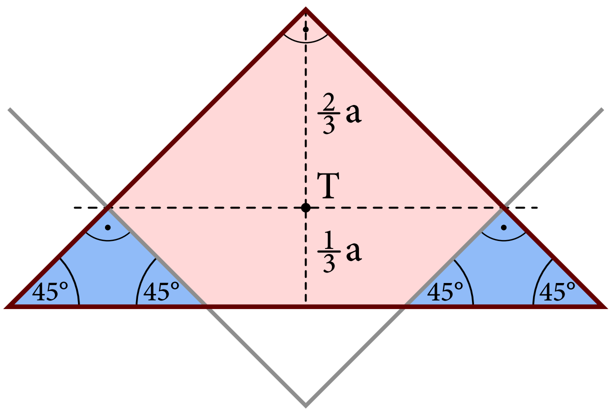
13 Proud, který protéká ampérmetrem, zjistíme poměrně jednoduše. Protože se nachází v hlavní větvi hned vedle zdroje, stačí nám zjistit, jaký je celkový odpor zapojení. To sice vypadá na první pohled poměrně komplikovaně, ale protože je v něm zapojený pouze zdroj stejnosměrného napětí, můžeme ho výrazně zjednodušit.

Kondenzátory se ve stejnosměrném obvodu chovají, jako by tam nebyly – proud přes ně neteče, jsou jednoduše mezerou v obvodu. Naopak cívky se chovají jako dokonalé vodiče a nekladou žádný odpor. To znamená, že v celém Ferově zapojení stačí uvažovat jen tři paralelně zapojené rezistory s odporem R, zdroj a ampérmetr. Odpor celého zapojení je triviálně $\frac{R}{3}$ a ampérmetr tedy bude ukazovat hodnotu proudu

$$I = \frac{U}{\frac{R}{3}} = 3\frac{U}{R}.$$

14 Na střechu působí tíhová síla v jejím těžišti a reakční síla od stěn. Aby střecha nespadla, součet působících momentů sil musí být nulový. Osou otáčení bude spojnice bodů, které ji podpírají. V případě maximálního možného vysunutí střechy bude její těžiště na této spojnici.

Teď je třeba vypočítat plochu, kterou střecha zakryje. Jednodušší bude vypočítat plochu malých trojúhelníčků a odečíst je od plochy velkého $S_1 = \frac{a^2}{2}$, kde a označuje délku odvěsny. Když se nad tím zamyslíme, můžeme z podobnosti trojúhelníků určit, že malé trojúhelníčky budou také pravoúhlé a rovnoramenné (viz obrázek). Dále využijeme, že těžnice rovnoramenného trojúhelníku je zároveň jeho výškou a osou úhlu protilehlého základně. Těžiště se nachází v jedné třetině těžnice, bližší k příslušné základně. To znamená, že všechny rozměry menších trojúhelníků jsou třetinové.



Obrázek 3: *Maximálně vysunutá střecha*

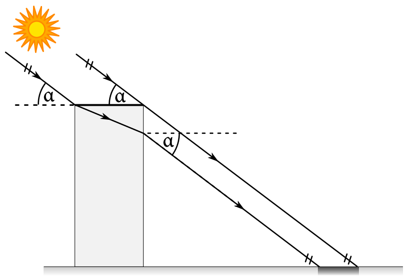
Proto obsah střechy bez trojúhelníků můžeme vypočítat jako

$$S = \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{7}{18}a^2.$$

Část střechy pokrývající altánek je proto

$$k = \frac{\frac{7}{18}a^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{7}{9}.$$

15 Věru, nedostatek tekutin způsobuje všelijaké přeludy. Ve skutečnosti takováto situace nastat nikdy nemůže, kromě jednoho patologického případu. Paprsek, který dopadá na hranol pod úhlem α, hranol také pod úhlem α opustí. Vlivem hranolu tedy stín skutečně zmenšíme, ale nikdy úplně nezmizí, ledaže by se paprsky od Slunce šířili horizontálně pod úhlem 0°. Tehdy by zem nebyla vůbec osvětlená, a tedy podstava by určitě nevrhala na zem žádný stín.



Obrázek 4: *Paprsky po přechodu hranolem*

16 V bublině je vzduch, který můžeme považovat za ideální plyn. A jak všichni víme, platí stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = NkT,$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem a T je jeho teplota. N je počet molekul v plynu, který je v našem případě konstantní, a k je Boltzmannova konstanta. Stavovou rovnici tedy umíme přepsat na tvar $\frac{pV}{T}$ = konst. Nyní si stačí uvědomit, jaké jsou tyto veličiny pro naši bublinu na dně a pod hladinou. Položíme je do rovnosti

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Teploty T_1 a T_2 jsou známé ze zadání, objem V_1 vypočítáme z poloměru bubliny jako $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. Poloměr r_2 máme vypočítat. Proto si ho vyjádříme:

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{p_1 T_2}{T_1 p_2}}.$$

Teď už nám jen stačí vypočítat tlaky. Na první pohled se zdá, že máme jen hydrostatický tlak $p = h\rho g$. To však není pravda, musíme započítat i atmosférický tlak, který působí na hladině moře. Pascalův zákon říká, že tlak stoupne o hodnotu atmosférického tlaku p_a v celém objemu kapaliny. Z toho vyplývá, že dostaneme tlaky $p_1 = h\rho g + p_a$ a $p_2 = p_a$. To už jen dosadíme do stavové rovnice a dostaneme

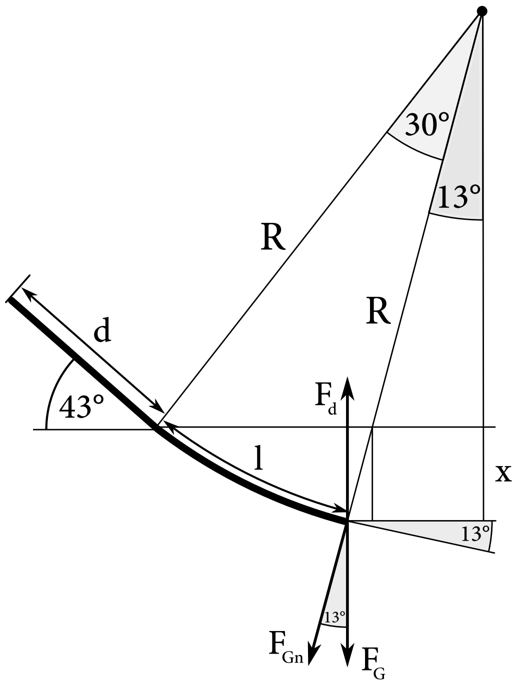
$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2}{T_1}\left(1 + \frac{h\rho g}{p_a}\right)}.$$

Číselně vyjádříme výsledek z naší rovnice. Přitom si musíme dávat pozor na to, abychom dosadili termodynamickou teplotu. Po dosazení všech hodnot nám vyjde

$$r_2 \doteq 9{,}5\ \mathrm{cm}.$$

Všimněte si, že při počítání jsme mohli zanedbat vliv povrchového napětí, neboť tlak způsobený povrchovým napětím je přibližně o pět řádů menší než atmosférický tlak.

17 Nejprve si vyjasněme, proč by na Filipa mělo působit nějaké přetížení, když volně snížď dolů po můstku. Po krátké úvaze si uvědomíme, že v poslední fázi před odrazem se pohybuje po zakřiveném můstku, takže na něj působí dostředivá síla F_d. Velikost dostředivého zrychlení je $a_d = \frac{v^2}{R}$, kde R je poloměr zakřivení můstku.



Podívejme se na geometrii můstku. Nejprve nalezněme převýšení h mezi nejvyšším a nejnižším bodem. To se skládá z převýšení nakloněné roviny dlouhé $d = 50$ m a převýšení zakřivené části, tedy

$$h = d \sin 43° + x.$$

S trochou trigonometrie bez větších problémů dostaneme

$$x = R\left(\cos 13° - \cos 43°\right).$$

Dále víme, že na kruhovém oblouku dlouhém $l = 50$ m se sklon změní o 30°. Na základě toho dokážeme spočítat poloměr křivosti můstku

$$R = \frac{6l}{\pi}.$$

Rychlost v okamžiku výskoku dostaneme ze zákona zachování energie. Platí, že $\frac{1}{2}v^2 = gh$. Pro odstředivé zrychlení proto můžeme použít vztah

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{2h}{R}g.$$

Využijeme-li známou geometrii můstku, můžeme psát

$$a_d = \frac{2}{R}\left[d \sin 43° + R\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g = \left[\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 2\left(\cos 13° - \cos 43°\right)\right]g.$$

Nezapomínejme však, že Filip se nachází v gravitačním poli Země. To znamená, že k celkovému přetížení přispívá i jeho tíha – konkrétně její normálová složka $F_{G\perp} = F_G \cos 13°$. Pro výsledné přetížení pak dostáváme

$$a = a_d + g\cos 13° = \left(\frac{\pi d}{3l}\sin 43° + 3\cos 13° - 2\cos 43°\right) g \doteq 2{,}17\,g.$$

18 Elastické lano, které se používá na bungee jumping, se chová jako pružinka, takže Matějův pohyb můžeme popsat jako pohyb harmonického oscilátoru. Perioda takového oscilátoru je obecně $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Před jídlem bude perioda Matějova pohybu

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Po snězení N palačinek bude kmitat s periodou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+Nm}{k}}.$$

Ze zadání víme, že výsledná perioda bude $T_2 = \frac{3}{2}T_1$. V tom případě

$$\frac{3}{2}2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+Nm}{k}},$$

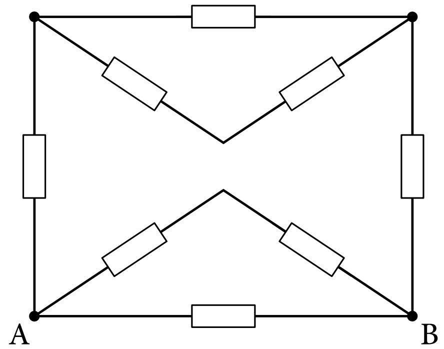
a po umocnění

$$\frac{9}{4}\frac{M}{k} = \frac{M+Nm}{k}.$$

Nakonec už jen vyjádříme

$$N = \frac{5}{4}\frac{M}{m}.$$

19 Ze zadání jasně plyne, že je třeba spočítat odpory jednotlivých zapojení. Nejprve nás bude zajímat odpor mezi body A a B. Odpor se nezmění, jestliže vrchol pyramidy nahradíme dokonale vodivým drátem, který spojuje vodiče smeřující od bodů A a B ke zbylým dvěma bodům. Když si uvědomíme, že tento dokonalý vodič leží na zrcadlové ose symetrie zapojení, zjistíme, že při zapojení ke zdroji napětí je na obou koncích dokonalého vodiče stejný potenciál. To znamená, že jím nikdy nepoteče proud a vůbec nic se nestane, když ho přestřihneme. Ekvivalentní odporové schéma vypadá následovně:

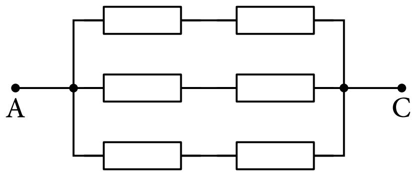


Obrázek 5: *Ekvivalentní odporové schéma mezi body A a B*

Nahradili jsme odpor každého odporového drátu rezistorem s odporem $R = \xi L$ a dokonalými vodiči. Vidíme, že tohle už je obyčejné sériově-paralelní zapojení. Výsledný odpor je

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{\left[2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R}\right]\frac{2R\cdot R}{2R+R}}{2R + \frac{2R\cdot R}{2R+R} + \frac{2R\cdot R}{2R+R}} = \frac{8}{15}R.$$

Při výpočtu odporu mezi body A a C použijeme stejný trik s přestřihnutím drátu jako v předchozím případě. Tentokrát jsou na ose symetrie dva odporové vodiče, které můžeme zahodit. Tím přicházíme k následujícímu ekvivalentnímu zapojení



Obrázek 6: *Ekvivalentná odporová schéma medzi bodmi A a C*

Lehce vypočítame, že odpor je

$$R_{AC} = \frac{2}{3}R.$$

To znamená, že hledaný poměr odporů nabývá hodnoty

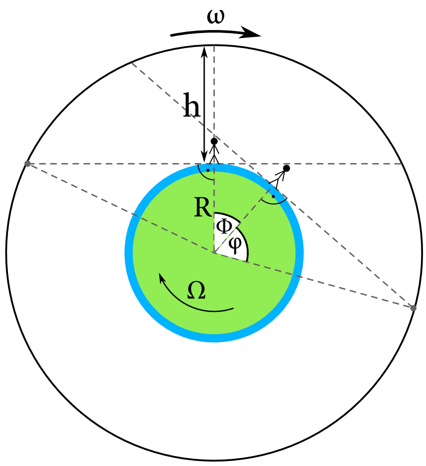
$$\frac{R_{AB}}{R_{AC}} = \frac{\frac{8}{15}R}{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{5}.$$

20 Předpokládejme, že satelit letí ve výšce h nad povrchem Země po kruhové trajektorii. Na této orbitě ho drží gravitační síla, která pro něj plní funkci dostředivé síly, proto můžeme psát

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2 (R+h),$$

kde R je poloměr Země, M je její hmotnost, m je hmotnost satelitu a ω je jeho oběžná úhlová rychlost. Odtud

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}.$$



Obrázek 7: *Satelit na orbitě, pohled na jižní pól*

Nechť přelet satelitu trvá T. Za tento čas satelit přeletí úhel $\phi = \omega T$. Horizonty vidíme pod úhlem $\varphi = 2\arccos\frac{R}{R+h}$. Nezapomeňme, že v důsledku rotace Země se Kvík ještě pootočí o dodatečný úhel $\Phi = \Omega T$, kde Ω je úhlová rychlost rotace Země. Když to dáme do rovnosti, dostaneme rovnici

$$\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T = \Omega T + 2\arccos\frac{R}{R+h},$$

ze které bychom rádi vyjádřili neznámou výšku h.

A tady narážíme na problém – dostali jsme rovnici, kterou neumíme řešit analyticky. Proto ji budeme řešit numericky. Použijeme metodu binárního vyhledávání. Za tímto účelem zadefinujeme funkci

$$F(h) = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}T - \Omega T - 2\arccos\frac{R}{R+h}$$

a budeme hledat její nulový bod $F(h) = 0$.

Princip binárního vyhledávání je následující. Nejprve odhadneme interval $(a;b)$, ve kterém očekáváme, že leží kořen rovnice. Vzhledem k tomu, že funkce $F(h)$ je spojitá, tak $F(a)\cdot F(b) < 0$, t. j. pokud znaménka na koncích intervalů jsou opačná, potom $\exists c \in (a;b) : F(c) = 0$.[1] Následně interval rozdělíme na poloviny, čímž dostaneme dvojici intervalů $\left(a;\frac{a+b}{2}\right)$ a $\left(\frac{a+b}{2};b\right)$.

Jakmile máme to štěstí, že $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, algoritmus ukončíme. V opačném případě pokračujeme prohledáváním jednoho z dvojice intervalů – toho, který splní podmínku, že v krajních bodech intervalu jsou opačná znaménka. Algoritmus ukončíme, jakmile dosáhneme požadované přesnosti. V našem případě zadání požaduje přesnost 1 km, což znamená, že skončíme, jakmile délka intervalu klesne pod tuto hodnotu.

Pojďme na věc. Zajímá nás výška letu satelitu. Ta je zřejmě menší než 1000 km, takže jako náš počáteční odhad můžeme použít interval $(0\,\mathrm{km}; 1000\,\mathrm{km})$. Chceme dosáhnout přesnosti 1 km. Vzhledem k tomu, že při každé iteraci se zmenší velikost intervalu na polovinu, potřebujeme udělat alespoň 10 iterací, čímž dosáhneme velikosti intervalu $\frac{1000\,\mathrm{km}}{2^{10}} < 1\,\mathrm{km}$. Celý výpočet můžeme zapsat do tabulky.

[1] Navíc funkce $-\arccos\frac{R}{R+h}$ je monotónně rostoucí na intervalu $h \in [0;\infty]$ a podobně $\sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$ je monotónně klesající na tomto intervalu, takže řešení rovnice $F(c) = 0$ bude právě jedno.

Iterace	a [m]	b [m]	$\frac{a+b}{2}$ [m]	$F(a)$	$F(b)$	$F\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	0	1 000 000	500 000	0,56	−0,61	−0,27
1	0	500 000	250 000	0,56	−0,27	−0,02
⋮			⋮			⋮
10	230 469	231 445	230 957	0,000 48	−0,000 73	−0,000 13

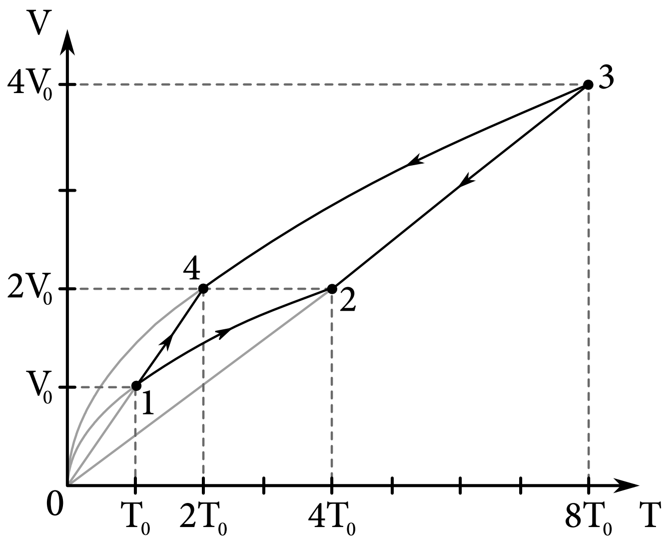
Tabulka: Ukázka řešení binárním vyhledáváním

V desáté iteraci jsme konečně dostali $b - a < 1$ km, takže jsme dosáhli požadované přesnosti. Jako řešení můžeme vzít hodnotu ze středu intervalu jako naše přibližné numerické řešení $\tilde{h} = 231{,}0$ km. Pokud bychom pokračovali dále, dostali bychom přesné řešení $h \doteq 230{,}9$ km.

21 Než se pustíme do překreslování pV–diagramu na VT–diagram, je nutné zjistit, jaké termodynamické děje v plynu probíhají a jaké objemy a teploty má plyn v jednotlivých fázích děje. Na to všechno nám bude stačit rovnice idálního plynu $pV = NkT$, kde N je neměnný počet částic.

- Při přechodu 1 → 2 v plynu roste tlak přímo úměrně s objemem, takže ze stavové rovnice $\frac{pV}{T}$ = konšt. vyplývá, že objem a teplota se budou měnit podle závislosti $V \propto \sqrt{T}$ a v bodu 2 bude mít plyn objem $2V_0$ a teplotu $4T_0$.
- Při přechodu 2 → 3 vykonává plyn izobarický děj, to znamená, že objem se mění přímo úměrně s teplotou. V bodě 3 bude mít plyn objem $4V_0$ a teplotu $8T_0$.
- Při přechodu 3 → 4 tlak v plynu klesá přímo úměrně s objemem, takže závislost objemu a teploty je opět odmocninová a v bodě 4 má plyn objem $2V_0$ a teplotu $2T_0$.
- Při přechodu 4 → 1 se objem mění opět lineárně s teplotou.

Při překreslování na VT–diagram bychom už neměli mít žádný problém, stačí si dát pozor na to, aby všechny křivky po prodloužení procházely počátkem grafu. Překreslený cyklus vypadá následovně:

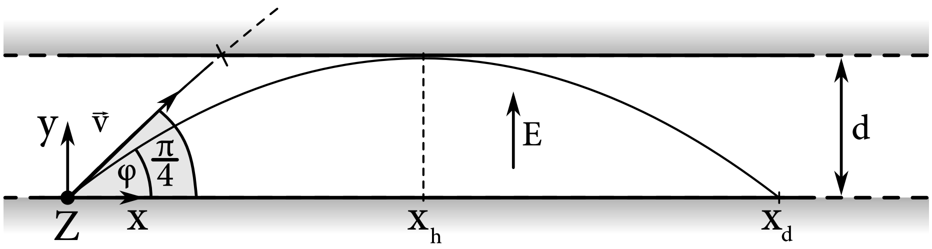


Obrázek 8: *Cyklus překreslený do VT–diagramu*

22 Protože je uvažované elektrické pole homogenní, na všechny vylétávající elektrony bude směrem dolů působit konstantní síla velikosti Ee. Ta bude udělovat elektronům zrychlení $a = \frac{Ee}{m_e}$. Můžeme si také uvědomit, že gravitační síla působící na elektrony je oproti elektrické síle zanedbatelná. Celá soustava je rotačně symetrická, proto se ve výpočtu můžeme omezit jen na jeden řez obsahující zdroj. Analogicky k šikmému vrhu v homogenním gravitačním poli lze souřadnice elektronu unikajícího ze zdroje pod úhlem φ popsat jako

$$x = v_x t = v \cos\varphi \cdot t,$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}at^2 = v \sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2}at^2.$$



V závislosti na počáteční rychlosti a elevačním úhlu elektronu mohou obecně nastat tři případy:

- elektron narazí do horní desky kondenzátoru;
- trajektorie elektronu se tečně dotýká horní desky kondenzátoru;
- elektron nedosáhne dostatečné výšky na to, aby se dotkl horní desky kondenzátoru.

Podívejme sa na elektron, jehož trajektorie se tečně dotýká horní desky kondenzátoru. Letící elektron dosáhne své maximální výšky v čase

$$T = \frac{v_y}{a} = \frac{v \sin\varphi}{a}.$$

Když tento čas dosadíme do vzorce pro souřadnici y a položíme ji rovnou d, zjistíme, pod jakým úhlem musí být vypuštěn elektron, aby své maximální výšky dosáhl právě ve výšce desky.

$$d = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{a} - \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a} = \frac{v^2 \sin^2\varphi}{2a},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2ad}}{v}.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme úhel $\varphi \doteq 36{,}37°$. Tento úhel je menší než 45°, což znamená, že všechny elektrony, které by mohly doletět dále, narazí do horní desky. Když dosadíme tento úhel spolu s časem T do rovnice pro souřadnici x, zjistíme, v jaké vzdálenosti od středu budou elektrony těsně míjet horní desku

$$x_h = \frac{v^2 \cos\varphi \sin\varphi}{a}.$$

Vrchol trajektorie takového elektronu je ve vodorovné vzdálenosti x_h od zdroje. Uvědomíme-li si, že elektron dosáhne vrcholu trajektorie přesně v polovině uražené vodorovné vzdálenosti, zjistíme, že maximální dolet na spodní desce je $x_d = 2x_h$.

Po dosazení hodnot ze zadání dostáváme $x_h = 2{,}715$ m. Když vezmeme v úvahu rotační symetrii úlohy, zjistíme, že elektrony budou na horní desku dopadat do kruhu s poloměrem 2,715 m a na dolní desku do kruhu s poloměrem 5,43 m. Pro celkovou plochu dopadu tak dostáváme výsledek

$$S = \pi\left(x_h^2 + x_d^2\right) = 5\pi x_h^2 \doteq 116\ \mathrm{m}^2.$$

23 Podívejme se na to, jaká síla působí na podložku. Musí to být součet reakce na tíhovou sílu misky $F_{\mathrm{miska}} = Mg$ a tíhovou sílu vody $F_{\mathrm{voda}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$.

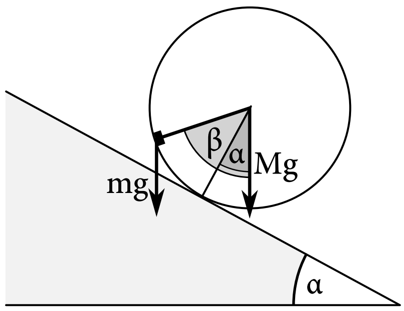
Teď se zamysleme, jaká síla způsobí zdvihnutí misky. Je třeba si uvědomit, jakou úlohu hraje tlak vody v dolní podstavě. Podle třetího Newtonova zákona musí stejná tlaková síla, jaká působí na podložku, působit také od podložky na kapalinu. Právě tento tlak s velikostí $p = h\rho g$ způsobuje zdvihnutí misky. Pro sílu potom platí $F = pS = \rho g \pi R^3$. Nyní už jen stačí dát síly do rovnosti a vyjádřit výslednou hmotnost misky jako

$$\rho g \pi R^3 = Mg + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g,$$

odkud

$$M = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho.$$

24 Počítejme momenty sil vzhledem k bodu dotyku sudu s podložkou. Budou zde působit dva momenty sil.



Obrázek 9: *Sud se sýrem*

Moment síly v těžišti sudu otáčí sud v záporném směru a moment síly od sýru zase v kladném:

$$M_{syr} = mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right),$$

$$M_{sud} = -MgR\sin\alpha.$$

V případě, že se sud nebude otáčet, bude výsledný moment nulový, tedy musí platit:

$$M_{syr} + M_{sud} = 0,$$

$$mgR\left(\sin\beta - \sin\alpha\right) = MgR\sin\alpha$$

a tedy

$$\frac{m}{M+m}\sin\beta = \sin\alpha.$$

Abychom maximalizovali úhel, stačí nám maximalizovat jeho sinus a následně vyjádřit jeho hodnotu. Když $\sin\alpha$ je přímo úměrný $\sin\beta$, musí být úhel β co největší. Pro hraniční stav sýru v sudu tedy platí rovnost tečné složky tíhové síly a třecí síly:

$$mg\sin\beta = \mu mg\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \mu.$$

Následně využijeme, že $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$ a dostaneme

$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Po dosazení

$$\sin\alpha = \frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

a tedy

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right).$$

25 Víme, že kapacita kondenzátoru vyplněného dielektrikem s relativní permitivitou ε vzroste ε-krát. Ale co když je vyplněná pouze část? Jednou z možností je transformovat kondenzátor na ekvivalentní zapojení více kondenzátorů, které budou dielektrikem vyplněné buďto celé, nebo vůbec.

Pokud do kondenzátoru vložíme tenkou vodivou destičku rovnoběžně s jeho původními deskami, elektrické pole se v něm nezmění, protože celkový náboj na destičce je nulový. To znamená, že elektrické vlastnosti kondenzátoru se nezmění. Nic se nezmění ani v případě, kdy destičku rozdělíme rovnoběžně s povrchem na dvě a spojíme je vodičem. Při tom jsme vlastně získali dva sériově zapojené kondenzátory. Pozor, vzniklé kondenzátory ale mají dvojnásobou kapacitu oproti kapacitě C původního kondenzátoru, protože vzdálenost desek se zmenšila na polovinu.

To znamená, že kapacita kondenzátoru v prvním případě je stejná jako kapacita dvou sériově zapojených kondenzátorů s kapacitou $2C$, přičemž dielektrikem je vyplněný pouze jeden:

$$C_1 = \frac{2C\cdot\varepsilon 2C}{2C+\varepsilon 2C} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}C.$$

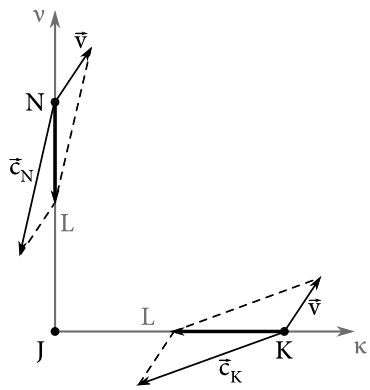
V druhém případě je zjevné, že když kondenzátor "rozřežeme" vertikálně, pole se opět nezmění a my dostaneme dva kondenzátory spojené paralelně (každý tentokrát s kapacitou $C/2$ kvůli poloviční ploše desek). Takže kapacita v druhém případě je

$$C_2 = \frac{C}{2} + \varepsilon\frac{C}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2}C.$$

Pro poměr kapacit polovyplněných kondenzátorů dostáváme

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

26 Podíváme se nejprve na první fázi. V ní křičí Matěj se Štěpánem a Jáchym poslouchá. Když vydají ze svých útrob zvuk, šíří se v kulových vlnoplochách vzhledem ke vzduchu. Pohyb vzduchu se dá popsat sice neznámým, ale konstantním vektorem $\vec{v}$. Ten se bude skládat s takovými vektory $\vec{c}$, představujícími pohyb zvuku ve vzduchu, aby výsledná rychlost šíření zvukového signálu měla směr k Jáchymovi.



Označme si $\overrightarrow{c_K}$ vektor rychlosti Štěpánova akustického produktu ve vzdušné mase. Tak, jak jsme ho vybrali, pro něj platí

$$c_{K\nu} + v_\nu = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{K\kappa} + v_\kappa = -\frac{L}{T_{KJ}},$$

kde L je vzdálenost Štěpána a Mateje od Jáchyma a T_{KJ} je zadaný čas, za který se Štěpánův poryv hlasivek dostane k Jáchymovi. Analogicky pro $\overrightarrow{c_N}$ platí

$$c_{N\kappa} + v_\kappa = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{N\nu} + v_\nu = -\frac{L}{T_{NJ}},$$

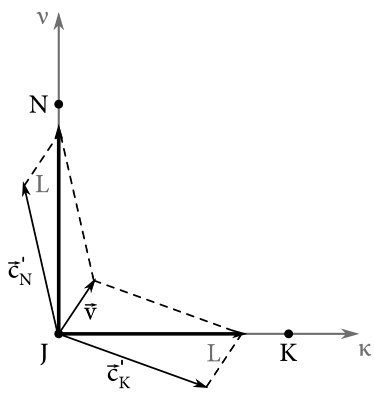
a pro oba vektory rychlosti zvuku přirozeně platí

$$\left|\overrightarrow{c_K}\right| = \left|\overrightarrow{c_N}\right| = c.$$

Výše uvedené vztahy nám umožňují odstranit z dalších výpočtů složky $\overrightarrow{c_K}$ a $\overrightarrow{c_N}$.

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} + v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} + v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2$$

V druhé fázi se situace obrátí. Zvuk se od Jáchyma ke Štěpánovi a Matějovi nese vektory $\overrightarrow{c_K}' + \vec{v}$, resp. $\overrightarrow{c_N}' + \vec{v}$. Pro ty musí platit vztahy analogické k těm v první fázi.



Tedy platí

$$c'_{K\nu} + v_\nu = 0, \qquad c'_{K\kappa} + v_\kappa = \frac{L}{T_{JK}},$$

$$c'_{N\kappa} + v_\kappa = 0, \qquad c'_{N\nu} + v_\nu = \frac{L}{T_{JN}}$$

a také

$$\left|\overrightarrow{c_K}'\right| = \left|\overrightarrow{c_N}'\right| = c.$$

Odstranění složek $\overrightarrow{c_K}'$ a $\overrightarrow{c_N}'$ ze soustavy rovnic vyústí do vztahu

$$c^2 = \left(\frac{L}{T_{KJ}} - v_\kappa\right)^2 + v_\nu^2 = \left(\frac{L}{T_{NJ}} - v_\nu\right)^2 + v_\kappa^2.$$

Zkombinováním tohoto vztahu s jeho již uvedeným blízkým příbuzným dostaneme

$$v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 + 2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2 =$$

$$= v_\kappa^2 + v_\nu^2 - 2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2.$$

Tuto soustavu rovnic můžeme trochu zjednodušit odčítáním prvních dvou členů od všech přítomných stran.

$$2\left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{KJ}}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{NJ}}\right)^2 =$$

$$= -2\left(\frac{L}{T_{JK}}\right)v_\kappa + \left(\frac{L}{T_{JK}}\right)^2 =$$

$$= -2\left(\frac{L}{T_{JN}}\right)v_\nu + \left(\frac{L}{T_{JN}}\right)^2.$$

Pokud využijeme rovnost 1. a 3. řádku, resp. 2. a 4. řádku v předcházejícím úseku, dokážeme pomocí zadaných veličin pohodlně vyjádřit

$$v_\kappa = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JK}} - \frac{1}{T_{KJ}}\right) \qquad \text{a} \qquad v_\nu = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{T_{JN}} - \frac{1}{T_{NJ}}\right),$$

to znamená, že

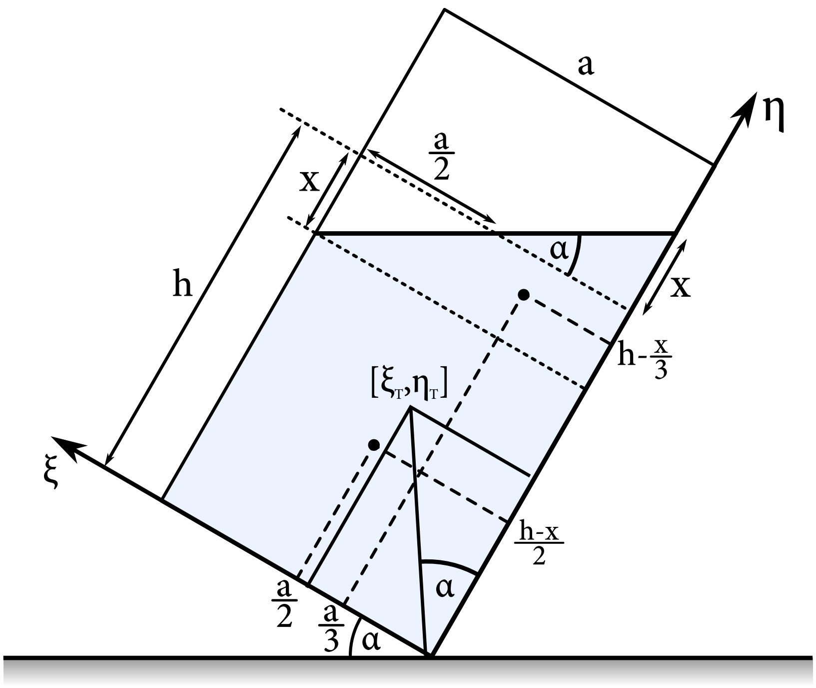
$$\left|\vec{v}\right| = \frac{L}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{T_{JK}} - \frac{1}{T_{KJ}}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_{JN}} - \frac{1}{T_{NJ}}\right)^2} = 29{,}43\ \mathrm{m/s}.$$

27 Výsledné magnetické pole můžeme určit superpozicí jednotlivých hran původního čtverce. Komu by se však chtělo rozdělovat čtverce na hrany, když můžeme výsledný útvar poskládat ze samotných čtverců?

Stačí vzít tři původní sítě a uložit je na požadovaná místa, aby vytvořily výsledný útvar. V našem případě to bude jeden čtverec v levé stěně, druhý v pravé a třetí v horní podstavě. Díky superpozici proudů nám dvěma hranami v horní podstavě přestane protékat proud.

Když magnetické pole od jednoho čtverce je kolmé na rovinu původní sítě, magnetické pole od pravé a levé stěny se vyruší a výsledkem bude jen magnetické pole od horní podstavy, směřující dolů se stejnou velikostí jako původní. Pro velikost výsledného magnetického pole B_2 tedy platí $B_2 = B_1$.

28 Nechť hladina mléka sahá do výšky h. Položíme ho na nakloněnou rovinu se sklonem α. Uvědomme si, že volná hladina mléka bude vždy vodorovná. Protože je podle zadání mléka v krabici rozumné množství, mléko nabude tvar komolého hranolu. Jeho boční stěna tedy bude mít tvar lichoběžníku, jak je vidět na obrázku.



V mezním případě musí platit, že těžiště mléka má být nad osou otáčení. Najděme si tedy polohu těžiště. Zaveďme si souřadnicovou soustavu tak, že její osy odpovídají hranám krabice. Lichoběžník se skládá z obdélníku s rozměry $a \times (h - x)$ a pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délce a a $2x$. Těžiště obdélníku má souřadnice $\left[\frac{a}{2}; \frac{h-x}{2}\right]$, těžiště trojúhelníku souřadnice $\left[\frac{a}{3}; h - \frac{x}{3}\right]$. Souřadnice těžiště lichobežníku jsou tedy

$$\xi_T = \frac{\frac{a}{2}\cdot a\left(h-x\right) + \frac{a}{3}\cdot ax}{ah} = \frac{a}{2} - \frac{ax}{6h};$$

$$\eta_T = \frac{\frac{h-x}{2}\cdot a\left(h-x\right) + \left(h - \frac{x}{3}\right)\cdot ax}{ah} = \frac{h}{2} + \frac{x^2}{6h}.$$

Z obrázku vidíme, že pro naklonění vodní hladiny vzhledem ke stěnám krabice platí

$$\tan\alpha = \frac{2x}{a}.$$

Zároveň však z podmínky, že v limitním případě má být těžiště nad hranou krabice dostáváme, že

$$\tan\alpha = \frac{\xi_T}{\eta_T} = \frac{12ah - 2a^2\tan\alpha}{12h^2 + a^2\tan^2\alpha}.$$

Vyloučením neznámé x dostáváme kvadratickou rovnici pro výšku mléka v krabici

$$h^2 - \frac{a}{\tan\alpha}h + a^2\left(\frac{\tan^2\alpha}{12} + \frac{1}{6}\right) = 0.$$

Jejím řešením je

$$h = \frac{a}{2\tan\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tan^2\alpha\left(\frac{\tan^2\alpha}{3} + \frac{2}{3}\right)}\right).$$

Snadno ověříme, že musíme vzít řešení se znaménkem "+". Druhé řešení totiž s rostoucím úhlem náklonu klesá, což by znamenalo, že čím mírnější je sklon, tím méně mléka stačí na převrhnutí a v limitním případě vodorovné roviny říká, že by se měla převrhnout prázdná krabice od mléka, což je samozřejmě nesmysl. Pro $a = 1\ \mathrm{dm}$ a $\alpha = 30°$ dostáváme $h \doteq 1{,}6\ \mathrm{dm}$ a pro objem mléka v krabici

$$V = a^2h \doteq 1{,}6\ \mathrm{dm}^3.$$

29 Ubohá planeta se před rozpadem pohybovala kruhovou rychlostí ve vzdálenosti r. Její oběžná rychlost tedy musí být

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Po rozpadu se oba kusy pohybovaly po parabolické trajektorii, které odpovídá právě úniková rychlost. Ta má ve vzdálenosti r hodnotu

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Rychlost prvního kusu se tedy změnila o

$$\Delta v_1 = v_e - v_k = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a druhého o

$$\Delta v_2 = v_e + v_k = \left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Ze zákona zachování hybnosti vyplývá podmínka pro hmotnosti kusů

$$\Delta v_1 m_1 = \Delta v_2 m_2,$$

a tedy

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

30 Po zapojení prstenu na napětí U začne obvodem protékat proud. Jak to už v příkladech s odpory bývá, proud si vybírá cestu menšího odporu. Čím je však část drátu delší, tím je odpor větší v souladu s rovnicí $R = \rho \frac{l}{S}$, kde S je obsah průřezu drátu, ρ rezistivita a l délka drátu. To znamená, že kratší částí prstenu bude protékat větší proud. Bude tedy platit

$$I \propto \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad I \propto \frac{1}{l}.$$

Magnetické pole v okolí průvodiče je přímo úměrné proudu a jeho efektivní délce. Zakřivenou smyčku si umíme představit jako velmi krátké průvodiče stejně vzdálené od středu, kde každý z nich přispívá k magnetickému poli stejným dílem. Pozor! Směr magnetického pole je taktéž důležitý, ten jednoduše určíme z Ampérova pravidla pravé ruky. Z toho důvodu bude tedy platit

$$B_{\text{hore}} \propto I_1 \cdot l_1 \quad \text{a} \quad B_{\text{dole}} \propto I_2 \cdot l_2.$$

Z toho vyplývá, že zatímco proud s délkou klesá, velikost magnetického pole roste. Protože je však výsledné magnetické pole závislé na I a l lineárně, oba vlivy se vyruší a výsledné magnetické pole ve středu nebude vůbec záviset na úhlu φ. Pro jednotlivé složky výsledného pole tedy bude platit:

$$B_{\text{hore}} = B_{\text{dole}}.$$

Jedno však směřuje nahoru, druhé dolů. Výsledná velikost magnetického pole bude tedy nulová v jakémkoliv bodu zapojení.

31 Nechť kyvadlo obíhá s úhlovou rychlostí ω. Potom jednu obrátku zvládne za čas $T_o = 2\pi/\omega$. Dále nechť této úhlové rychlosti odpovídá rovnovážná poloha kyvadla, odchýlená o úhel φ_0 od vertikálního směru. Na kyvadlo pak působí odstředivá síla o velikosti $F_O = m\omega^2 R \sin\varphi_0$ a tíhová síla $F_G = mg$. Pro rovnovážnou polohu kyvadla platí

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_O}{F_G} = \frac{\omega^2 R \sin\varphi_0}{g}.$$

Odtud

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}; \qquad \sin\varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2}.$$

Napišme nyní pohybovou rovnici pro kmity kyvadla. Nechť φ je úhel měřený od rovnovážné polohy kyvalda. Potom pohybová rovnice vypadá následovně:

$$mR^2\varepsilon = -mgR\sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) + m\omega^2 R \sin\left(\varphi_0 + \varphi\right) R\cos\left(\varphi_0 + \varphi\right).$$

Rovnici lze upravit použitím součtových vzorců:

$$\varepsilon = -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi \cos\varphi_0\right) + \omega^2\left(\sin\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi \cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0 \cos\varphi - \sin\varphi_0 \sin\varphi\right).$$

Tato rovnice není moc pěkná, proto se jí pokusíme linearizovat. Při přesnosti do prvního řádu pro malé úhly platí $\sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1$. Potom

$$\begin{aligned}\varepsilon &\approx -\frac{g}{R}\left(\sin\varphi_0\cdot 1+\varphi\cdot\cos\varphi_0\right)+\omega^2\left(\sin\varphi_0\cdot 1+\varphi\cdot\cos\varphi_0\right)\left(\cos\varphi_0\cdot 1-\sin\varphi_0\cdot\varphi\right)\\ &\approx\left(\omega^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0-\frac{g}{R}\sin\varphi_0\right)+\left(\omega^2\cos^2\varphi_0-\omega^2\sin^2\varphi_0-\frac{g}{R}\cos\varphi_0\right)\varphi.\end{aligned}$$

Vzpomeňme si, že jsme našli vztah mezi rovnovážným úhlem φ_0, úhlovou ryhlostí ω a délkou matematického kyvadla R. Když příslušné výrazy pro siny a kosiny dosadíme do pohybové rovnice, vypadne z ní absolutní člen a dostáváme rovnici harmonického oscilátoru

$$\varepsilon \approx \left(\frac{g^2}{\omega^2R^2}-\omega^2\right)\varphi,$$

jehož perioda malých kmitů je

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2R^2}}}.$$

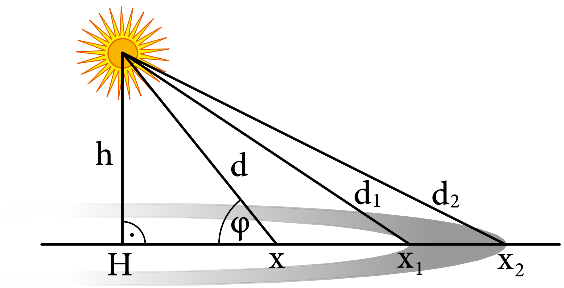
Hledaný poměr period je

$$k=\frac{T_o}{T}=\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2R}\right)^2},$$

to můžeme zpětne vyjádřit pomocí rovnovážného úhlu

$$k=\sin\varphi_0.$$

32 V této úloze jde o nalezení tepelné rovnováhy záření absolutně černých těles. Slunce izotropně vyzařuje určitý výkon, který Zeměplocha dokáže absorbovat. Zároveň však sama vyzařuje do poloprostoru nad sebou, takže nakonec se ustálí rovnováha. Zakreslíme si podstatné veličiny a vzdálenosti:



Hustota toku klesá se čtvercem vzdálenosti. Z geometrie úlohy by nám tedy mělo být jasné, že nejvyšší absorbovaný výkon bude v bodě H, který se nachází na Zeměploše přímo pod Sluncem. Označme teplotu v tomto bodě T_H. V ostatních bodech bude vzdálenost od Slunce určitě větší, takže tok výkonu bude menší; a navíc paprsky už nebudou dopadat kolmo, ale budou se distribuovat na větší plochu. Navíc můžeme říct, že ve velké vzdálenosti se teplota bude limitně blížit k 0 K.

Jak bude vypadat obyvatelná zóna? Označme hranice teplotního intervalu T_1 a T_2, přičemž $T_1 < T_2$. Teď máme tři možnosti:

- Když $T_H < T_1$, celá Zeměplocha bude příliš chladná. Nachází se příliš daleko od slabého Slunce, a tedy obyvatelná zóna neexistuje.
- Když $T_1 < T_H < T_2$, obyvatelnou zónou bude nějaké symetrické okolí bodu H až po určitou kritickou vzdálenost – tedy kruh.
- A pokud $T_2 < T_H$, okolí bodu H je příliš horké. Avšak teplota s rostoucí vzdáleností rychle klesá, takže v určité vzdálenosti dosáhne T_2, později i T_1 a mezi nimi se vytvoří obyvatelná zóna ve tvaru mezikruží.

No a teď to pojďme celé spočítat. Pomocí Stefan-Boltzmannova zákona snadno určíme, že celkový zářivý výkon našeho Slunce je

$$P = S_\odot \sigma T_\odot^4 = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$

kde $S_\odot$ je jeho povrch. Dále nás bude zajímat množství záření, které dopadá na nějakou malou plošku Zeměplochy ve vzdálenosti d od Slunce. Úhlový průměr Slunce při pohledu z libovolného bodu Zeměplochy bude dostatečně malý na to, abychom jej mohli považovat za bodový zdroj. Světelný tok se šíří rovnoměrně do všech směrů, takže ve vzdálenosti d jeho velikost bude

$$\Phi = \frac{4\pi R^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi d^2} = \frac{\sigma R^2 T_\odot^4}{d^2}.$$

Podívejme se však na malou plošku Zeměplochy ve vzdálenosti d od Slunce. Tento tok na ni nedopadá kolmo, ale pod úhlem φ. Celkový absorbovaný výkon na jednotku plochy tedy ještě musíme vynásobit $\sin\varphi$. Tento člen však můžeme vyjádřit pomocí známých proměnných, jelikož platí

$$\sin\varphi = \frac{h}{d}.$$

Tím máme vyřešenou absorpci záření. Co ale tepelné ztráty? Opět nám pomůže Stefan-Boltzmannův zákon. V rovnovážném stavu se přijatý a vyzářený výkon budou rovnat, takže můžeme psát

$$\frac{\sigma R^2 T_\odot^4 h}{d^3} \stackrel{!}{=} \sigma T^4.$$

Jedinou neznámou je tu pro nás vzdálenost d, kterou můžeme osamostatnit na levé straně rovnice. Dostaneme

$$d = \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T^4}\right)^{1/3}.$$

Rozlohu případné obyvatelné zóny je však lepší vyjádřit pomocí vzdálenosti od bodu H, kterou označíme x. Z Pythagorovy věty platí

$$x^2 = d^2 - h^2.$$

Z toho si už snadno můžeme vyjádřit přímo x. Dosazením ověříme, že pro dolní i horní hranici požadovaného intervalu teplot dostáváme reálná řešení, a tedy naší hledanou plochou bude opravdu mezikruží. Nakonec vypočítáme plochu mezikruží jako rozdíl ploch dvou kruhů. Po dosazení za x^2 pro hranice intervalu teplot dostáváme

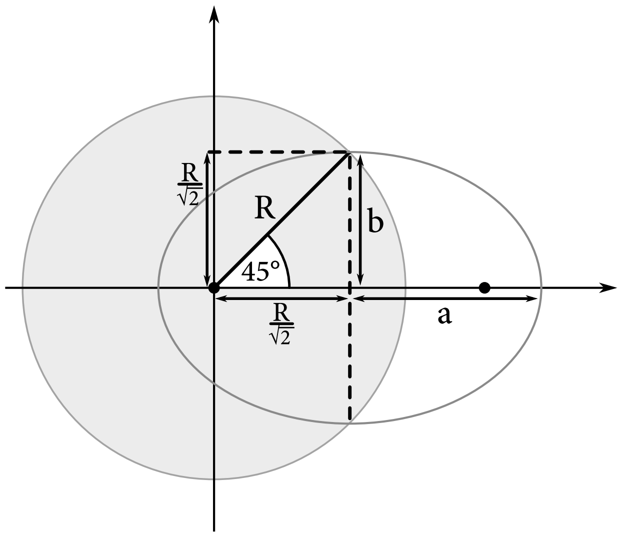
$$S = \pi\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \pi\left(\left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_1^4}\right)^{2/3} - \left(R^2 h \frac{T_\odot^4}{T_2^4}\right)^{2/3}\right) = \pi R^{4/3} h^{2/3} T_\odot^{8/3}\left(T_1^{-8/3} - T_2^{-8/3}\right).$$

Po dosazení číselných hodnot získáme výsledek

$$S \doteq 3\,538\,765\ \mathrm{km}^2.$$

33 Je jasné, že pohyb astronauta bude probíhat po elipse s ohniskem ve středu asteroidu. Abychom už po mnohokráté mohli obdivovat geometrii elipsy, bude najlepší si hned nakreslit obrázek:

Rozměry a poloha elipsy bezprostředně vyplývají ze zadání: body vzletu a přistání jsou vzdálené čtvrtinu obvodu a elipsa svírá na povrchu asteroidu s jeho povrchem úhel 45°. Tedy je zřejmé, že pohyb astronauta proběhne přesně po polovině elipsy. Také je ihned zjevná malá poloosa této elipsy, $b = \frac{R}{\sqrt{2}}$.



Obrázek 10: *Geometrie oběhu po elipse*

Na určení velké poloosy už je ale třeba využít další znalosti: například té, že součet vzdáleností od kteréhokoli bodu elipsy ke dvěma ohniskům je stejný. Když se podíváme na bod, kde astronaut původně stál, součet vzdáleností k ohniskům je $2R$. Naopak od pericentra, tedy od bodu, který je na obrázku nejvíc vlevo, je to $2a$, odkud plyne $a = R$. Elipsu máme tedy určenou, ještě je třeba zjistit dobu letu. Tu využijeme znalost oběžné doby po celé elipse[2]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}},$$

a druhý Keplerův zákon, který říká, že plocha opsaná průvodičem[3], je za nějaký fixní čas vždy stejná. Chceme-li tedy znát čas t potřebný na oběhnutí poloviny elipsy, bude tvořit stejnou část oběžné periody, jakou tvoří opsaná plocha z celé plochy elipsy. Opsaná plocha je

$$s = \frac{\pi ab}{2} + \frac{R^2}{2}$$

a celá plocha je

$$S = \pi ab,$$

[2]Pokud si ji nepamatujete, dá se k ní dojít tak, že zjistíte oběžnou dobu po kruhové trajektorii, a jen zaměníte poloměr za velkou poloosu. Korektnost tohoto kroku vyplývá ze třetího Keplerova zákona.

[3]úsečka spojující ohnisko elipsy a obíhající objekt

takže

$$t = T\frac{s}{S} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}\frac{\frac{\pi ab}{2}+\frac{R^2}{2}}{\pi ab} = \frac{\left(\pi+\sqrt{2}\right)R^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

34 Proč by měl Kvík vidět červené světlo jako zelené? Po chvilce uvažování přijdeme na to, že za tím může být jedině Dopplerův efekt. No co by to bylo za příklad, kdyby neměl nějaký menší háček. Světlo se totiž pohybuje rychlostí světla (překvapivě), zatímco bežný vztah pro dopplerovský posun frekvencí vychází z Galileových transformací, které jsou nerelativistické. Potřebujeme tedy relativistickou verzi Dopplerova posunu.

Po chvilce obcování s Lorentzovými transformacemi, potažmo po krátkém listovaní v odborné literatuře, dostaneme pro relativistický posun frekvencí vztah

$$f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Potřebujeme odtud vyjádřit rychlost pohybu Kvíkova auta

$$v = \frac{f^2-f_0^2}{f^2+f_0^2}c = \frac{\lambda_0^2-\lambda^2}{\lambda_0^2+\lambda^2}c.$$

Po dosazení vlnových délek zeleného a červeného světla dostáváme

$$v = \frac{11}{61}c \doteq 0{,}18\,c.$$

Kvík by si měl tedy pořádně rozmyslet, jestli se mu více vyplatí zaplatit pokutu za průjezd křižovatkou na červenou nebo za překročení rychlosti o 7 řádů.

Pro porovnání ještě můžeme vypočítat rychlost vycházející z klasického Dopplerova vztahu. Bez ohledu na to, že výsledek závisí na volbě vztažné soustavy, zvolme si vztažnou soustavu spojenou se semaforem. V této vztažné soustavě pro frekvenční posun platí $f = f_0\frac{c+v}{c}$, odkud vyjde

$$v = \left(\frac{f}{f_0}-1\right)c = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}-1\right)c = 0{,}2\,c.$$

35 Jak se píše v zadání, soustava je na začátku nehybná, protože na obou stranách kladky jsou zavěšené závaží (resp. žáby) s hmotností $2m$. Otázkou je, co se stane, když se Danka pohne rychlostí v vzhůru vzhledem k lanu. Odpověď najdeme, když se zamyslíme nad tím, jak přesně zrychlila na v. Během aktu zrychlování způsobí Danka to, že na jednu stranu kladky působí síla $F(t)$, která však může mít libovolný průběh.

Podle třetího Newtonova zákona působí síla $F(t)$ také na lehčí žábu se závažím m, ale směrem vzhůru. Protože je kladka dokonalá (má nulovou hmotnost a lano na ní neprosmykuje), síly a momenty sil na ní působící jsou vždy nulové. To znamená, že i na Dana působí síla $F(t)$. Dance se závažím, stejně jako těžšímu Danovi, byl udělen impulz síly

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}t,$$

který způsobí změnu hybnosti $\Delta p = I$ na obou stranách kladky. Pokud označíme rychlost pohybu Dana směrem vzhůru (a tedy i rychlost lana) u, z rovnosti hybností na obou stranách kladky dostaneme

$$2mu = m\left(v - u\right) - mu,$$

takže $u = \frac{v}{4}$. Danka tedy stoupá ke kladce rychlostí $\frac{3}{4}v$ a bude tam první. Zabere jí to čas

$$t = \frac{H}{\frac{3}{4}v}.$$

Za tento čas se Dano posune o

$$h = ut = \frac{H}{3},$$

takže hledaná vzdálenost žab bude $\frac{2}{3}H$.

Ještě dodejme krátkou poznámku k hybnosti soustavy a jinému způsobu řešení. Všimněme si, že těžiště soustavy se pohybuje směrem vzhůru. To znamená, že hybnost soustavy se vzhledem k původnímu stavu změnila. Proč neplatí zákon zachování hybnosti? Když Danka zrychluje a působí silou na lano, vyvolává reakční sílu v kladce, která je ale větší – na soustavu totiž působí vnější síla. Hned jak se Danka začne pohybovat konstantní rychlostí, hybnost se už měnit nebude. Stejně bychom se mohli podívat na problém přes moment hybnosti. Žádný vnější moment síly na soustavu nepůsobí, a proto se nebude měnit ani moment hybnosti soustavy. Pokud bychom položili celkový moment hybnosti během pohybu rovný tomu počátečnímu, tedy nule, dostali bychom přesně rovnici pro hybnost pravé a levé strany

$$2mu = m\left(v - u\right) - mu.$$

36 Slyšeli jste už někdy o solární plachtě? Jestliže ano, tak asi víte, že i dopadající světlo působí silou. To samé se bude dít i v této úloze. To, že světlo působí silou, znamená, že musí mít nějakou hybnost. A doopravdy se dá světlo chápat jako proud jakýchsi částic, fotonů, přičemž každý foton má energii odpovídající jeho frekvenci rovnou

$$E = hf$$

a hybnost

$$p = \frac{E}{c}.$$

Proud fotonů se bude odrážet od stěn válce pod úhlem $90° - \alpha$, měřeným od kolmice. To znamená, že při odrazu jednoho fotonu se jeho hybnost změní o

$$\Delta p = 2p\cos\left(90° - \alpha\right) = 2\frac{E}{c}\sin\alpha.$$

Let jednoho fotonu mezi dvěma místy odrazu trvá

$$\Delta t = \frac{2R\sin\alpha}{c}.$$

Teď přichází klíčová úvaha. Protože fotony považujeme za diskrétní částice, síla působící na obruč bude nepravidelná. Ale protože se fotony pohybují extrémně velkou rychlostí, budou často narážet do stěny. Budeli čas mezi dvěma odrazy Δt velmi malý, můžeme vypočítat průměrnou sílu působící po tento čas, zanedbat fluktuace, a považovat sílu za konstantní, rovnou právě této průměrné síle.

Tedy průměrná síla působící v časovém intervalu Δt od jednoho fotonu bude

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\frac{E}{c}\sin\alpha}{\frac{2R\sin\alpha}{c}} = \frac{E}{R}.$$

Vzhledem k tomu, že foton v obruči divoce poletuje, můžeme tuto sílu na základě podobného argumentu považovat za rovnoměrně rozloženou po celé obruči. Dále si všimneme, že síla nezávisí na úhlu, pod kterým Sajmon svítí – menší úhel znamená častější odrazy, při kterých se však odevzdá méně hybnosti.

Když Sajmon zasvítí do obruče laserem s výkonem P po dobu t, vytvoří paprsek s energií Pt. To znamená, že v obruči se bude nacházet $\frac{Pt}{E}$ fotonů. Protože podobné argumenty platí pro všechny fotony, výsledná síla od $\frac{Pt}{E}$ fotonů bude $\frac{Pt}{E}$ krát větší, tedy

$$F = \frac{Pt}{E}\frac{E}{R} = \frac{Pt}{R}.$$

Znovu si můžeme všimnout, že celková síla nezávisí na energii jednoho fotonu, neboť větší energie znamená větší sílu od jednoho fotonu, ale méně fotonů v celém svazku. To je síla působící na obruč v radiálním směru, takže ješte je třeba určit tahovou sílu. To můžeme udělat tak, že si představíme, že necháme obruč maličko zvětšit a podíváme se na to, jaké práce budou konané všemi působícími silami. Ze zákona zachovaní energie potom můžeme dopočítat chybějící sílu T[4]. Když se poloměr obruče zvětší o Δr, její délka sa zvětší o $2\pi\Delta r$. Radiální síly vykonají práci

$$W = \frac{Pt}{R}\Delta r$$

a tahové síly

$$W = T2\pi\Delta r.$$

Porovnáním těchto prací nalezneme neznámou sílu

$$T = \frac{Pt}{2\pi R}.$$

37 Na to, abychom zjistili, jaký je moment setrvačnosti Samkovy vysušené cibule, si musíme uvědomit několik věcí. Prvním – poměrně triviálním – poznatkem je, že moment setrvačnosti koule je $\frac{2}{5}mR^2$, kde m je hmotnost plné koule. Druhým poznatkem je fakt, že moment setrvačnosti je aditivní: pokud je výsledný objekt tvořen více částmi, moment setrvačnosti výsledného objektu okolo libovolné osy je součtem momentů setrvačnosti jednotlivých částí okolo té samé osy. Jako poslední si stačí uvědomit, že pokud každý délkový rozměr zvětšíme k-krát, hmotnost se zvětší k^3-krát. Jinak řečeno, je třeba umět škálovat.

Po tomto krátkém úvodu se můžeme pustit do počítaní. Prázdná část cibule má stejný tvar jako její plná část, akorát je menší, s faktorem škálování dvě třetiny. Všeobecný výraz momentu setrvačnosti má tvar cMR^2 pro nějakou konstantu c. Hmotnost M se škáluje s třetí mocninou rozměru, poloměr R s první, takže moment setrvačnosti prázdné části bude $\left(\frac{2}{3}\right)^5$-násobkem momentu setrvačnosti plné části. Sčítáním momentu setrvačnosti plné a prázdné části bychom měli dostat moment setrvačnosti celé koule. Pokud označíme moment

[4] princip virtuální práce

setrvačnosti plné části I, platí

$$\frac{2}{5}mR^2 = I + \left(\frac{2}{3}\right)^5 I.$$

V tomto případě m představuje hmotnost plné koule, takže když ji vyjádříme stejným způsobem pomocí hmotnosti cibule M, platí $m = M + \left(\frac{2}{3}\right)^3 M$. Z toho už jednoduše dostaneme

$$I = \frac{2}{5}\frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^5}MR^2 = \frac{126}{275}MR^2.$$

38 Na rozdíl od identického zapojení se zdrojem stejnosměrného napětí, při střídavém zapojení už kondenzátory a cívky výrazně ovlivní výsledek. Ve střídavých obvodech platí pro amplitudy napětí U a proudu I Ohmův zákon v pozměněné podobě

$$U = |Z|I,$$

kde $|Z|$ je amplituda impedance. To znamená, že nám stačí vypočítat impedanci zapojení.

Všimněme si, že dvě střední větve s cívkou a rezistorem jsou symetrické. To znamená, že potenciály na obou koncích prostředního kondenzátoru budou stejné, a tedy proud protékající tou částí obvodu bude vždy nulový. Jinak řečeno, můžeme větev s kondenzátorem spojující dvě střední větve úplně zahodit. Tím nám přejde zapojení na čistě sériově-paralelní, takže pro impedanci dostáváme

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{2}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{3R - \omega^2 RLC + i\left(\omega R^2 C + \omega L\right)}{R^2 + i\omega RL}.$$

Pro amplitudu impedance tedy platí

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}},$$

odkud

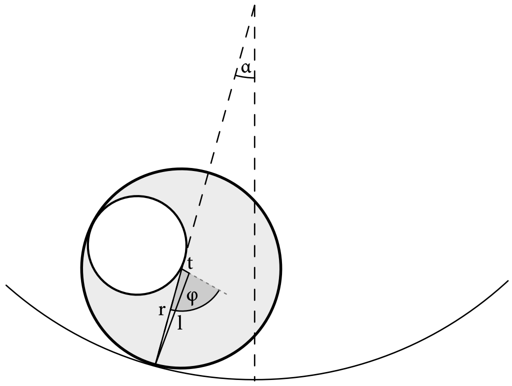
$$I = U\sqrt{\frac{\left(3R - \omega^2 RLC\right)^2 + \left(\omega R^2 C + \omega L\right)^2}{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}}.$$

39 Nejprve si řekněme, jak vzniklo Danovo rozbité kolo. Předpokládejme, že je homogenní s plošnou hustotou σ. Původní celé kolo má hmotnost $\sigma\pi r^2$ a těžiště ve středu, který si označíme souřadnicemi $[0; 0]$. Díra v něm by měla hmotnost $\sigma\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$ a těžiště by bylo v bodě $\left[0; \frac{r}{2}\right]$. To znamená, že rozbité kolo má hmotnost $\frac{3}{4}\sigma\pi r^2$, x-ová souřadnice těžiště je triviálně nulová, a y-ovou získáme z momentové věty

$$y = \frac{\sigma\pi r^2 \cdot 0 - \sigma\pi\frac{r^2}{4} \cdot \frac{r}{2}}{\frac{3}{4}\sigma\pi r^2} = -\frac{r}{6}.$$

Znaménka se nemusíme vylekat. Znamená pouze to, že je těžiště na opačné straně, než díra v kole. Označíme si tedy $t = -y = \frac{r}{6}$ jako vzdálenost těžiště a středu kola.

Zajímají nás malé kmity, takže se podívejme, co se stane, když se kolo vychýlí o úhel φ, jinak řečeno, když se bod dotyku kola s jámou posune o kružnicový oblouk délky $r\varphi$. Nový a původní bod dotyku budou vzhledem na střed křivosti jámy svírat úhel $\alpha = \frac{r}{5r}\varphi = \frac{\varphi}{5}$.



Obrázek 11: *Geometrie kmitajícího Danova kola*

Potenciální energie vhledem ke dnu jámy bude

$$E_p = mgh = \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 gh,$$

kde výšku h musíme vyjádřit jako

$$h = 5r\left(1 - \cos\alpha\right) + r\cos\alpha - t\cos(\varphi - \alpha) = r\left[5\left(1 - \cos\frac{\varphi}{5}\right) + \cos\frac{\varphi}{5} - \frac{1}{6}\cos\frac{4\varphi}{5}\right].$$

Kinetickou energii vyjádříme jako rotační energii okolo okamžité osy otáčení. Ta se bude neustále měnit, proto

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2,$$

kde I_A je moment setrvačnosti okolo aktuální osy otáčení. Těžiště bude od této osy vzdálené l, přičemž platí kosinová věta $l^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi = r^2\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)$.

Zůstala nám jediná neznámá: moment setrvačnosti Danova kola okolo bodu otáčení. Jako první potřebujeme vypočítat moment setrvačnosti okolo těžiště I_T. Použijeme Steinerovu větu a fakt, že sčítáním momentu setrvačnosti rozbitého kola a toho, co mu chybí okolí středu, dostaneme moment setrvačnosti plného, nepokaženého kola. Moment setrvačnosti plného disku je obecně $\frac{1}{2}mR^2$, platí tedy

$$\frac{1}{2}\sigma\pi r^2 r^2 = \left(I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 t^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sigma\pi r^2\left(\frac{r}{2}\right)^2\right).$$

Po pracné úpravě dostaneme $I_T = \frac{37}{96}\sigma\pi r^4$. Po opětovném použití Steinerovy věty dostaneme pro moment setrvačnosti okolo aktuálního bodu otáčení výraz

$$I_A = I_T + \frac{3}{4}\sigma\pi r^2 l^2 = \sigma\pi r^4\left(\frac{37}{32} - \frac{1}{4}\cos\varphi\right).$$

Zajímají nás malé kmity, takže ve výrazu I_A zanedbáme $\cos\varphi \approx 1$[5], čímž se nám výraz pro moment setrvačnosti zjednoduší na

$$I_A = \frac{29}{32}\sigma\pi r^4.$$

Nakonec si vyjádříme celkovou energii rozbitého kola[6], přičemž v potenciální enerii rozvineme výrazy typu $\cos x$ až do druhého řádu Taylorova rozvoje. Tedy $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Dostáváme

$$E = \frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g\varphi^2 + \frac{29}{64}\pi\sigma r^4\omega^2 = \text{konšt.},$$

což není nic jiného než energie harmonického oscilátoru s periodou, která je určena konstantami při φ^2 a ω^2. Takže Danovo rozbité kolo bude kmitat s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{29}{64}\pi\sigma r^4}{\frac{1}{10}\pi\sigma r^3 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{145}{32}\frac{r}{g}}.$$

40 Označme si vzdálenost od protizávaží ke kloubu jako x. V zadání se nemluví o tom, ve kterém okamžiku natočení treböchetu má být obvodové (translační) zrychlení maximální, což ale nevadí, jelikož zrychlení závisí na úhlu natočení jen faktorem $\cos\alpha$. Takže jakmile maximalizujeme zrychlení pro libovolný úhel, bude maximální pro každý úhel. Napišme si výraz pro obvodové zrychlení projektilu pro nulový úhel natočení

$$\begin{aligned} a &= (L-x)\,\varepsilon \\ &= (L-x)\,\frac{\tau}{I} \\ &= (L-x)\,\frac{Mgx - mg\,(L-x)}{Mx^2 + m\,(L-x)^2}. \end{aligned}$$

Úloha teď spočívá v maximalizování tohoto výrazu vzhledem k proměnné x. Za tímto účelem jej upravíme do praktičtějšího tvaru

$$a = \frac{MLx}{Mx^2 + m\,(L-x)^2} - 1.$$

Když chceme maximalizovat tento výraz, na konstantní člen můžeme zapomenout. Dále si můžeme práci zjednodušit tak, že pokud hledáme maximum nějakého kladného výrazu, je to zároveň minimum jeho převrácené hodnoty. Takže budeme hledat minimum výrazu

$$a = \frac{Mx^2 + m\,(L-x)^2}{MLx}.$$

Teď můžeme postupovat dvěma způsoby – buď pomocí derivování, nebo využitím AG nerovnosti[7]. Ta říká, že aritmetický průměr nějakých čísel je vždy větší než jejich geometrický průměr. Pro dvě čísla

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

[5] Vyjde to z Taylorova rozvoje.
[6] až na konstantní člen
[7] nerovnost aritmetického a geometrického průměru

což se dá dokázat jednoduše umocněním obou stran. Když teď provedeme substituce $a \to ax$ a $b \to \frac{b}{x}$, pravá strana rovnice se nezmění a nerovnost přejde po úpravě na

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Shodou náhod se náš výraz dá jednoduše upravit (skoro) do tvaru levé strany této nerovnosti

$$a = \frac{m+M}{ML}x + \frac{mL}{Mx} - \frac{2m}{M}.$$

Naštěstí, nadbytečný člen je opět jen konstantní, takže jej můžeme ignorovat. Z AG nerovnosti vyplývá, že tento výraz je pro libovolný výběr čísla x větší nebo roven

$$2\frac{\sqrt{(m+M)m}}{M}.$$

My ale chceme vybrat takové x, aby byl výraz co nejmenší, což se stane právě v případě rovnosti. Takže dostáváme rovnici pro x

$$\frac{m+M}{ML}x + \frac{mL}{Mx} = 2\frac{\sqrt{m\left(m+M\right)}}{M},$$

což po úpravách přejde na kvadratickou rovnici s řešením

$$x = \sqrt{\frac{m}{m+M}}L.$$

Pro úplnost si ukážeme i postup pomocí derivování. Výraz nabude minima v bodě, když je jeho derivace nulová

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Mx^2 + m\left(L-x\right)^2}{MLx} = \frac{2Mx - 2m\left(L-x\right)}{MLx} - \frac{Mx^2 + m\left(L-x\right)^2}{MLx^2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Když vyřešíme tuto rovnici, dostaneme ten samý výsledek jako předtím.

Výsledky

$\boxed{\mathbf{1}}$ $t = \dfrac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2}}{v}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 10,39 m/s

$\boxed{\mathbf{3}}$ Mirek, o 6 minut.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 34,5 %

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\dfrac{t_1 - t_2}{2}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\dfrac{2\pi r^2 v^2 \rho}{g}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 11 cm

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\dfrac{u}{u+v} = \dfrac{1}{1+\frac{v}{u}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\left[\dfrac{2521}{177}a;\ \dfrac{13}{2}a\right]$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 80 cm

$\boxed{\mathbf{11}}$ 4,5 m

$\boxed{\mathbf{12}}$ 60°

$\boxed{\mathbf{13}}$ $3\dfrac{U}{R}$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $\dfrac{7}{9}$

$\boxed{\mathbf{15}}$ 0°

$\boxed{\mathbf{16}}$ Přibližně 95 mm.

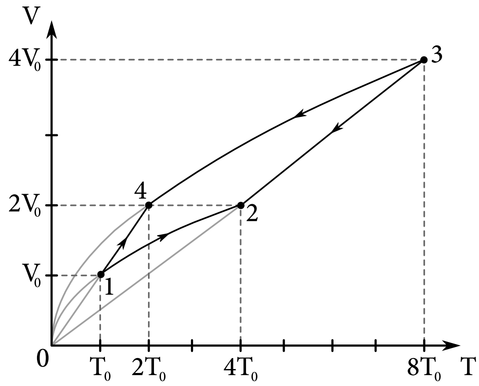
$\boxed{\mathbf{17}}$ 2,17 g. *Uznávejte výsledky, které se liší od uvedené hodnoty o nejvíce* 0,01 g.

$\boxed{\mathbf{18}}$ $\dfrac{5M}{4m}$

$\boxed{\mathbf{19}}$ $\dfrac{4}{5}$

20 230,9 km. *Uznávejte hodnoty v rozmezí* 229,9 km *až* 231,9 km.

21 *Dbejte na to, aby odevzdané grafy měly vyznačené všechny důležité hodnoty na osách, šipky popisující průběh děje měly správný směr a přímky a paraboly po prodloužení procházely přes počátek. Klidně se řešitelů zeptejte na tvar křivek, tzn. zda skutečně vědí, že to jsou odmocniny.*



22 116 m^2

23 $\dfrac{\pi R^3 \rho}{3}$

24 $\arcsin\left(\dfrac{m}{M+m}\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$

25 $\dfrac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$

26 29,43 m/s.

27 1-krát – intenzita pole bude stejná

28 1,6 dm^3

29 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

30 Magnetické pole je nulové.

31 $\sin \varphi_0$

32 3 538 765 km^2. *Uznávejte hodnoty, které se od této liší o méně než* 10 000 km^2.

33 $T = \dfrac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

34 $\frac{11}{61} \doteq 0{,}18\,c$

35 První se ke kladce dostane Danka a její vzdálenost od Dana bude $\frac{2}{3}H$.

36 $\frac{Pt}{2\pi R}$

37 $\frac{126}{275}MR^2$

38 $U\sqrt{\frac{\left(3R-\omega^2RLC\right)^2+\left(\omega R^2C+\omega L\right)^2}{R^4+\omega^2R^2L^2}} = U\frac{\sqrt{\left(3R^2+\omega^2L^2\right)^2+\left(\omega R^3C-2\omega RL+\omega^3RL^2C\right)^2}}{R^3+\omega^2RL^2}$

Akceptujte i výsledky v jiném tvaru, jsou-li rozumně složité a dají se pohledem ověřit.

39 $2\pi\sqrt{\frac{145}{32}\frac{r}{g}}$

40 $x = \sqrt{\frac{m}{m+M}}L$