Feladatok

1 Két fizikus baba azon vitatkozott, hogy kinek a bátyója fut gyorsabban. A kerti homokozóban eltöltött, hosszú, bunyóval és hangos hisztivel kísért vita után a következőben egyeztek meg: Misi bátyója fél femtoparszeket tud lefutni nanoévszázadonként, Gyuri bátyója pedig 25 piko-csillagászati egységet egy mikrohét alatt. Kinek a bátyója fut gyorsabban, és ő mennyi nanopuerperiummal futna jobb időt a lassabbiknál egy három fény-mikromásodperc hosszú futópályán?

A pontos értéktől legfeljebb 2 %-kal eltérő eredményt még elfogadjuk

2 Irén kompótot készített. Amikor végzett, maradt két pohárnyi cukoroldata: 80 gramm 20 %-os oldat és 20 gramm 80 %-os oldat. A két oldatot összeöntötte és alaposan elkeverte őket. Mekkora az így kapott oldat tömegkoncentrációja?

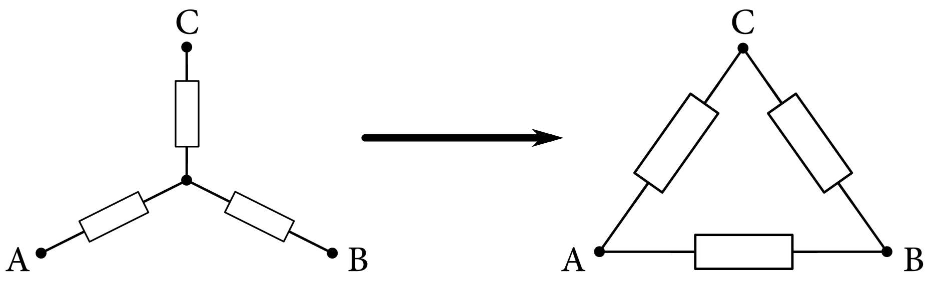
3 Péter, Pál és Artúr futóversenyt rendeztek egy 100 méteres távon. A verseny során mindannyian állandó sebességgel futottak. Artúr 20 méterrel győzte le Pált. Pál 20 méterrel győzte le Pétert. Hány méterrel győzte le Artúr Pétert?

4 Egy kocka alakú, a oldalú és ρ_i sűrűségű jégkockát belehelyezünk egy hengeres R sugarú üvegedénybe. A jég elkezd $\rho_w > \rho_i$ sűrűségű vízzé olvadni. Mekkora a maximális vízszint az edényben az olvadás során?

5 Gyuri elment horgászni. Egy m tömegű harcsa akadt a horgára. Amikor Gyuri F erővel húzni kezdte, a harcsa a gyorsulással elindult felfelé. Gyuri felbuzdult a sikerén, feltűrte az ingujját és $2F$ erővel kezdte húzni a halat. Mekkora lett így a harcsa gyorsulása? Tegyük fel, hogy a harcsa már feladta az életét és nyugodtan lóg a horgon. A harcsa sűrűsége némileg különbözik a víz sűrűségétől. A harcsa mindkét esetben víz alatt van.

A közegellenállást elhanyagoljuk. Az eredményt kizárólag a megadott paraméterekkel add meg!

6 Három ismeretlen ellenállás csillag alakban van összekötve. Ha az ohmmérő két csúcshoz csatlakozik (A – B, A – C, B – C), a mért ellenállások 24 Ω, 48 Ω, illetve 56 Ω. Mekkora ellenállásokat mérnénk, ha háromszög alakban helyeznénk el őket (ahogyan az ábra is mutatja)?



7 Szeptember 23-án New Yorkban, Misi a csavargó egy padon aludt a Central Parkban. Kezdett hideg és sötét lenni, és meglehetősen hiányzott neki a napsütés. Helyi idő szerint nagyjából éjfélkor elkezdett azon töprengeni, hogy milyen messze is van a Nap és milyen messzire kéne elballagnia, hogy most ténylegesen láthassa. New York helyzete északi szélesség 40°. Számítsd ki a Föld felszínén lévő legközelebbi megvilágított helyszínhez futó ívhosszat!

A Napot vegyük végtelen távoli, pontszerű fényforrásnak. Az eredményt tíz kilométerre kerekítve add meg!

8 Gyuri, miután felhagyott a fizikuskodással, úgy döntött, hogy színész lesz. Alig várta már, hogy egy nagy sebességű rendőrségi üldözéses jelenetet forgathasson. Nagyon csalódott lett, amikor megtudta, hogy a jelentetet valójában 50 km/h sebességnél forgatják, és a lejátszás sebességét a 160 km/h sebesség látszata elérésének megfelelően növelik. Azonban a látszatot elrontotta az, hogy a kamera elkapott a háttérben egy ablakból kizuhanó virágcserepet is. Milyen a Föld látszólagos gravitációja a filmben? Az eredményt g-ben add meg!

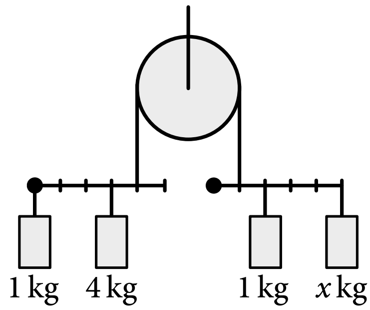
9 Mátyás egy kavicsot súrlódásmentes ferde síkra helyezett. Mi legyen a lejtő dőlésszöge, hogy a kavics gyorsulásának vízszintes összetevője maximális legyen?

10 A kis Máté talált egy Y-alakú ágat és egy csúzlit készített belőle. Először megpróbált vele lelőni egy verebet, ami vízszintesen, állandó sebességgel repült. A Máté által elhajított kő sebessége $v = 40$ m/s. A kő épphogy elhibázta a verebet, azonban mégis eltalálta, amikor már lefelé zuhant. Számold ki a veréb sebességét, ha a kő legfeljebb $H = 20$ m magasra repült!

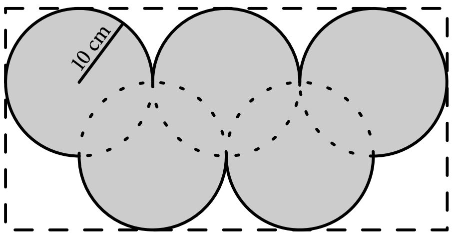
11 Legutóbb, amikor Ádam unatkozott, megpillantott egy négyzet alapú, a oldalélű, b magasságú, m tömegű szójatejest dobozt, ami az asztalon állt. Elkezdte vízszintesen tolni a dobozt egy bizonyos magasságban úgy, hogy az konstans sebességgel mozogni kezdett. Egy idő után észrevette, hogy ha elég magasan tolja a dobozt, akkor az átfordulhat az élén. Számítsd ki azt a maximális magasságot, aminél tolva a dobozt az még nem dől el! A súrlódási együttható az asztal és a tejesdoboz között f.

12 Lukács Norvégia környékén vándorolt. December 21 − n pontosan délben a sarki körre érkezett. A Nap nem volt túl magasan, de sikerült megvilágítania egy hegy csúcsát, amely észak irányába 150 km-re található. Milyen magas volt a hegy? *Az eredményt egész méterre kerekítve add meg.*

13 Mekkora legyen az x tömeg az emelők és csigák alább látható rendszerében, hogy a rendszer egyensúlyban maradjon? A kerek foltok a falhoz rögzített tengelyeket jelölik. A megjelölt elemek azonos méretűek.



14 György nagyon izgatottan várja a dél-koreai Phjongcshangban megrendezett olimpiai játékokat. Még egy 60 cm × 30 cm-es, négyszögletes fémlemezt is vásárolt és kivágta belőle az olimpiai ötkarikát. Mekkora az így kapott olimpiai ötkarika és az eredeti fémlemez tömegközéppontjának a távolsága?



15 Az A gáz átalakul B gázba egy kémiai reakciót követően: A ↔ B. A reakció sebességet, amely alatt az A gáz B-be alakul, a következő képlet adja:

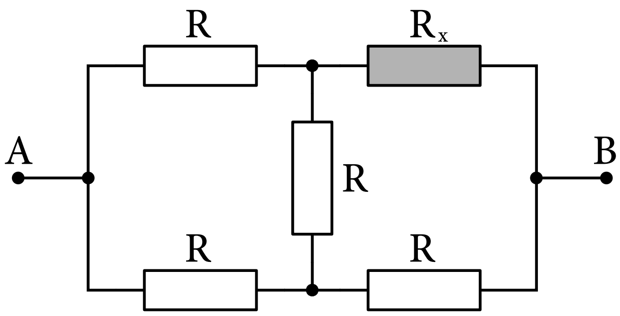
$$v = \frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = k_A n(A),$$

ahol $n(A)$ az A gáz anyagmennyisége az edényben és k_A pedig egy konstans jellemzője a reakciónak. A $B \rightarrow A$ folyamat reakciósebességét egy ezzel analóg formula írja le, egy k_B konstanssal. Az A gázból n_0 mol-t helyeztünk az edénybe és hagytuk, hogy a rendszer egyensúlyba kerüljön A és B gázok között. Mekkora a B gáz anyagmennyisége az edényben az egyensúly beállta után?

16 Egy piros autó v sebességgel mozog egy egyenes úton. Egy kék autó egy másik egyenes úton mozog, merőlegesen az elsőre w sebességgel. Amikor a kék autó a két út kereszteződésénél van, a piros autó tőle d távolságra helyezkedik el. Számítsd ki az autók közötti minimális távolságot az útjuk során!

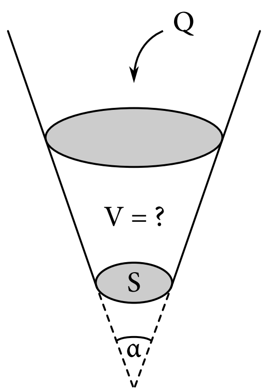
17 Ferenc, a tűzoltó egy felhőkarcoló oldala mentén ereszkedik lefelé. Amikor egy adott hosszúságú kötélen lóg, a lábai segítségével el tud rugaszkodni a felhőkarcoló felületétől vízszintesen mért 4 m távolságra. Ha megduplázza a kötél hosszát, 6 m-re tud elrugaszkodni. Milyen messzire tudna elrugaszkodni, ha a kötél hossza az eredeti tízszerese lenne?

18 Mi az a legkisebb és legnagyobb mérhető ellenállásérték az alábbi ábrán jelzett A és B pont között, ha a fogyasztó R_x ellenállása önkényesen megválasztható?

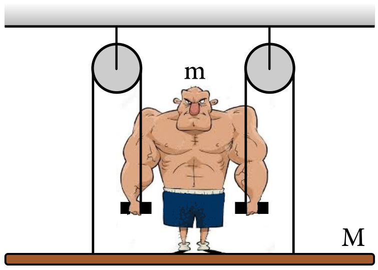


19 Egy $\alpha = 2 \arctan \frac{1}{2}$ nyílásszögű, csonka kúp alakú tölcséren alul van egy lyuk, aminek területe: $S = \pi$ mm². Ebbe vizet öntünk állandó $Q = 2\pi$ ml/s hozammal. Egy idő után a tölcsérben lévő víz térfogata állandó értéket vesz fel. Mekkora ez a térfogat?

Hagyd figyelmen kívül a felületi feszültséget! Az eredményt egész milliliterre kerekítsd!

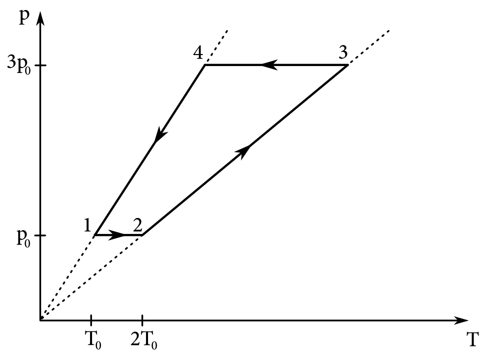


20 Herkulesnek, az erős embernek a tömege m. Az utolsó cirkuszi mutatványa így történik: ő egy $M < m$ tömegű fadeszkán áll. Ezután megragad két kötelet, amelyek egy pár csigán mennek keresztül és a fadeszkához vannak kötve és felemeli magát így. Mekkora minimális erőt kell gyakoroljon, ahhoz hogy ez sikerüljön neki?

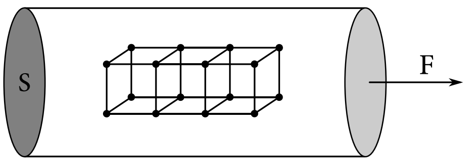


21 Vegyünk egy vas téglatestet a, b, c élekkel. Hogy ha ezt két tökéletesen vezető lap közé szorítjuk, a következő ellenállás értéket mérhetjük: 12 Ω, 27 Ω és 75 Ω. Mekkora lenne a lehető legnagyobb, ebből a vas téglatestből kivágható kockának az ellenállása ugyan ezek között a tökéletesen vezető lapok között?

22 Az alábbi képen egy p_0 kezdeti nyomású, V_0 kezdeti térfogatú, és T_0 kezdeti hőmérsékletű ideális gáz termodinamikai körfolyamata látszik a pT–diagrammon. A gáz mennyisége a körfolyamat során állandó. Rajzold át a körfolyamatot egy VT-diagrammra. Ne felejtsd el megjelölni a fontos térfogat- és hőmérsékletértékeket.



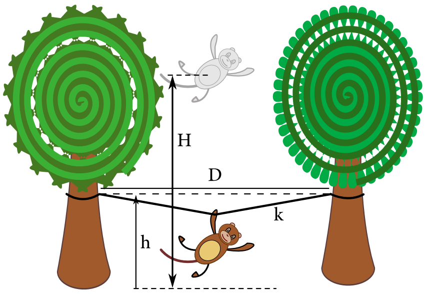
23 Egy ρ sűrűségű, E Young modulussal rendelkező és M moláris tömegű fémes elem köbös rácsba kristályosodik. Van egy ebből a fémből készült rúdunk, amely rögzített az egyik végénél, a másik végénél pedig a hossztengelye mentén F erővel húzzuk. Számítsd ki az atomok közti távolság megváltozását, ha a rács a képen látható módon orientált!



24 Irén egy éjszakai vonaton utazik. A bal oldalán levő ablakon át látja a Holdat, a jobb oldalán levő ablakon át pedig egy utcai lámpát. Az ablakok belső felülete a fény egy részét visszaverik, ezért a lámpa tükörképe látszik a bal oldalán, és a Hold tükörképe is látszik a jobb oldalán. Más tükröződés nem játszik szerepet. A bal oldalon a Hold valódi képe hatszor olyan fényes, mint a lámpa tükörképe. A jobb oldalon a lámpa ötven százalékkal fényesebb a Hold tükörképénél.

Mi lenne a lámpa és Hold intenzitásának aránya, ha nem lenne üveg az ablakokban? Az ablak üvegének fényáteresztőképessége 50 %.

25 Brazil bennszülöttek szárítókötelet készítettek, hogy megszáríthassák az ágyékkötőiket. Ehhez fogtak két könnyű és rugalmas liánt, amelyek nyugalmi hossza nulla, valamint merevsége k, és végeiket összekötötték. Ezt követően kifeszítették a kötelet h magasságban két, egymástól d távolságra lévő fa közé. Egy szemtelen, M tömegű majom hirtelen leugrott egy a talajtól H magasságra lévő ágról és a kötél közepébe kapaszkodott. A talajtól mérve milyen magasan fog megállni a majom a zuhanásban, mielőtt a kötél visszarántaná?



26 Egy súlytalan, tökéletes köralakú óra két szögön lóg a falon: az egyik az óra közepénél van, a másik a tetejénél. Hogy az órát különlegesebbé tegyük, 12 kis súlyt akasztunk rá – k óránál egy km nagyságú súly lóg. A felső szög nem bírja tartani ezt a nagy terhelést, letörik, és az óra elkezd forogni. Mi a kezdeti szöggyorsulása?

27 Jakab légiparádéra ment. Egy pilóta bekapcsolta a repülőgépe külső hangszóróját, mielőtt a nézők fölé repült. Véletlenül éppen Jakab kedvenc dallamát játszotta. Amikor a repülőgép közelített, a dallam eredeti, Jakab által ismert f frekvenciája egy oktávval magasabban hangzott (azaz a frekvenciája $\sqrt{2}$-ször nagyobb volt). Milyen frekvenciát hallott Jakab, amikor a repülőgép elhaladt mellette és egyenesen továbbrepült?

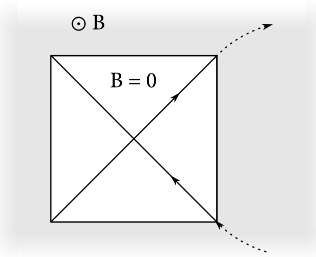
28 József lefeküdt egy medence alján. A szeme így 2 m mélyen van, és 2 m távol a medence falától. Ádám, aki szintén 2 m magas, ekkor a medence szélére állt. Milyen magasnak látja őt József, ha a víz törésmutatója $n = 1{,}33$?

Ennek a feladatnak nincs analitikus megoldása. Számológép használatát ajánljuk. A vég- és részeredményeidet legalább két tizedesjegy pontosan tüntesd fel.

29 Egy standard 100 W-os izzókörte által kibocsátott fény csak 4 %-a látható fény. Éjszaka Jani egy ilyen lámpát legfeljebb 100 km-ről képes észlelni. Mennyire messze kellene repüljön a Naptól, hogy ne lássa azt? A Nap sugárzásának 36 %-át látható fény formájában bocsátja ki.

Kerekítsd az eredményeket egész parszekekre.

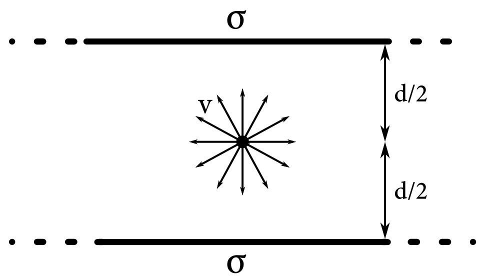
30 Egy homogén B indukciójú, mágneses mezőben található egy négyzet alakú lyuk, a térerősség vonalakra merőlegesen, ahol a térerősség zérus. Egy Q töltésű részecske végigrepül a négyzet egyik átlóján, elhagyja azt, majd mikor visszatér annak másik átlóján halad végig. A részecske t idő alatt halad keresztül egy átlón. Mekkora a részecske tömege?



31 Gyuri el akarja vinni az m tömegű házi bolháját egy körre a ringispilre. A székeket tartó láncok mind L hosszúságúak és a forgásközépponttól r távolságban vannak a ringispil szerkezetére rögzítve. Számítsd ki a legnagyobb szögsebességet, amelynél a bolha, függetlenül a fején elfoglalt pontos helyzetétől, még nem esik le Gyuri fejéről, ha a bolha F erővel képes kapaszkodni!

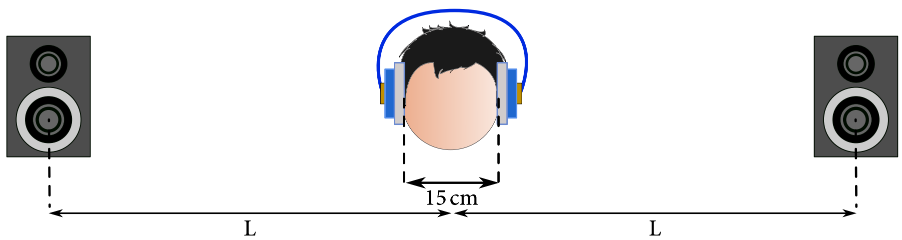
32 Rozalinda, az arcátlan majom olyan sok banánt evett, hogy veszélyes a közelében lenni. Az aktivitása 10^8 Bq! Egy átlagos banán 20 cm hosszú és 60 μg radioaktív ^{40}K magot tartalmaz, amelynek a felezési ideje 1,25 milliárd év. Másodpercenként hány méter banánt kéne most Rozalindának megennie ahhoz, hogy fenntartsa a veszélyes szintű radioaktivitását?

33 Egy protonforrást két párhuzamos, végtelen lemez közé helyezünk félúton, amelyek felszíni töltéssűrűsége σ és távolságuk d. A forrásból $+e$ töltésű és v sebességű protonok lépnek ki minden irányba. A lemezek mely pontjait tudják elérni a protonok?



34 Martin a jobb fülére gyengén hall. Amikor a külső zajokat teljesen kizáró fülhallgatót visel, a jobb fülére 3 dB értékkel kell növelnie a hangerőt. Ha hangszóróra vált, akkor 13 dB növelésre van szüksége a jobb oldali hangszórón. Számítsd ki a hangszórók közötti távolságot, ha Martin két füle közötti távolság 15 cm!

Az eredményt centiméterre kerekítve add meg! Vedd figyelembe, hogy a bal oldali fül szintén hallja a jobb oldali hangszórót, és viszont! A fej hangterjedésre gyakorolt hatását elhanyagoljuk.



35 Nap körüli pályára lőttünk egy tökéletesen fekete, kocka alakú műholdat. A műholdnak tökéletes a hővezetése és van egy reaktív irányítási rendszere, amely lehetővé teszi, hogy szabadon változtassa a irányítottságát.

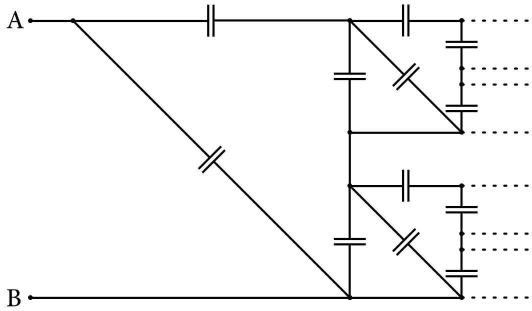
Mi a műhold által elérhető legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet közötti arány, ha a napsugárzás az egyetlen energiaforrása?

36 Kláranak elege lett az állandó áramkimaradásokból és úgy döntött, hogy nem fog tovább a hagyományos energia-szolgáltatóktól függeni. Így vett magának egy aprócska nukleáris reaktort, ami hélium magokat fúzionált. A fúzió mellékterméke a béta-sugárzás, vagyis, amikor elektron hagyja el az atommagot.

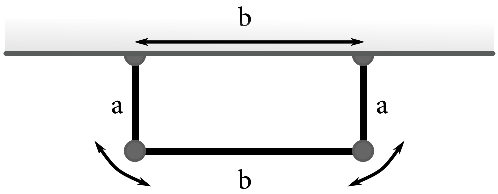
Végyünk egy hélium-magot R sugárral, ami elektronokat bocsát ki. Az elektront ezután befogja egy proton a hélium-magtól állandó, $r = 11R$ távolságra. Mekkora kell legyen az elektron minimális mozgási energiája amikor elhagyja a magot, ahhoz, hogy elérje a protont?

37 Márton hihetetlen mennyiségű C kapacitású kondenzátort talált a padlásán. A kondenzátorok száma lényegében majdhogy nem végtelennek tekinthető, tehát úgy gondolta, hogy épít egy végtelen kondenzátor rácsot. Először is vett négy kondenzátort, majd nyolcat, majd tizenhatot, és így tovább.

Mekkora volt a kapacitása Márton kreálmányának, amint készen lett azzal?



38 Egy fém keret három rúdból áll, két függőlegesből, a hosszal, és egy vízszintesből, b hosszal. A rudak és a fal közötti kapcsok engedik a rudak szabad mozgását. A rudak hosszanti sűrűsége λ. Mi a periódusideje a keret kis oszcillációinak, ha az a saját síkjában leng?



39 Egy M tömegű bolygónak egyetlen, $M/10$ tömegű holdja van, amely körpályán kering körülötte. Hirtelenjében, Gandalf megjelenik és elvarázsolja a bolygó tömegét. A holdja, megtartva persze tehetetlenségét, elrepül a végtelenbe. Mi lehet a felső határa a bolygó új tömegének?

40 Egy kalózhajó árboca h magas, amelynek tetejéről egy $L < h$ hosszúságú kötél lóg. Jani, a kalóz, futni kezd a fedélzeten v sebességgel. Amikor az árboc mellett elhalad, megragadja a kötelet és egy az árbocon áthaladó, a fedélzetre merőleges síkban lengeni kezd rajta. Legfeljebb mekkora forgatónyomatékot fejt ki az árboc talpára mozgása közben?

Tegyük fel, hogy Jani sebessége nem elegendő ahhoz, hogy az árboc tetejénél magasabbra lendüljön.

Megoldások

1 A feladat fizikus szemmel nem bonyolult, csak hagyományosabb mértékegységekre van szükségünk.

A konstanstáblázatból megkaphatjuk a 1 pc $\doteq 3{,}086 \times 10^{16}$ m értéket. A femto- prefixum azt jelenti, hogy 10^{-15} értékkel szorzunk. Tehát a fél femtoparszek körülbelül 15,43 m.

Egy évben van 365 nap[1], minden napban 24 óra van, és minden órában 3600 s másodperc. Egy évszázad 100 évet jelent. A nano- prefixum 10^{-9} értékkel való szorzást jelent, ezért egy nanoévszázad 3,1536 s időt jelent.

A csillagászati egység megtalálható a konstanstáblázatban, értéke 1 AU $\doteq 1{,}5 \times 10^{11}$ m. A piko- prefixum 10^{-12} értékkel való szorzást jelent, így a pikocsillagászati egység értéke 0,15 m. Minden hét hét napot jelent, amely 604 800 s időnek felel meg, ezért egy mikrohét 0,6048 s hosszú.

Számológéppel Misi bátyjának sebességét kiszámítva $v_\mathrm{M} \doteq 4{,}8929\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ eredményre jutunk, Gyuri bátyja esetén pedig $v_\mathrm{J} \doteq 6{,}2004\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Láthatjuk, hogy Gyuri bátyja gyorsabb.

Most számítsuk ki a versenypálya hosszát: egy fény-mikromásodperc az a távolság, amelyet a fény pontosan 1 µs alatt megtesz, amely $s \doteq 3 \cdot 300\ \mathrm{m} = 900\ \mathrm{m}$. Így ki tudjuk számítani a két bátyó idejét: $t_\mathrm{M} \doteq 183{,}943$ s és $t_\mathrm{J} \doteq 145{,}152$ s, a különbség pedig 38,791 s.

Végül ki kell fejeznünk az eredményt nanopuerperiumban. Egy puerperium pontosan $10!\ \mathrm{s} = 3\,628\,800$ s időtartamnak felel meg, így a nanopuerperium 3,63 ms. Osztással megtaláljuk a végeredményt: Gyuri bátyja 10 690 nanopuerperiummal futja le Misi bátyját.

2 A végső oldat össztömege 100 g. A feloldott cukor tömege $0{,}8 \cdot 20\ \mathrm{g} + 0{,}2 \cdot 80\ \mathrm{g} = 32\ \mathrm{g}$, így az összeöntött oldat tömegkoncentrációja 32%.

3 Jelölje Artúr, Pál és Péter sebességét v_1, v_2 és v_3, ebben a sorrendben. Amikor Artúr a célba ért, azaz 100 m -t tett meg, Pál ugyanekkor csak 80 m -t. Eképpen sebességeik aránya $\frac{v_1}{v_2} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$. Hasonlóképpen, amikor Pál éppen megtette a 100 m -es távolságot, Péter csak 80 m -t tett meg, így sebességük aránya $\frac{v_2}{v_3} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$. Artúr és Péter sebességének aránya

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{v_1}{v_2}\frac{v_2}{v_3} = \frac{25}{16}.$$

Minthogy Artúr 100 m utat tett meg azonos t idő alatt, eközben Péter csupán

$$v_3 t = \frac{v_3}{v_1} 100\ \mathrm{m} = \frac{16}{25} 100\ \mathrm{m} = 64\ \mathrm{m}.$$

Így Artúr Pétert 100 m − 64 m = 36 m -rel győzte le.

4 A kocka olvad és egy bizonyos idő után elkezd úszni a víz felszínén. Jelölje a kocka kezdeti térfogatát $V_c = a^3$, az nem olvadt, maradék kocka térfogatát pedig V_i, a víz térfogata pedig V_w és jégkocka elmerült részének térfogata pedig V_p. Arkhimédesz-törvénye szerint a kocka V_p térfogatú vizet szorít ki, ami az edényben lévő vízszint emelkedéséhez vezet.

A felhajtóerő $F_\mathrm{vz} = V_p \rho_w g$. A kocka lebeg, tehát a nehézségi erő és a felhajtó erő kiegyenlítik egymást $F_g = F_\mathrm{vz}$. Ebből kapjuk $V_p = V_i \frac{\rho_i}{\rho_w}$. Fejezzük ki a V_w térfogatot, mint V_i többszörötsét. A kezdeti tömege $m = a^3 \rho_i$. A tömegnek meg kell maradnia így az $m = m_i + m_w$ egyenletnek igaznak kell maradnia az egész olvadás során.

[1] trópusi évvel is számolhatnánk, és az eredmény így is helyes lenne hibahatáron belül

A víz térfogata $V_w = \frac{m-m_i}{\rho_w}$, thus $V_w = \frac{a^3\rho_i - V_i\rho_i}{\rho_w}$. Végül azt kapjuk, hogy

$$V = V_w + V_p = \frac{a^3\rho_i - V_i\rho_i}{\rho_w} + V_i\frac{\rho_i}{\rho_w} = a^3\frac{\rho_i}{\rho_w}.$$

Ez azt jelenti, hogy a vízszint nem függ az elolvadt jég mennyiségétől ha az lebeg. Elméletileg, ha az üveg edény elég széles volna, megtörténhetne, hogy a jégkocka maradék nem lebegne egyáltalán. Abban az esetben az egész kocka elolvadna és a víz térfogata $V = a^3\frac{\rho_i}{\rho_w}$ lenne, ami megegyezik a korábbival. Tehát a maximális vízszint

$$h = \frac{\rho_i a^3}{\rho_w \pi R^2}.$$

5 Newton második törvényének megfelelően a gyorsulás arányos a ható erővel. Milyen erők hatnak a harcsára? Először is, az az erő, amivel Gyuri húzza a horgot. Másodszor, hat a gravitációs erő és a felhajtóerő. Az összes erő állandó és kizárólag függőlegesen hat, ezért könnyen megadhatóak. Az összegüket jelölje F'.

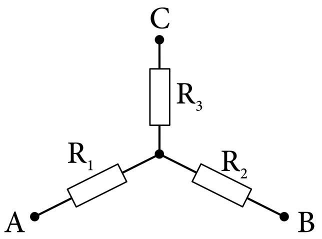
Ebben az esetben kijelenthetjük, hogy $ma = F'$. Miután Gyuri $2F$ erővel kezd húzni (vagyis a húzóerő kap még egy F-et), a F' ugyanaz marad, így $ma' = F + F'$. Kifejezve a F' erőt, megkapjuk a végső gyorsulást: $a' = a + \frac{F}{m}$.

6 Jelöljük így a mért ellenállásokat: $R_{AB} = 24\ \Omega$, $R_{AC} = 48\ \Omega$ és $R_{BC} = 56\ \Omega$ és az egyedülálló ellenállásokat R_1, R_2 a R_3. A mérés során mindig van egy ellenállás, amely egy szigetelt ágon van és nem befolyásolja a mért értéket. Ezzel így írhatjuk:

$$R_1 + R_2 = R_{AB},$$

$$R_1 + R_3 = R_{AC},$$

$$R_2 + R_3 = R_{BC}.$$



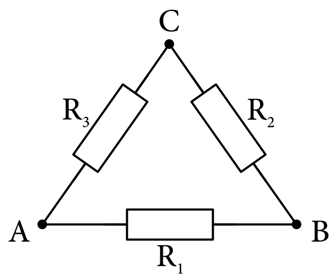
Ábra 1: *Csillag alakban kötött ellenállások*

Egyedülálló algebrai beállítások adják, hogy $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 16\ \Omega$ és $R_3 = 40\ \Omega$. Miután újrakötjük őket háromszög alakba, a soros és párhuzamos kapcsolások egyszerű kombinációját mérjük:

$$R'_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 7\ \Omega,$$

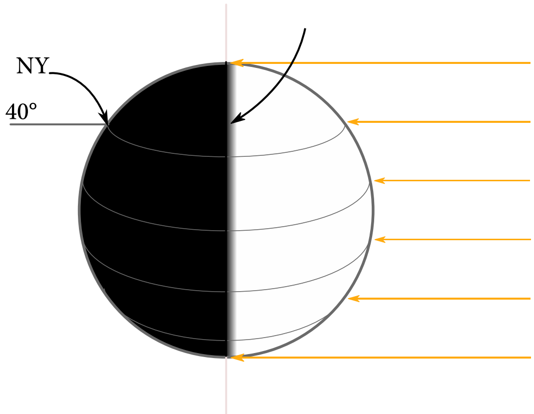
$$R'_{BC} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 12\ \Omega,$$

$$R'_{AC} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = 15\ \Omega.$$



Ábra 2: *Ellenállások háromszögbe kötve*

7 Nap-éj egyenlőség éjféljén a Nap pontosan a New Yorkkal ellenkező meridiánon van. A sötét és a napos félteke közötti felületnek a neve terminátor.



Ábra 3: *A Nap fénye megvilágítja a Földet*

Egyértelműnek kell lennie, hogy a legközelebbi hely, ahonnan láthatjuk a Napot, az az Északi-sark. Ha végigsétálnánk a terminátor mentén, minden ponton közelebb vagy távolabb kerülnénk New Yorkhoz képest, a sarkokat leszámítva. Mivel az irányunk egyik sarkponton sem merőleges a New Yorkot velünk összekötő vonalra, tudjuk, hogy a legközelebbi hely az egyik sarkpont kell legyen.

A Déli-sark bizonyára távolabb van New Yorktól, mint az Északi-sark, ezért az utóbbiról van szó. A szélességkülönbség így 50°. A Föld sugara $R = 6378$ km, ezért az ívhossz

$$d = \frac{5\pi}{18}R \doteq 5566\ \text{km} \doteq 5570\ \text{km}.$$

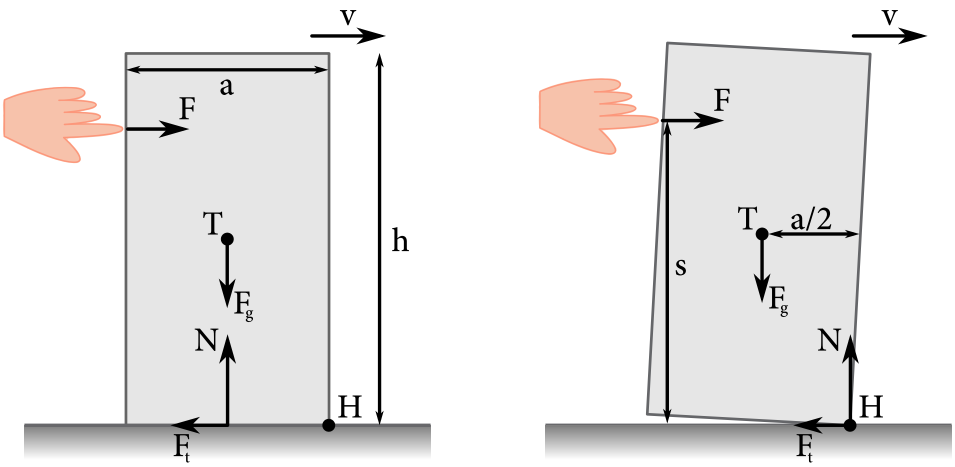
8 Először is, kiszámítjuk a valódi és a lejátszási képsebesség arányát. Ezt megtehetjük a kocsik sebessége alapján. Jelölje a kocsi által két képkocka között megtett távolságot d. Ha egy képkocka τ ideig látszik, a videóban a megfigyelhető sebesség $v = \frac{d}{\tau} = df$, ahol $f = \frac{1}{\tau}$ a lejátszási sebesség. Látjuk, hogy a megfigyelhető sebesség arányos a lejátszási sebességgel. A lejátszási sebességek aránya egyenlő a megfelelő sebességek arányával: $k = \frac{50\ \text{kmh}^{-1}}{160\ \text{kmh}^{-1}} = \frac{5}{16}$.

Gyorsulás esetén ezek hogyan módosulnak? Vegyünk egy h magasságból állandó gyorsulással történő zuhanást. A magasság és az idő egymással $h = \frac{1}{2}gt^2$ szerint arányos. Tudjuk, hogy a magasság ugyanaz marad, ha megváltoztatjuk a lejátszás sebességét, de az idő kt szerint alakul. Innen a látszólagos gyorsulás $h = \frac{1}{2}g'(kt)^2$, ahol g' a látszólagos gravitáció Az egyenleteket elosztva a következőt kapjuk: $g' = \frac{g}{k^2} = \left(\frac{5}{16}\right)^{-2} = 3{,}2^2 = 10{,}24\,g$.

9 Amikor a kavicsot a ferde síkra helyezik, annak gyorsulása $g \sin \alpha$, ahonnan a vízszintes rész nagysága $g \sin \alpha \cos \alpha = g\frac{\sin(2\alpha)}{2}$ nagyságrendű. A szinusz maximuma 90°-nál van, ezért a legnagyobb vízszintes gyorsulás $\alpha = 45°$ esetén van.

10 Ahogy a kő másodjára eltalálja a verebet, a kő és a veréb vízszintes sebessége azonos. A kő pályájának legmagasabb pozíciója fogja meghatározni a kezdeti függőleges sebbességet: $v_y = \sqrt{2gH}$. A vízszintes sebesség Pithagorasz-tétellel számolható a következőképpen: $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2}$ ami a veréb sebessége is egyben $20\sqrt{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \doteq 35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

11 Vizsgáljuk a dobozra ható erőket, miközben toljuk! Először is figyelembe kell vennünk a nehezségi erőt F_g, ami a test tömegközéppontjában hat. Másodsorban fellép egy N tartóerő az asztalra merőlegesen, ami az asztal és a doboz érintkező felületén eloszlik, valamint a súrlódási erő F_t, ami a mozgás és a nyomóerő F irányával ellentétesen hat.



Ábra 4: *Egy ujjal megtolt doboz*

Ahhoz, hogy állandó sebességet érjünk el, a vízszintes erőknek ki kell egyenlíteniük egymást, tehát $F = F_t$. Tapasztalati tény, hogy a doboz nem esik keresztül az asztalon, így a függőleges irányú erőknek is ki kell egyenlíteniük egymást $N = F_g$. Tudjuk továbbá, hogy $F_t = fF_g$. Amikor a doboz elkezd átbillenni az éle (H) mentén, az N és F_t erők oda helyeződnek át. Kiszámíthatjuk az élre vonatkoztatott forgatónyomatékot, mivel N és F_t erők forgatónyomatéka itt 0. Így csak F és F_g erők nyomatékát kell figyelembe vennünk.

A doboz nem dől el, tehát az F erő nyomatéka kisebb kell legyen, mint az F_g erőé. Az F_g erő karja $a/2$ távolságra van az éltől (mivel a tömegközéppont ilyen távolágra van attól) és az F erő támadáspontja pedig s távolságra van az asztaltól.

A doboz nem dől el, tehát:

$$F_g\frac{a}{2} \leq Fs,$$

$$mg\frac{a}{2} \leq fmgs,$$

$$\frac{a}{2f} \leq s,$$

ahonnan kiszámíthatjuk, hogy a maximum magásság ahol még tolhatjuk a doboz $\frac{a}{2f}$.

12 Jelöljük a szélességkülönbséget a hegy teteje és Lukács között φ-vel.

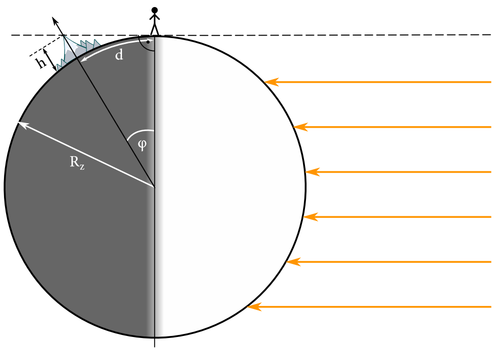
Ebből:

$$\varphi R_z = d,$$

ahol R_z a Föld sugara.

Ha a hegy magassága h, a trigonometria segítségével (lásd az alábbi képet) egyszerűen felírhatjuk:

$$\cos\varphi = \frac{R_z}{R_z + h}.$$



Ábra 5: *A Földet a vizsgált pillanatban megvilágító napsugarak*

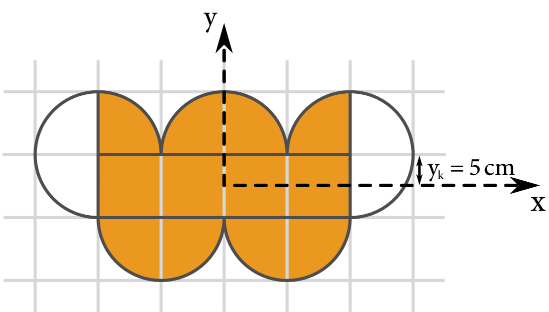
Kombinálva ezt a két kifejezést, a hegy magassága:

$$h = R_z\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R_z}\right)} - 1\right) \doteq 1764\ \text{m}.$$

13 Jelölje F a kötél által mindkét emelőre kifejtett erőt és g a gravitációs gyorsulást. A bal oldali emelőn a forgatónyomatékok egyensúlyát a következő egyenlet írja le $1\ \text{kg} \cdot g \cdot 0 + 4\ \text{kg} \cdot g \cdot 3 = F \cdot 4$, thus $F = 3\ \text{kg} \cdot g$. Analóg módon felírható a jobboldali emelőn is a forgatónyomatékok egyensúlya, melyekből kiszámítható az ismeretlen x tömeg:

$$F \cdot 1 = 1\ \text{kg} \cdot g \cdot 2 + x \cdot g \cdot 5 \Rightarrow x = 0{,}2\ \text{kg}.$$

14 Az olimpiai ötkarika felosztható könnyebben leírható alakzatokra. Ahogy a képen is látható, a karikák $40\ \text{cm} \times 10\ \text{cm}$-es téglalapokból állnak, 5 félkörből és kettő $r = 10$ cm sugarú körből.



Ábra 6: *A karikák felosztása elemi alakzatokra*

Legyen a Descartes-féle koordinátarendszerünk origója az eredeti téglalap középpontja. Így a probléma könnyebben megoldható lesz, mivel a középpontok távolsága lesz az új tömegközéppont helyvektora. Az ötkarika szimmetrikus a függőleges tengelyre, az x komponens 0. Nekünk az y komponenset kell kiszámítanunk. Ezt a súlyozott számtani középpel tehetjük meg:

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

A karikák téglalapokra oszthatók, 3 félkörre és 2 negyedkörre (a képen jelölve). Ezen objektumok y komponenseik összege 0. A megmaradó félkörök tömegközéppontja $y_k = 5$ cm helyen van. Legyen az anyag sűrűsége σ. Számoljuk ki a tömegközéppont helyét.

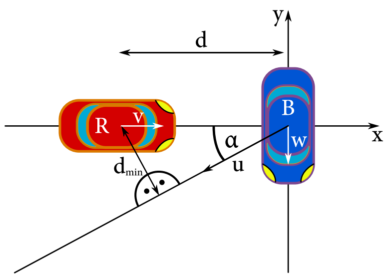
$$y_T = \frac{2\sigma \frac{\pi r^2}{2} \frac{r}{2}}{\sigma 4r^2 + \sigma 3\pi r^2} = \frac{5\pi}{3\pi + 4} \text{ cm} \doteq 1{,}17 \text{ cm}.$$

15 Egyensúly akkor áll be, amikor az átalakulások sebessége megegyezik. Jelölje az egyensúlyi gázmolekulák számát n_A^{eq} és n_B^{eq}- Az egyensúlyi feltétel így

$$k_A n_A^{eq} = k_B n_B^{eq}.$$

Az összes molekulák számának meg kell maradnia a sztochasztikus reakcióban, tehát $n_A + n_B = n_0$. Így a molekulák száma a B gázban $n_B = \frac{k_A}{k_A + k_B} n_0$.

16 Képzeljük azt, hogy az autók egymásra merőleges utakon mozognak. Jelölje a piros autó útját x a kékét pedig y. Egy közös távolságot kell választanunk, ami arra ösztönöz minket, hogy koordinátarendszert váltsunk. Nézzük a helyzetet a piros autó rendszeréből. Ez azt jelenti, hogy a kék autó sréhen mozog $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ sebességgel.



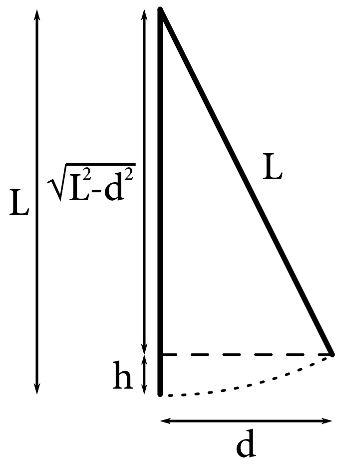
Ábra 7: *A mozgó autók*

Most gondoljunk arra a pillanatra, amikor a kék autó átmegy a kereszteződésen és jelölje ez a kezdőpillanatot. Ekker van egy szög a sebesség $\vec{u}$ és az x tengely között. A $\vec{u}$ vektor felbontható a következőképpen $v = u\cos\alpha$ és $w = u\sin\alpha$. Az egyenletek hányadosa $\tan\alpha = \frac{w}{v}$.

A piros autó vonatkoztatási rendszerében a kék autó pályája eltér az x tengelytől α szöggel. A legrövidebb út az autók között megegyezik a merőleges vonallal a kék autó útvonalán, ami átmegy a piros autón. Tudjuk, hogy a piros autó d távolságra van a kereszteződéstől és azt is tudjuk a kék autó pályájának eltérését is. Tehét, a merőleges távolság

$$d_{\min} = d\sin\left(\arctan\left(\frac{w}{v}\right)\right) = d\frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}.$$

17 Jelölje L a kötés hosszát és v azt a sebességet, amit a tűzoltó azonnal elér elrugaszkodás után. Az energiamegmaradás miatt, ha maximális sebességgel rugaszkodik el, mindig ugyanolyan magasra fog visszaérkezni.



Ábra 8: *Tűzoltó a kötélen*

Hasonlítsuk össze az első és második esetben elért magasságokat:

$$L - \sqrt{L^2 - 4^2\ \mathrm{m}^2} = 2L - \sqrt{4L^2 - 6^2\ \mathrm{m}^2}.$$

Nekünk az L hosszúságot kell meghatároznunk:

$$L - \sqrt{L^2 - 16\ \mathrm{m}^2} = 2L - \sqrt{4L^2 - 36\ \mathrm{m}^2}$$

$$\sqrt{4L^2 - 36\ \mathrm{m}^2} = L + \sqrt{L^2 - 16\ \mathrm{m}^2} \qquad \Big/\ ()^2$$

$$L^2 - 10\ \mathrm{m}^2 = L\sqrt{L^2 - 16\ \mathrm{m}^2} \qquad \Big/\ ()^2$$

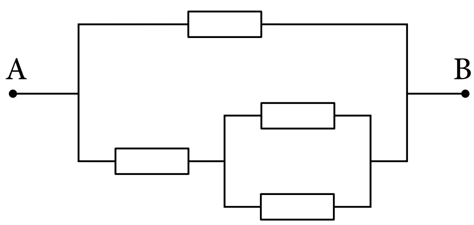
$$L^2 = 25\ \mathrm{m}^2 \Rightarrow L = 5\ \mathrm{m}$$

Az a magasság, amit a tűzoltó elérthet, a következő $h = 5\ \mathrm{m} - \sqrt{5^2\ \mathrm{m}^2 - 4^2\ \mathrm{m}^2} = 2\ \mathrm{m}$. Az utolsó esetben, a tűzoltó d_3 távolságra rugaszkodik el:

$$2\ \mathrm{m} = 50\ \mathrm{m} - \sqrt{2500\ \mathrm{m}^2 - d_3^2} \Rightarrow d_3 = 14\ \mathrm{m}.$$

18 Az R_x ellenállás helyettesíthető egy önkényesen választott ellenállással. Vagyis 0 és ∞ Ω között tetszőlegesen megválasztható. Minket az ellenállás összességében vett értéke érdekel, ami szintén folyton változik, vagyis az eredő ellenállásokat kell kiszámítanunk szélsőséges esetekben.

Ha $R_x = 0\ \Omega$ -t választunk, az ellenállás ideális vezetőként viselkedik. Mivel az ideális vezető ellenállása 0, így hossza önkényesen változtatható. Eképpen összeköthetjük vele a csomópontokat úgy, hogy egybeessenek. A rendszer így rajzolható át:

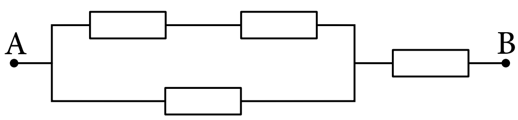


Ábra 9: *A rendszer* $R_x = 0\ \Omega$ *esetben*

Vagyis párhuzamosan kapcsolt ellenállásaink vannak. A két, alsó ágon lévő párhuzamos ellenállás eredő ellenállása $\frac{R}{2}$, így

$$R_0 = \frac{R \cdot \frac{3}{2}R}{R + \frac{3}{2}R} = \frac{3}{5}R.$$

Ha $R_x = \infty\ \Omega$ -t választunk, tökéletes szigetelőént viselkedik. Eképpen ezen ág eltávolítható az áramkörből. A következő rendszert kapjuk:



Ábra 10: *A rendszer* $R_x = \infty\ \Omega$ *esetén*

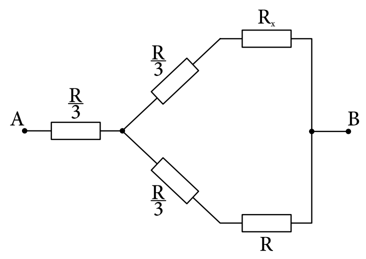
A párhuzamos ellenások nagysága $\frac{2}{3}R$, így az eredő ellenállás

$$R_\infty = \frac{5}{3}R.$$

A teljes eredő ellenállás $\frac{3}{5}R$ és $\frac{5}{3}R$ között változik.

Néhányan megjegyezhetik, hogy nem ismerjük pontosan a teljes eredő ellenállást egy általános R_x esetben. Ugyan a függvény folytonos, ez még nem jelenti, hogy monoton is. Eképpen szélsőséges értékeket is felvehet a határeseteken kívül. Ezért röviden leírjuk, hogyan lehet kiszámítani az R_Σ áramkör teljes eredő ellenását általános R_x esetben.

Először összpontosítsunk arra, hogy az áramkör bal oldala 3db R ellenállásból áll. Ezek hozzá vannak kötve a háromszöghöz. Ha bármely két csomópont között megmérjük az ellenállást, pontosan $\frac{2}{3}R$ -t kapunk mindhárom esetben. Az ellenállások ellenállásértékei fixek, így tetszőlegesen kicserélhetők bármely más konfigurációra, ami ugyanazt az eredményt adja. Tegyünk is így. Az eredeti elrendezést 3db olyan $\frac{R}{3}$ -os ellenállásra cseréljük, amik a csillaghoz kapcsolódnak. Ezt az átalakítást hívják háromszög–csillagnak (vagy Δ-Y). Bebizonyítjuk, hogy ezek tényleg ekvivalensek.



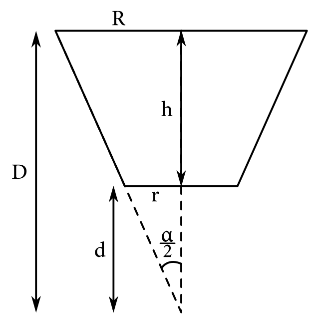
Ábra 11: *Módosított rendszer*

A végső rendszer tehát olyan ellenállásokból áll, amelyek sorosan, illetve párhuzamosan vannak kötve, így könnyedén kiszámolhatjuk a teljes eredő ellenállást:

$$R_\Sigma(R_x) = \frac{R}{3} + \frac{\frac{4}{3}R\left(\frac{R}{3} + R_x\right)}{\frac{5}{3}R + R_x}.$$

A függvény monoton a $[0; \infty]$ intervallumon, vagyis az eredeti megoldásunk helyes.

19 Az egyensúlyt akkor érjük el, amikor a bejövő és kimenő vízhozam megegyezik. A kimenő vízhozamat a Toricelli-egyenletből kaphatjuk: $Q = \sqrt{2hg}$, ahol h a vízoszlop magassága. Így már csak az elrendezés térfogatát kell kiszámítanunk.

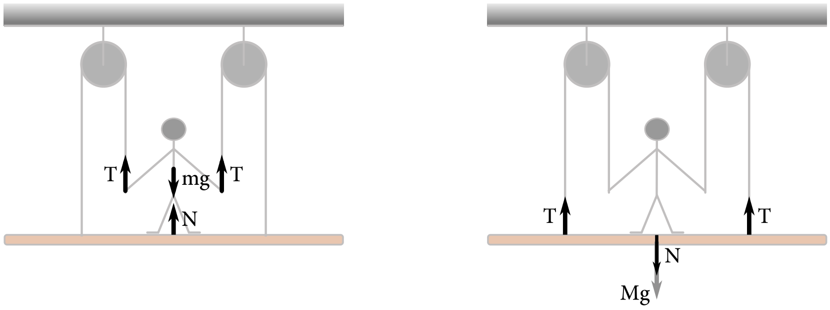


Ábra 12: *A tölcsér keresztmetszete*

A kisebb kúp alapjának sugara $r = 1$ mm, its heights is $d = 2$ mm. A nagyobb sugara pedig h-val magasabb: $D = d + h = 202$ mm, the big radius is $R = 101$ mm. Végül a víz térfogata: 2158 cm^3

20 Ha az erőember a köteleket elég nagy erővel húzza, felfele kezd elmozdulni. Mivel mi a stabil állapotban vagyunk érdekeltek, statikus problémával van dolgunk. Ilyen feladatokban a résztvevő erők részletes vizsgálata vezet helyes eredményhez. Az erőember minden kötélre T erővel hat.

Mivel minden kötelet és csigát ideálisnak tartunk, a T erő ugyanakkora hatást fog kifejteni a teljes kötélhosszon. Newton harmadik törvénye szerint a kötelek felfelé hatnak az erőemberre $2T$ erővel. Ezenkívül jelen van az erőember súlya: mg és a normál erő: N, ami a deszkától származik. A deszka $2T$ erővel van felemelve (kötelek), a súlya Mg és az erőember normál ereje is hat rá, lefele mutatva.



Ábra 13: *A rendszerben ható erők*

A rendszer egyensúlyban van, tehát az erők összege nullának kell lennie:

$$2T - mg + N = 0,$$

$$2T - Mg - N = 0.$$

Kivonva N-t és behelyettesítve a másik egyenletbe:

$$T = \frac{(m+M)\,g}{4},$$

21 A ρ fajlagos ellenállású, x hosszú és S keresztmetszetű tömb ellenállása $R = \rho\frac{x}{S}$. Világos, hogy tömb ellenállása akkor a legkisebb, amikor a lehető legnagyobb felület csatlakozik a vezető lapokhoz és a legrövidebb oldal határozza meg az azok közötti távolságot. Jelölje a legrövidebb oldalt a. Ez az oldalhossza a tömbből vágható legnagyobb kockának. Ennek ellenállása

$$R_\mathrm{k} = \rho\frac{a}{a^2} = \frac{\rho}{a}.$$

Vegyük észre, hogy mit kapunk ha összeszorozzuk a két legnagyobb ellenállást – $R_b = \rho\frac{b}{ac}$ and $R_c = \rho\frac{c}{ab}$ – és kiszámítjuk annak gyökét:

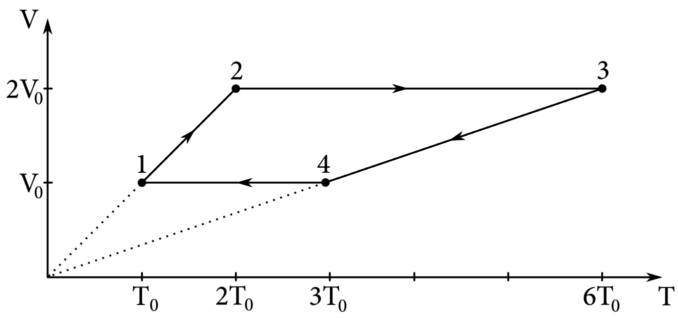
$$\sqrt{R_bR_c} = \sqrt{\rho\frac{b}{ac}\rho\frac{c}{ab}} = \rho\frac{1}{a} = \rho\frac{a}{a^2}.$$

Ez pontosan a lehető legynagyobb kocka ellenállása, ami kivágható. Felhasználva a számadatokat az eredmény $\sqrt{R_bR_c} = \sqrt{27\ \Omega\cdot 75\ \Omega} = 45\ \Omega$.

22 Mielőtt átrajzolnánk a pT diagrammot VT diagrammá, meg kell határoznunk, milyen termodinamikai folyamatok, térfogatok és hőmérsékletek vannak jelen az egyes lépéseknél. A $pV = NkT$ ideális gáz állapotegyenletét használjuk, ahol N a részecskék állandó száma.

Az első lépés $1 \to 2$ egy izobár folyamat, ahol a hőmérséklet kétszer olyan nagy lesz, így a térfogat is nő, $V_0 = \frac{NkT_0}{p_0}$-ról $2V_0$-ra. A második lépés $2 \to 3$ izokór folyamat, a nyomás és hőmérséklet közötti lineáris kapcsolat (a $\frac{p}{T} = \frac{Nk}{V}$ arány konstans) miatt. A nyomás háromszorosára nő, $6T_0$ és a térfogat $2V_0$ marad. A $3 \to 4$ folyamat izobár, és a $4 \to 1$ újra izokór. Így azt mondhatjuk, hogy a negyedik állapotban a térfogat V_0 és a hőmérséklet $3T_0$.

A VT ábra izobár része hasonló lesz az izokór részhez. A $\frac{V}{T} = \frac{Nk}{p}$ arány konstans marad, így egy lineáris függvény lesz, metszve az ábra origóját. Az újrarajzolt VT diagram így néz ki:



Ábra 14: *A körfolyamat megjelenése a VT diagramon*

23 Hooke törvénye alapján a rúd relatív megnyúlása $\varepsilon = \frac{F}{SE}$. A rúd relatív megnyúlása intenzív mennyiség, ezért az atomok közötti a távolságok relatív megnyúlása is az a rácsban. Meghatározhatjuk a kezdeti értékét a rúd sűrűsége alapján. A kérdéses kristálynak köbös rácsa van, azaz minden atomnak hat szomszédja van egy a élhosszúságú kocka felszínén. Ebben a kristályban az atomtömeg $\frac{M}{N_A}$, ahol N_A az Avogadro állandó. Innentől az anyagsűrűség kifejezhető a következő módon:

$$\rho = \frac{M}{N_A a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}}$$

és a horizontális kötések teljes megnyúlása:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}} \frac{F}{SE}.$$

24 A bal oldalon Irén a Hold fényességét $\frac{I_\mathrm{M}}{2}$-nek látja, ahol I_M a valódi fényessége a Holdnak, és a lámpát $r\frac{I_\mathrm{L}}{2}$ fényesnek látja, ahol r az ismeretlen mértékű visszavert fény. Ezen felül tudjuk még, hogy a bal oldali fényességek közötti összefüggés

$$\frac{I_\mathrm{M}}{2} = 6r\frac{I_\mathrm{L}}{2}.$$

Hasonló módon határozhatjuk meg a jobb oldali fényességek kapcsolatát, ami

$$\frac{I_\mathrm{L}}{2} = \frac{3}{2}r\frac{I_\mathrm{M}}{2}.$$

Mivel az $\frac{I_\mathrm{L}}{I_\mathrm{M}}$ arányra vagyunk kíváncsiak, csak el kell osztanunk a két fenti egyenletet egymással. Legyen az arány p. Vegyük észre, hogy az 50 %-ban átjutó fény információja teljesen fölösleges (minden foton pontosan egy üvegen megy keresztül), és hogy az ismeretlen r paraméter kiesik. Az egyenletek elosztása után kapott eredmény:

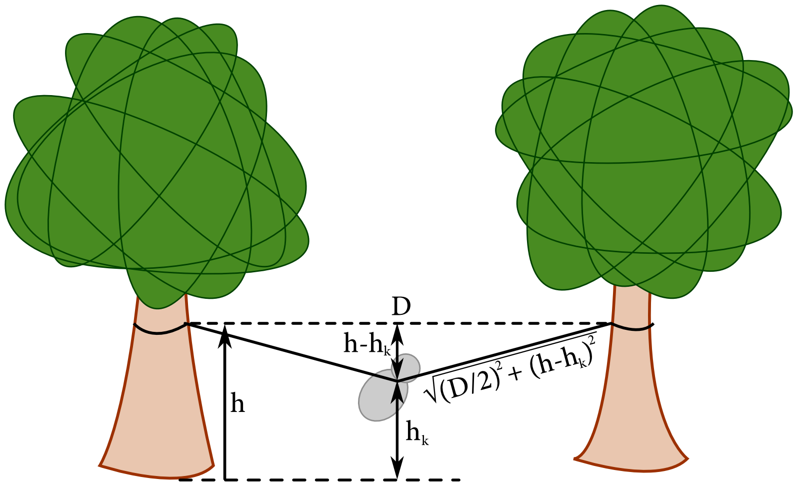
$$p = \frac{3}{12}\frac{1}{p}.$$

Ennek megoldása után a válasz a kérdésre:

$$p = \frac{1}{2}.$$

25 Az energiamegmaradás törvényét használva oldjuk meg a feladatot. Tegyük fel, hogy a kötél 2 rugóból áll. A rugó potenciális energiája $\frac{1}{2}k(\Delta L)^2$, ahol ΔL a rugó megnyúlása. Kezdetben a kötél hossza 0 volt. Amikor a két fa közé ki lett feszítve, mindkét rugó hossza $D/2$. Így a kezdeti potenciális energia $\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2$, és mindkét rugó potenciális energiája $\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2$.

A majom kezdeti potenciális energiája MgH. Legyen h_k az talajtól mért magasság, ahol a majom megáll a zuhanásban. Mivel a majom sebessége 0, kinetikus energiája 0. Potenciális energiája pedig Mgh_k. Az $Mg(H-h_k)$ energiát adjuk össze a rugók potenciális energiájával.



Ábra 15: *A majom a legalacsonyabb ponton van*

Geometriailag kiszámítható a rugók hossza, amikor a majom megáll $\sqrt{(h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}$. Most pedig felírhatjuk az energiamegmaradást egyenleteit a problémára.

$$Mg\,(H-h_k)+2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2=2\frac{1}{2}k\left(\sqrt{(h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}\right)^2,$$

$$Mg\,(H-h_k)+2\frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\right)^2=2\frac{1}{2}k\left((h-h_k)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right),$$

$$Mg\,(H-h_k)=k(h-h_k)^2.$$

A másodrendű egyenlet gyökei a következők:

$$h_k=h-\frac{Mg}{2k}\pm\frac{1}{2k}\sqrt{M^2g^2+4kMg(H-h)}.$$

Most pedig meg kell határoznunk, hogy az egyenlet melyik megoldásait értelmesek. Ezt a $H=h$ speciális esetre megoldással állapíthatjuk meg:

$$Mg\,(h-h_k)=k(h-h_k)^2\Rightarrow h_k=h-\frac{Mg}{k}.$$

Ebből következik, hogy a negatív gyök a helyes. Így a megoldás

$$h - \frac{Mg}{2k} - \sqrt{\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}(H-h)}$$

vagy

$$h - \frac{Mg}{2k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{Mg}(H-h)}\right).$$

26 Ebben a feladatban csupán ki kell számolnunk az összes tehetetlenségi nyomatékot és forgatónyomatékot. Mivel minden súly tömegpont, a teljes tehetetlenségi nyomatékot rögtön kiszámolhatjuk:

$$I = mr^2 + 2mr^2 + \ldots + 12mr^2 = 78mr^2.$$

Utána a forgatónyomatékokat kell kiszámolni:

$$N = \left(12\cdot 0 + 11\cdot\frac{1}{2} + 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\cdot 1 + 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 7\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot 0 - 5\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot 1 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\cdot\frac{1}{2}\right) mgr,$$

$$N = 6\left(2+\sqrt{3}\right) mgr.$$

Így a végeredmény: $\varepsilon = \frac{N}{I} = \frac{2+\sqrt{3}}{13}\frac{g}{r}$.

27 Egy forrás frekvenciája módosul, ha annak hozzánk viszonyított sebessége megváltozik. Ezt a Doppler-effektus írja le, amely szerint a frekvencia megváltozását a következőképpen számolhatjuk:

$$f' = \frac{c \pm v_r}{c \mp v_s} f,$$

ahol c a hangsebesség, w_r a megfigyelő sebessége, v_s pedig a forrás sebessége. Az előjelek attól függnek, hogy a forrás közeledik vagy távolodik a megfigyelőhöz képest. Ebben az esetben tudjuk, hogy amikor a repülő közelített, a frekvencia fél oktávval volt magasabb, tehát

$$\sqrt{2} f = \frac{c}{c-v} f,$$

ahol v a repülőgép sebessége. A kifejezés átrendezésével

$$v = \frac{2-\sqrt{2}}{2} c.$$

Ha a repülőgép távolodik a megfigyelőtől, az új frekvencia

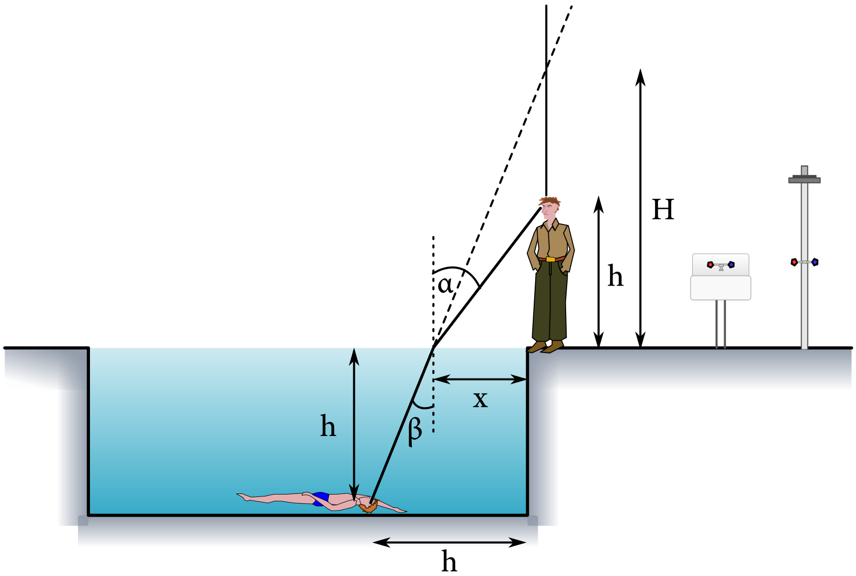
$$f' = \frac{c}{c+v} f;$$

a sebességet behelyettesítve a következőre jutunk:

$$f' = \frac{4+\sqrt{2}}{7} f.$$

28 Az egyetlen távolságot h-val jelöljük, és rajzolunk egy ábrát. Vegyünk egy sugarat, ami Ádám fejétől indul, és József szemeibe megy. A sugár iránya megtörik a medence szélétől x távolságban. Ádám látszólagos H magassága így egyszerűen meghatározható a háromszög egyenlőségekből:

$$H = h\frac{x}{h-x}.$$



Ábra 16: *A helyzet vázlata*

Ahhoz, hogy megtaláljuk x-et, a Snell-törvényt, vagy a Fermat elvet is használhatjuk

Snell-törvény

Írjuk fel a Snell-törvényt

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = n\frac{(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2+h^2}},$$

$$\frac{x^2}{x^2+h^2} = n^2\frac{(h-x)^2}{(h-x)^2+h^2},$$

$$\vdots$$

$$0 = (n^2-1)(2x^2h^2-2x^3h+x^4)+n^2(h^4-2xh^3).$$

Az egyenlet sajnos negyedrendű, így nagyon nehéz megoldani, de van rá mód, ha az ember nem fél egy kis matektól. Egyértelműen a legegyszerűbb módszer, amit az ember használhat a *bináris kereső algoritmus*. Először is, a fenti egyenletet átalakítjuk a következő függvénnyé: $f(x) = (n^2-1)(2x^2h^2-2x^3h+x^4)+n^2(h^4-2xh^3)$. Most vizsgáljuk meg, hogyan változik ennek a függvénynek az előjele egy intervallumon.

Ha az előjel változik egy intervallumon, akkor kell lennie benne egy zéruspontnak. [2] A stratégia abban rejlik, hogy addig rövidítjük az intervallumot, amíg meg nem találjuk a zérushelyet.

- Legelőször csak megsejtjük ezt az intervallumot $[l; r]$. A mi esetünkben ez egyszerű, mert a megoldásnak valahol 0 és $h = 2$ m között kell lennie.
- Most nézzük meg az eredmény előjelét az $\alpha = \frac{l+r}{2}$ pontban. Attól függően, hogy milyen előjelet találunk, az $\alpha = \frac{l+r}{2}$ felezőpontot újrahelyezzük vagy a bal véggel l, vagy a jobb véggel r.
- Addig ismételjük ezt a lépést, amíg az intervallum olyan kicsi, hogy a végeredmény nem változik az első tizedeshelyen.

Nehány lépés után az $x = 1{,}18$ m eredményre jutunk, ami a H értékét a 2,8 m és 3,0 m közötti intervallumba teszi (a részeredmények kerekítésétől függően).

Fermat elv

A Fermat elv szerint a fény olyan úton halad, ami a legrövidebb időt veszi igénybe. A mi esetünkben a következő út idejét akarjuk minimalizálni:

$$t(x) = \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n}{c}\sqrt{(h - x)^2 + x^2}.$$

Így a feladatunk az, hogy olyan x-et talájunk, ami minimalizálja az időt. Mivel x az $x \in [0\text{ m}; 2\text{ m}]$, intervallumon belül van, az időt tízszer kiszámolhatjuk az x 0,2 m-enkénti növelésével. Ezzel a módszerrel az $x = 1{,}18$ m eredményre jutunk, ami H-ra 2,8 m-től 3,0 m-ig terjedő eredményt ad.

29 A legkisebb fényfluxus, amelyet Johny felismer, az izzókörte információkból származtatható:

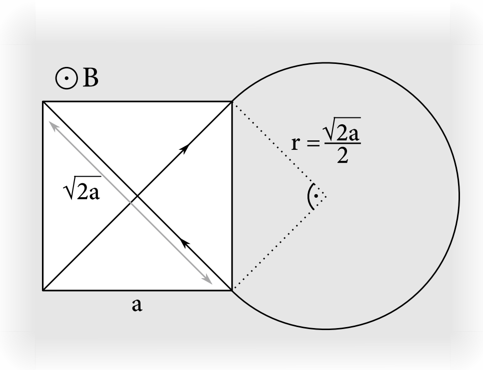
$$F_{\min} = \frac{0{,}04 \cdot 100\text{ W}}{4\pi\,(100\,000\text{ m})^2} = \frac{1}{\pi} \times 10^{-10}\text{ W m}^{-2}.$$

A napállandó $F_\odot$ kifejezi a nap energia fluxust $R_\oplus = 1$ AU $\doteq 1{,}5 \times 10^{11}$ m $\doteq 4{,}86 \times 10^{-6}$ pc távolságban. A látható fény sugárzásának ereje $0{,}36 \cdot F_\odot 4\pi R_\oplus^2$ és a Nap látható fényének fluxusa D távolságban $F = 0{,}36 \cdot F_\odot \frac{R_\oplus^2}{D^2}$. Olyan távolságot keresünk, amelynél a fluxus egyenlő lesz $F_{\min}$ értékkel. Egyszerű számítások szerint 19 pc.

30 Jól ismert, hogy a töltött részecskék körpályára állnak mágneses térben. A centripetális és mágneses erők egyensúlyából kiszámítható a pálya sugara $r = \frac{mv}{QB}$, ahol m jelöli a részecske tömegét és v a sebességét.

Az a oldalú négyzet átlói a pálya érintői kell, hogy legyenek, tehát a sugár $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

[2] Ez csak folytonos függvényekre igaz – egyetlen mozdulattal lerajzolható.



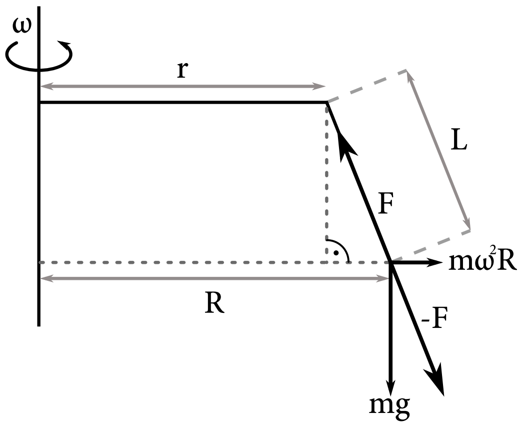
Ábra 17: *A részecske pályája*

A t idő kapcsolja össze a sebességét és az átló hosszát $\sqrt{2}a$: $v = \frac{\sqrt{2}a}{t}$. Behelyettesítve a sebességét a sugárra kapott kifejezésbe kapjuk

$$m = \frac{QBr}{v} = \frac{QB\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{t}} = \frac{QBt}{2}.$$

31 A lehető legnagyobb szögsebesség esetén a bolhának F maximális erővel kell hatnia, hogy a forgó rendszer erőit kompenzálja, pl. a gravitációs és a centrifugális erőt. Gyurinak egyensúlyban kell lennie, de a bolhával ellentétben ő a lánchoz rögzített. Ez a képen lévő képzeletbeli háromszögek hasonlóságát jelenti.

$$\frac{R-r}{L} = \frac{m\omega^2 R}{F}.$$



Ábra 18: *A bolhára ható erők*

Mivel a centrifugális és a gravitációs erők merőlegesek,

$$m\omega^2 R = \sqrt{F^2 - m^2g^2}.$$

Ezután minden R tagot eltüntethetünk az első egyenletből, amivel

$$\frac{\frac{\sqrt{F^2-m^2g^2}}{m\omega^2} - r}{L} = \frac{\sqrt{F^2 - m^2g^2}}{F}.$$

Egy kellemetlen, de elviekben nem nehéz művelet elvégzésével megkapjuk az eredményt:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g^2}}{r + L\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{F^2}}}}.$$

32 Hogy fenntartsuk az állandó sugárzásszintet, az elbomlott káliumatomokat pótolni kell. Tudjuk, hogy Rozalinda aktivitása $A = 10^8$ Bq, ami azt jelenti, hogy 10^8 darab ^{40}K káliumatom bomlik el másodpercenként. Ezeket banánfogyasztással kell pótolni. Minden banán $N = \frac{mN_A}{M_m}$ radioaktív káliumatomot tartalmaz, ahol $M_m \approx 40\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$ a ^{40}K moláris tömege.

Amikor a majom dinamikus egyensúlyba kerül, az elbomlott atomok száma egyenlő kell legyen a nyelt (érted) atomok számával, így $A \overset{!}{=} fN$ ahol f Rozalinda banánevési frekvenciája. Rozalinda banánevési sebessége $v = Lf = \frac{LAM_m}{mN_A}$, ahol $L = 20$ cm a banán hossza.

A számokat behelyettesítve arra jutunk, hogy Rozalinda szükséges banánevési sebessége $v \doteq 2{,}2 \times 10^{-11}$ m/s = 22 pm/s.

33 Köztudott, hogy a töltött lemez olyan $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ intenzitású, homogén elektromos teret hoz létre, melynek iránya a lemeztől elfelé mutat. Azonban, az azonos töltésű, két párhuzamos lemez elektromos tere kiejti egymást, vagyis összességében a protonokra ható elektroszatikus erő 0. Tehát a protonok bizonyos idő elteltével a lemezek közötti tér összes pontját elérhetik.

34 Először idézzük fel a hangintenzitásnak és annak szintjeinek defincióját. Az intenzitás képlete $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, ahol P a forrás teljesítménye és r a forrástól való távolság. A hangintenzitás szintje $L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$, ahol I_0 a referencia intenzitás. Mit jelent ez?

Amikor fülhallgatóval hallhatja a zenét, a jobb fül csak a jobb fülhallgatót és a bal fül csak a bal fülhallgatót hallja. Ha a jobb fülhallgató feljebb van állítva, az nincs hatással arra, amit a bal fül hall. Ebben az esetben +3 dB növelésre van szüksége a jobb oldalon. Ezzel a jobb oldal intenzitása $10^{\frac{3}{10}}$ faktorral növekszik. Ekkor a jobb oldali fülbe menő hang egy $k = 10^{-\frac{3}{10}} \doteq 0{,}5$ faktorral módosul.

A helyet bonyolultabbá válik, ha hangszórót használ, mert mindkét fül hallja mindkét hangszóró hangját. Ebben az esetben Martinnak +13 dB korrekció kell a jobb oldalon, amely alapján a jobb és a bal oldal intenzitásaránya $q = 10^{\frac{13}{10}}$. Jelölje a hangszórók közötti távolságot $2L$, Martin két füle közti távolság $2x = 15$ cm, így az egyes fülek által hallott intenzitások:

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{P}{4\pi (L-x)^2} + \frac{qP}{4\pi (L+x)^2}, I_{\mathrm{R}} \quad = k\left(\frac{P}{4\pi (L+x)^2} + \frac{qP}{4\pi (L-x)^2}\right).$$

Ám a feladat szövege szerint mindkét fül hallja ugyanazzal az intenzitással a hangot. Ezért kvadratikus egyenletbe írjuk át a fentieket: L:

$$\frac{P - kqP}{4\pi (L-x)^2} = \frac{kP - qP}{4\pi (L+x)^2}, \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}} \quad = \frac{L+x}{L-x}, L = x\frac{1 + \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}}{1 - \sqrt{\frac{1-kq}{k-q}}}, L \quad = x\frac{k - q + 1 - kq + 2\sqrt{(1-kq)(k-q)}}{k - q - 1 + kq}.$$

Az értékek behelyettesítésével megkapjuk a hangszórók közötti távolságot: $2L \doteq 79$ cm.

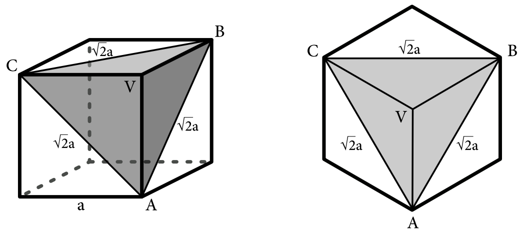
35 Jelölje a műhold élét a. Ahogy a feladat szövege írja, a műholdat tökéletesen fekete testnek tekinthetjük. Ez azt jelenti, hogy a felületre eső összes sugárzás elnyelődik, a visszasugárzás pedig a Stefan-Boltzmann törvényt követi. Vagyis az elektromágneses sugárzási teljesítmény arányos a műhold felületével és a hőmérsékletének negyedik hatványával.

A termikus egyensúly beálltához az elnyelési és a sugárzási teljesítménynek egyenlőnek kell lennie. A sugárzási teljesítmény független a irányítottságától, mivel a test tökéletesen vezet és állandó a teljes felülete. Ezért a sugárzási teljesítmény kifejezhető $\sigma 6a^2T^4$ alakban, ahol σ a Stefan-Boltzmann állandó és T a műhold felületi hőmérséklete.

Mivel a sugárzási teljestmény állandó, az egyensúlyt kizárólag a bejövő sugárzás mértéke határozza meg. Az abszorpciós teljesítmény az S effektív felülettel lesz arányos. Az egyensúlyi hőmérséklet könnyen megtalálható a sugárzási és az elnyelési teljesítmény egyenlősége alapján. Legyen F a napsugárzás fluxusa[3], ekkor

$$FS = \sigma 6a^2T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{FS}{\sigma 6a^2}}.$$

A minimális effektív keresztmetszet úgy érhető el, hogy a kocka alakú műhold oldalát közvetlenül a Nap felé fordítjuk, ekkor a keresztmetszet a^2.



Ábra 19: *A kocka a legnagyobb felületével a Nap felé fordulva*

A lehetséges legnagyobb keresztmetszetet úgy érhetjük el, hogy az egyik testátlót irányítjuk a Nap felé. Más szóval, az A, B és C pontok által definiált sík merőleges az előbb említett egyenesre. A Naptól nézve így a műhold szabályos hatszögnek látszik, egy beleírt szabályos, $\sqrt{2}a$ oldalú ABC háromszöggel.

A szabályos hatszög területe egyenlő a beírt egyenlő oldalú háromszög területének kétszeresével (lásd a képet). Alapvető geometriával a háromszög magassága kiszámítható: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a$. Ebből a hatszög területe $\sqrt{3}a^2$.

A minimális és a maximális elérhető hőmérsékletek innen

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{Fa^2}{\sigma 6a^2}},$$

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{F\sqrt{3}a^2}{\sigma 6a^2}}.$$

Ebből az arány

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \sqrt[8]{3}.$$

[3] sugárzási teljesítmény/felületegység

A note about the cross section of a cube

A meticulous reader might have been curious whether there is a proof that the cross section of a cube is minimal when it is inclined with its face and maximal when its body diagonal points to the Sun.

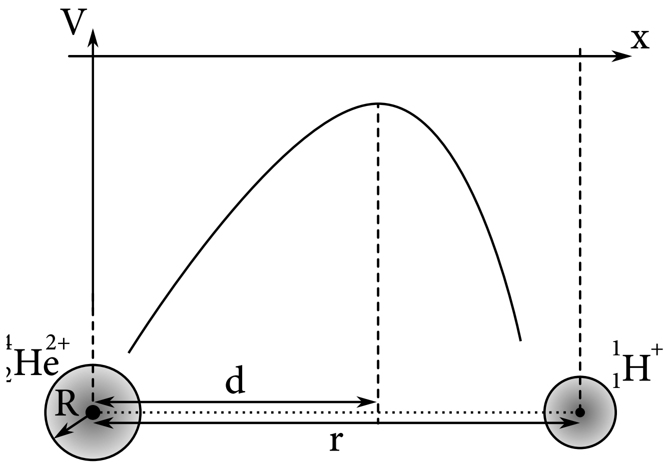
A projection of a cube face – i.e. square – of unit size can be expressed as dot product of unit normal vector and unit vector determined by direction of projecting. From any direction can we see at most three faces of the cube, normal vectors of which are perpendicular to each other (denote them $\hat{x}$, $\hat{y}$ and $\hat{z}$). A total area of projection when looking from general direction (x, y, z) would be a sum of projection areas of individual faces

$$(|x|, |y|, |z|) \cdot (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = |x| + |y| + |z|.$$

A symetry of the cube implies that one needs to consider only one octant, e.g. the first one (so that $x, y, z > 0$). Therefore, the original problem can be transformed to the problem of function extreme finding. In our case, we need to find minimum and maximum of the function $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ with respect to the aditional condition $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, as a norm of the vector (x, y, z) is 1. The considered function reaches

-minimum if one of the vector coordinates is 1 and the remaining two coordinates equal to 0 what correspond to the projection axis perpendicular to a cube face -maximum if $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ what correspond to the projection in direction of a body diagonal.

$\boxed{\textbf{36}}$ A hélium mag körül az elenktron egy potenciálgödörben van. Egy másik potenciálgödör a proton közelében van. Azt a minimális energiát akarjuk kiszámítani, ami ahhoz szükséges, hogy az elektron ki tudjon szabadulni a hélium potenciálgödréből, hogy áttörjön a két potenciálgödrön.



Ábra 20: *A potenciál görbe*

Először ki kell számolnunk a potenciál határ maximumát d. Amikor az elektron ezt eleéri a rá ható erők eredője 0, tehát a hélium elektrosztatikus ereje és a proton elektroszatikus ereje egyensúlyt tart. Matematikailag:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(r-d)^2}.$$

Ebből kapjuk a maximumot:

$$d = \left(2 - \sqrt{2}\right) r.$$

Ezután kapunk a proton és hélium mag között egy potenciál függvényt. Legyen x a hélium magtól vett távolság. A szuperpozíció elvét alkalmazva:

$$V(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e}{x} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r-x} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r-x}{x(r-x)}.$$

Végül, kiszámítjuk az energiát, amire az elektronnak szüksége van, ahhoz, hogy elszabaduljon a hélium magtól. Ezt az elektron határon vet potenciális energiájának és a hélium magnál vett potenciális energia különbségeként kaphatjuk meg.

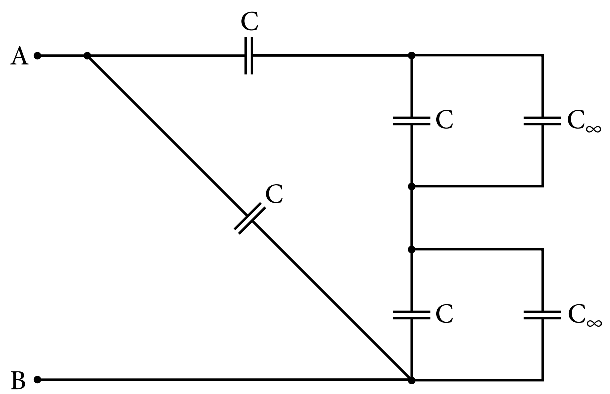
$$E = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2r-R}{R(r-R)} - \frac{\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)r}\right).$$

Felhsználva, hogy $r = 11R$ kapjuk, hogy:

$$E = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{201-20\sqrt{2}}{110R}\right).$$

$\boxed{37}$ Végtelen mennyiségű ellenállással dolgozni végtelen sok munkának tűnhet, de rá kell csak néhány dologra kell rájönnünk, hogy nagyban leegyszerűsödjön a probléma. Elöször is, Martin ugyanazokat a 4 kondenzátorból összerakott komponenseket adja hozzá a rendszerhez újra és újra. Másodjára pedig észre kell vennünk, hogy Martin végtelen rendszerét, két végtelen rendszer összegekapcsolásaként kaphatjuk. Milyen gyönyörű végtelenek! Ha nincs meg, akkor gondolkodj még egy kicsit és lehet, hogy rájössz.

Jelölje a rendszer teljes kapacitását C_∞. A rednszert a következőképpen rajzolhatjuk le:



Ábra 21: *Vázlatos rajz*

Ez csupán párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok sorozata. Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok kapacitása pedig összegződik. Sorosan kapcsolt kondenzátorok esetén a kapacitások reciprokösszegét kell képezni. A következő egyenletet kapjuk

$$C_\infty = \frac{C^2 + CC_\infty}{3C + C_\infty} + C.$$

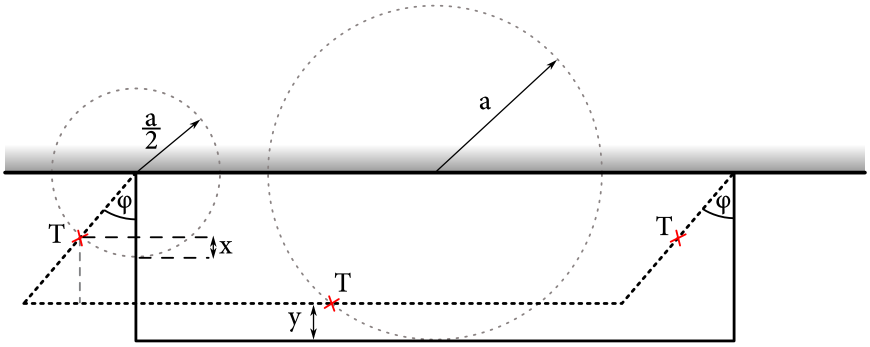
Ez egy másodfokú egyenlet megoldásához vetet, amit kielégít

$$C_\infty = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 16C^2}}{2}.$$

Mivel a kapacitás nem lehet negatív, a helyes válasz a következő

$$C_\infty = \frac{\sqrt{17}-1}{2}C.$$

38 Mivel a kis rezgési periódusra vagyunk kíváncsiak, a keret mindegyik részének a tömegközéppontjával kell leírni a mozgását. A rövid, a hosszú rudak a falra rögzített pontjuk körül forgómozgást fognak végezni. Más szóval, a tömegközéppontjuk körmozgást végez $\frac{a}{2}$ sugárral. A hosszabb, b hosszú rúd esetében a tömegközéppont a sugárú körön mozog, ahogy az alábbi ábra szemlélteti.



Ábra 22: *A φ szög igen nagy, az ábrázolás kedvéért.*

A megoldás egyik módja, ha kiszámoljuk az összes erőt és forgatónyomatékot, de ez hosszadalmas, és unalmas. Egy másik, érdekesebb módszer, ha az energiákat használjuk. Kezdjük a mozgási energiával. Általánosan, egy l hosszú rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontjához képest $\frac{1}{3}ml^2$, így a mozgási energiája:

$$E_{kin}^a = \frac{1}{2}I_a\omega^2 = \frac{1}{6}\lambda a^3\omega^2,$$

ahol ω egy szögsebesség. A hosszabb rúd mozgását túl bonyolult lenne kiszámolni, de ha észrevesszük, hogy a hosszabb rúd minden pontja azonos sebességgel mozog, ami nem más, mint a rövid rudak végeinek szögsebessége, akkor a hosszú rúd mozgási energiáját így írhajtuk fel:

$$E_{kin}^b = \frac{1}{2}m_b v^2 = \frac{1}{2}\lambda b a^2\omega^2,$$

így a keret teljes mozgási energiája a következő:

$$E_{kin} = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)\lambda a^2\omega^2.$$

Most számoljuk ki a potenciális energia megváltozását, ha φ szöggel kitérítjük. A rövid rudak tömegközéppontja $x = \frac{a}{2}(1-\cos\varphi)$-vel emelkedik meg, a hosszúé pedig $y = a\,(1-\cos\varphi)$-vel. A teljes potenciális energiaváltozás ekkor

$$E_{pot} = 2\lambda a\, gx + \lambda b g y = \lambda a(a+b)g(1-\cos\varphi).$$

Kis rezgéseknél a potenciális energiának négyzetesen kell függenie a kitérítéstől - így egyszerű mozgásegyenletekre jutunk. A minimum körül Taylor-sorba fejtve könnyen kicserélhetjük a $1-\cos\varphi$ tagot $\frac{\varphi^2}{2}$-re. Így a potenciális energiára kapott eredmény:

$$E_{pot} \approx \lambda a(a+b)g\frac{\varphi^2}{2}.$$

Mostmár felépíthetjük a mozgásegyenletet, megoldhatjuk, és megkapjuk a keresett periódusidőt. De ennél létezik egy egyszerűbb megoldás, ugyanis a feladat a klasszikus oszcillátor analógiája. A klasszikus oszcillátor energiái $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$, és a kis rezgések periódusideje $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Erre az analógiára építve, megfeleltethetjük a mi értékeinket m-nek és k-nak, és a periódusidő egyszerűen kiszámítható. A végeredmény:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\lambda a^2}{\frac{1}{2}\lambda a\left(a+b\right)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}a+b\right)a}{\left(a+b\right)g}}.$$

39 Vegyünk egy M tömegű bolygót amely holdjának tömege $m = \frac{M}{10}$ és távolsága R. Ezen objektumok nem tér el nagyságrendekkel, tehát közös tömegközéppont körül keringenek.

Először is számítsuk ki ezen objektumok távolságát a tömegközépponttól. Jelölje a hold távolságát a tömegközépponttól r. Ekkor

$$r = \frac{M}{M+m}R, \quad R-r = \frac{m}{M+m}R.$$

Ezután számítsuk ki az égitestek sebességét. A centripetális erő és a gravitációs erő egyensúlyából a holdon kapjuk

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_0^2}{r} \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{G}{R\left(M+m\right)}}M.$$

Ugyanezt a bolygóra alkalmazva

$$G\frac{Mm}{R^2} = M\frac{V_0^2}{R-r} \qquad \longrightarrow \qquad V_0 = \sqrt{\frac{G}{R\left(M+m\right)}}m.$$

Hirtelen Gandalf megváltoztatta a bolgyó tömegét, mialatt a sebességük változatlan maradt. Így tehát van egy M' tömegű bolygó ami V_0 sebességgel mozog, valamint egy m tömegű holdja, ami az ellentétes irányba v_0 sebességgel mozog. A rendszer energiája ekkor

$$E = \frac{1}{2}M'V_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M'm}{R} = \frac{1}{2}M'\frac{Gm^2}{R\left(M+m\right)} + \frac{1}{2}m\frac{GM^2}{R\left(M+m\right)} - G\frac{M'm}{R}.$$

Tekintsük a teljes rendszert. Mivel nem hatnak külső erők, a rendszer impulzusa megmarad. Ebből következik, hogy a rendszer tömegközéppontjának sebessége állandó marad. Számítsuk ki ezt a sebességet

$$v_T = \frac{mv_0 - M'V_0}{M'+m} = \sqrt{\frac{G}{R\left(M+m\right)}}\frac{m\left(M-M'\right)}{M'+m}.$$

Mi a feltétele annak, hogy a hold elszakadjon a bolygó gravitációs teréből? Általában, ha egy álló boylgót vizsgálunk, akkor azt követeljük meg, hogy a holdjának mozgási energiája a végtelenben 0 legyen. Ellenben most egy mozgó bolgyónk vagy és ha a holdja megállna a végtelenben, akkor rendszer potenciális energiájának változnia kéne a mozgás miatt, ebből következik, hogy a hold megállása nem követné az energiaminimum elvét és így a hold újra gyorsulni kezdene. A helyes feltétel az lenne, ha megkövetelnénk, hogy a bolygó és a hold potenciális energiája is 0 legyen a végtelenben. A végtelenben a potenciális energia 0 tehát a rendszernek csak kinetikus energiája van. Ellenben tudjuk, hgy a tömegközéppont sebessége nem változhat, így a rendszer energiája a végtelenben:

$$E = \frac{1}{2}\left(M' + m\right) v_T^2 = \frac{Gm^2\left(M - M'\right)^2}{2R\left(M + m\right)\left(M' + m\right)}.$$

Az energia-megmaradásból kapjuk

$$\frac{1}{2}M'\frac{Gm^2}{R\left(M+m\right)} + \frac{1}{2}m\frac{GM^2}{R\left(M+m\right)} - G\frac{M'm}{R} = \frac{Gm^2\left(M - M'\right)^2}{2R\left(M + m\right)\left(M' + m\right)}.$$

Ami arra az eredményre vezet, hogy

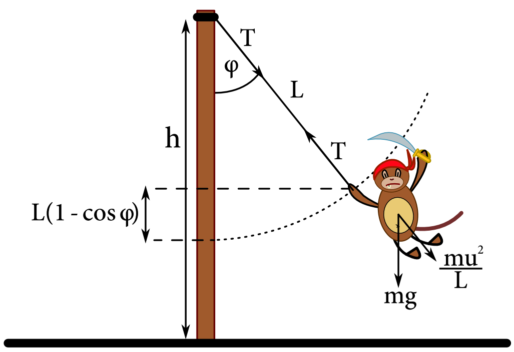
$$M' = \frac{M - m}{2}.$$

Így $m = \frac{M}{10}$, végül azt kapjuk, hogy

$$M' = \frac{9}{20}M.$$

40 Vegyük elsőnek az árbocra ható erőt, ami azt elforgatni igyekszik. Ahol a kötél az árbochoz csatlakozik, T feszültség hat. Ezen erőnek minden pillanatban kompenzálnia kell Jani $mg\cos\varphi$ súlyát és a mu^2/L centrifugális erőt, mivel Jani L sugarú kör mentén mozog. Jelen esetben u Jani tényleges sebessége. Eképpen:

$$T = mg\cos\varphi + \frac{mu^2}{L}.$$



Ábra 23: *Az erők vázlatos szemléltetése*

Az u sebesség az energiamegmaradás törvényével határozható meg. Legyen a potenciális energia nullszintje az, amit a szabad kötél elérne. Ha Jani φ szöggel leng ki, potenciális energiája $mgL\left(1 - \cos\varphi\right)$ -vel nő. Kezdetben Janinak 0 potenciális és $mv^2/2$ nemnulla mozgási energiája volt. Az energiamegmaradásból következik:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgL\left(1 - \cos\varphi\right),$$

$$mu^2 = mv^2 - 2mgL\left(1 - \cos\varphi\right),$$

Az árbocra ható forgatónyomaték, a φ szög függvényében

$$M(\varphi) = Th\sin\varphi = h\left(mg\cos\varphi + \frac{mv^2 - 2mgL\left(1 - \cos\varphi\right)}{L}\right)\sin\varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L}\left(mgL\cos\varphi + mv^2 - 2mgL\left(1 - \cos\varphi\right)\right)\sin\varphi,$$

$$M(\varphi) = \frac{h}{L}\left(mv^2 - 2mgL + 3mgL\cos\varphi\right)\sin\varphi.$$

A függvény maximumát deriválással kaphatjuk meg.

$$\frac{\mathrm{d}M(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi + 3mgL\left(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right),$$

A $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ trigonometrikus azonnság segítségével, a deriválás átírható úgy, hogy $\cos\varphi$ -ket tartalmazzon:

$$\frac{\mathrm{d}M(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi + 3mgL\left(-1 + 2\cos^2\varphi\right)\right),$$

A maximum esetében a derivált 0, így tehát egy $\cos\varphi$ -re másodfokú egyenletet kell megoldanunk

$$\frac{h}{L}\left(\left(mv^2 - 2mgL\right)\cos\varphi - 3mgL + 6mgL\cos^2\varphi\right) = 0,$$

$$\left(v^2 - 2gL\right)\cos\varphi - 3gL + 6gL\cos^2\varphi = 0.$$

Ezt megoldván két lehetséges megoldást kapunk:

$$\cos\varphi = -\frac{v^2 - 2gL}{12gL}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right).$$

Mivel tudjuk, hogy Jani nem mozgott akkora sebességgel, hogy az árboc tetejénél magasabbra lendüljön, $v^2 < 2gL$. Az eredmény így írható tehát:

$$\cos\varphi = \frac{2gL - v^2}{12gL}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right).$$

Két megoldást kaptunk. A helyes (a fizikai világot leíró) megoldást úgy választhatjuk ki, ha kihasználjuk, hogy a második derivált negatív kell, hogy legyen, ha az első nulla volt. Ezt követően a negatív előjelűt választjuk ki.

Vagyis az árboc alja akkor a legterheltebb, amikor a szög

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2gL - v^2}{12gL}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2 - 2gL}\right)^2}\right)\right).$$

Az eredmény ebbe az alakba is átírható:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2gL - v^2}{12gL} + \sqrt{\left(\frac{2gL - v^2}{12gL}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{2gL - v^2}{12gL}}\right).$$

Válaszok

1 Gyuri bátyja a gyorsabb és Misi bátyját 10 690 nanopuerperiával veri meg. Az eredményeket [10 401; 10 827] nanopuerperia tartományban fogadd el!

2 32 %

3 36 m

4 $\frac{\rho_i a^3}{\rho_w \pi R^2}$

5 $a + \frac{F}{m}$

6 7 Ω, 12 Ω a 15 Ω. *Csak akkor fogadható el, ha mindhárom ellenállás jó.*

7 5570 km

8 $10{,}24\, g = \frac{256}{25}\, g$

9 45°

10 $20\sqrt{3}\ \mathrm{ms}^{-1} \doteq 35\ \mathrm{ms}^{-1}$

11 $\frac{a}{2f}$

12 1764 m

13 0,2 kg

14 $\frac{5\pi}{3\pi+4}$ cm $\doteq$ 1,17 cm

15 $\frac{k_A}{k_A+k_B} n_0$

16 $d \sin\left(\arctan\left(\frac{w}{v}\right)\right) = d\frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$

17 14 m

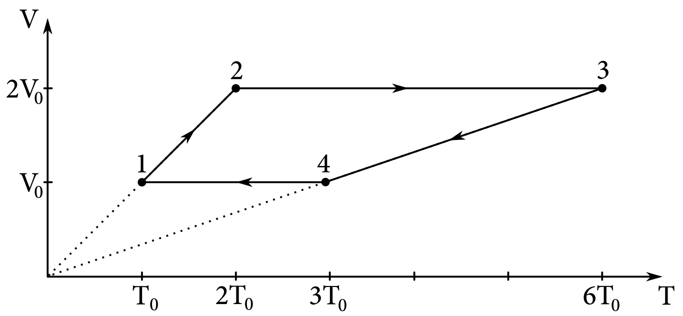
18 A rendszer ellenállása $\left[\frac{3}{5}R; \frac{5}{3}R\right]$ közötti értéket vehet fel.

19 2158 cm^3, *also accept* 2284 cm^3 *which can be obtained if* $g = 9{,}81\ \text{ms}^{-2}$ *is used.*

20 $\frac{(m+M)g}{4}$

21 45 Ω

22 *Figyelj rá, hogy az ábrákon legyenek feltüntetve a fontos értékek, a folyamat irányát jelzõ nyilak a megfelelõ irányba mutassanak, és hogy az izobárok egyenes vonalakon legyenek, az eredetüket tartalmazva.*



23 $\sqrt[3]{\frac{M}{N_A\rho}\frac{F}{SE}}$

24 $\frac{1}{2}$

25 $h - \frac{Mg}{2k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{Mg}(H-h)}\right) = h - \frac{Mg}{2k} - \sqrt{\left(\frac{Mg}{2k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}(H-h)}$

26 $\frac{2+\sqrt{3}}{13}\frac{g}{r} \doteq 0{,}287\frac{g}{r}$

27 $\frac{4+\sqrt{2}}{7}f = \frac{2}{4-\sqrt{2}}f \doteq 0{,}77\,f$

28 *Fogadd el a válaszokat a* 2,8 – 3,0 m *tartományban.*

29 19 pc

30 $\frac{QBt}{2}$

31 $\sqrt{\frac{F}{m}\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}{rF+L\sqrt{F^2-m^2g^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}{r+L\sqrt{1-\frac{m^2g^2}{F^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{r}{\sqrt{\frac{F^2}{m^2}-g^2}}+\frac{mL}{F}}}$

32 22 pm/s = $2{,}2 \times 10^{-11}$ m/s

33 A lemezek közötti teljes területet.

34 79 cm

35 $\sqrt[8]{3}$

36 $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{201-20\sqrt{2}}{110R}\right) \doteq 0{,}125\frac{e^2}{\varepsilon_0 R} \doteq \frac{3{,}62\times 10^{-28}\ \mathrm{J}}{R} \doteq \frac{2{,}26\ \mathrm{neV}}{R}$

37 $\left(\sqrt{\frac{17}{4}}-\frac{1}{2}\right)C \doteq 1{,}56\ C$

38 $2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\lambda a^2}{\frac{1}{2}\lambda a(a+b)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}a+b\right)a}{(a+b)g}}$

39 $\frac{9}{20}M$

40 $\arccos\left(\frac{2gL-v^2}{12gL}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{12gL}{v^2-2gL}\right)^2}\right)\right) = \arccos\left(\frac{2gL-v^2}{12gL}+\sqrt{\left(\frac{v^2-2gL}{12gL}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)$