Vážení čitatelia,

v rukách držíte zbierku úloh 19. ročníka Fyzikálneho Náboja. V zbierke sa nachádzajú všetky úlohy, s akými ste sa v roku 2016 mohli na súťaži stretnúť. K úlohám prikladáme aj vzorové riešenia, z ktorých sa môžete mnohé naučiť. Ak by ste danému vzorovému riešeniu nerozumeli, neváhajte sa nám ozvať, všetko objasníme.

Fyzikálny Náboj po minulom roku pokračuje vo svojej medzinárodnej tradícii. V roku 2016 sa do Náboja zapojili okrem Bratislavy takisto mestá Praha, Budapešť a Gdańsk. Výsledky vzájomného súboja si môžete prečítať na našich stránkach.

Táto zbierka by nikdy nevznikla bez výraznej pomoci mnohých ľudí, ktorí sa koniec koncov podieľali na celom vývoji Fyzikálneho Náboja. Všetci sme študentmi Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského a väčšina z nás sa aj aktívne podieľa na organizovaní Fyzikálneho korešpondenčného seminára (FKS).

FKS je korešpondenčný typ fyzikálnej súťaže. Zhruba raz za mesiac zverejňujeme rôzne zaujímavé fyzikálne úlohy, ktorých riešenia nám posielate do určených termínov. My vám za to dávame adekvátne body a tých najlepších pozývame koncom zimného a letného polroka na týždňové zážitkové sústredenie. Viac informácií nájdete na stránke `https://fks.sk/`*.*

Za silnú finančnú pomoc ďakujeme firme ESET a za medzinárodnú spoluprácu lokálnym organizátorom: Daniel Dupkala (za Prahu), Ágnes Kis-Tóth (za Budapešť) a Kacper Kubara (za Gdańsk). V mene celého organizačného tímu veríme, že ste si v roku 2016 Fyzikálny Náboj užili a dúfame, že vás všetkých uvidíme aj o rok! Či už v roli súťažiacich, alebo organizátorov (v prípade, že už budete vysokoškolákmi).

Jakub Bahyl

Hlavný organizátor

Zbierku zostavili:

Matej Badin	matob@fks.sk
Martin 'Kvík' Baláž	kvik@fks.sk
Dušan Kavický	dusan@fks.sk
Justína 'Plyš' Nováková	plys@fks.sk
Mária Šišovská	majka@fks.sk
Jaroslav Valovčan	jaro@fks.sk

Adresa:

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Výsledky súťaže, archív úloh a ďalšie informácie nájdete na stránke `http://physics.naboj.org`.

Zadania

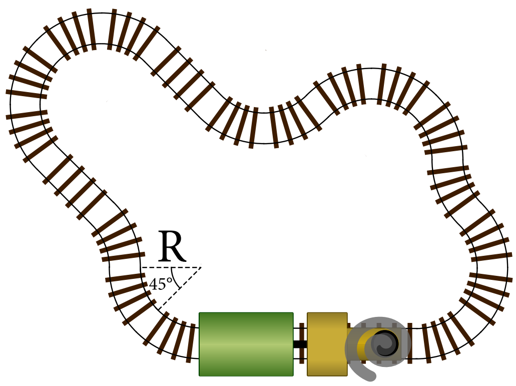
1 Vĺčik Andrej má chuť na ovečky v košiari. Okrem ovečiek je však v košiari priviazaný aj obrovský pastiersky pes Braňo. K nemu si Andrej netrúfne, takže vnútri sú ovečky v bezpečí. Lenže ovečky sú tak trochu svine. Keď starý senilný bača občas zabudne vrátka zavrieť, rady chodia vlka provokovať až k blízkemu lesu za lúkou dlhou L.

Na akú najmenšiu vzdialenosť sa môžu k lesu priblížiť, aby určite stihli bezpečne utiecť naspäť do košiara, keď Andrej náhle vybehne spomedzi stromov? Andrej vie utekať rýchlosťou v a ovečky rýchlosťou $w < v$. Môžete predpokladať, že ovečky nie sú hlúpe a lacno sa zožrať nenechajú.

2 Stojím pred dvomi rovinnými zrkadlami zvierajúcimi uhol $360°/N$ ($N \in \mathbb{N}, N \geq 2$). Koľkokrát sa vidím?

3 Máme zápalný knôt dĺžky L, ktorý zhorí za čas t. Položíme ho na zem tak, aby sa sám seba dotkol práve raz. Ako najrýchlejšie ho dokážeme spáliť, ak ho smieme zapáliť iba na jednom z koncov?

4 Tinka dostala drevený vláčik a koľajnice s rozchodom d. Od samej radosti si postavila takúto trať:



O koľko dlhšiu dráhu prejdú pravé kolieska oproti ľavým, keď vláčik prejde jeden celý okruh?

5 Motorový vozíček stúpa rýchlosťou v do kopca so sklonom α. S akým zrýchlením sa bude pohybovať dolu tým istým kopcom?

6 Kaťa hodila zvislo nahor dve vajíčka rýchlosťou v, pričom medzi hodmi uplynul čas t. V akej výške sa zrazia?

7 Janíčko vyniesol z temných hlbín matfyzáckych laboratórií obrovský laser a s diabolským rehotom sa ním pokúša rozrezať Mesiac... našťastie matfyz nie je armádny sklad a Janíčkov laser na povrchu Mesiaca necháva iba malú červenú bodku.

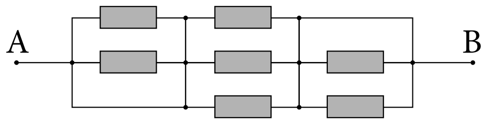
Keď Janíčko zbadal, že jeho úsilie je zbytočné, miesto mesačných vnútorností ho začalo zaujímať, akou rýchlosťou sa svetelná bodka lasera pohybuje po povrchu Mesiaca. Mesiac je vzdialený $d = 400\ 000\,\mathrm{km}$ a Janíčko dokáže laserom švihať uhlovou rýchlosťou $\omega = 720\,°/\mathrm{s}$.

Výsledok vyjadrite ako násobok rýchlosti svetla.

8 Trpaslíci vykopali popod Zem rovný tunel ústiaci na druhej strane Zeme, ktorého dno je dlhé 10 km. Po prudkej prívalovej búrke zistili, že vo vzdialenosti 2 km od vchodu je zatopený. Nasadli preto na čln, aby zistili, aké škody búrka napáchala. Zistili, že v strede tunela dosiahla hladina vody akurát po strop a na druhú stranu sa nedostanú. Aký vysoký je tunel?

9 Keď Mojžiš viedol svoj národ do „zeme zasľúbenej", roztvoril vody Červeného mora. Akú prácu pri tom vykonal, ak museli Izraeliti prejsť úžinu dlhú 12 km, Červené more malo v mieste prechodu priemernú hĺbku 40 m a vody sa rozostúpili na vzdialenosť 10 m?

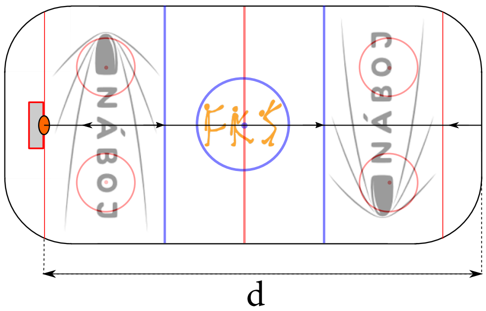
10 Pri upratovaní FKS miestnosti sme našli starú krabicu plnú rezistorov a dokonalých vodičov. Postavili sme si z nich odporovú sieť ako na obrázku. Aký je odpor medzi bodmi A a B, ak odpor jedného rezistora je R?



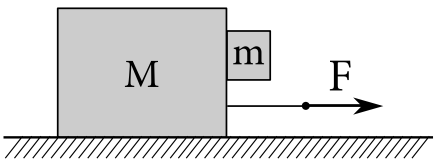
11 Maťo by rád predbehol kamión dlhý d metrov, ktorý sa pred ním plazí stálou rýchlosťou v. Maťovo auto je dlhé h a pred aj po predbiehaní si musí nechať rezervu aspoň k metrov. Ako ďaleko dopredu musí vidieť, či oproti nejde iné auto, ak pri predbiehaní nesmie nikto prekročiť rýchlostný limit w?

12 Žaba s hmotnosťou 100 g si sadla na okraj pohára. Pohár má tvar zrezaného kužeľa s horným polomerom 5 cm, dolným polomerom 3 cm a jeho hmotnosť je 75 g. Aký najmenší objem vody s hustotou $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ musíme naliať do pohára, aby sa pod žabou neprevrátil?

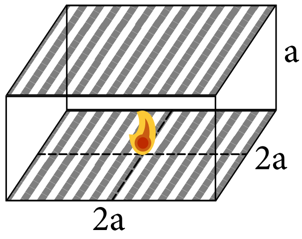
13 Brankár Jakub stojí vo svojej bránke a trénuje rozohrávku puku hokejkou. Puk vystrelí na protiľahlý mantinel, ten sa od neho odrazí a doputuje presne do stredu jeho bránky. Odraz od mantinelu nie je dokonale pružný, pomer kinetickej energie puku po a pred odrazom je p. Súčiniteľ šmykového trenia medzi pukom a ľadom je f. Akou rýchlosťou musí Jakub vystreliť puk, aby zastal práve na bránkovej čiare, na ktorej stojí on? Vzdialenosť bránky od protiľahlého mantinelu je d.



14 Kúzelníci Žaba a Jano si pripravili nový trik, „levitujúcu kocku". Na začiatku položili na ľad veľkú kocku s hmotnosťou M, k nej priložili „levitujúcu" kocku s hmotnosťou m, a ihneď začali ťahať za lano pripevnené k veľkej kocke ako na obrázku. Akou minimálnou silou F musia ťahať, aby sa im trik vydaril, ak vedia, že koeficient trenia medzi kockami je f?



15 Adam našiel v skrini starobylý lampáš. Má tvar kvádra so stranami a, $2a$ a $2a$ a jeho vrchná a spodná stena sú nepriehľadné. Adam do stredu spodnej podstavy položil sviečku. Akú časť priestoru lampáš osvetľuje?

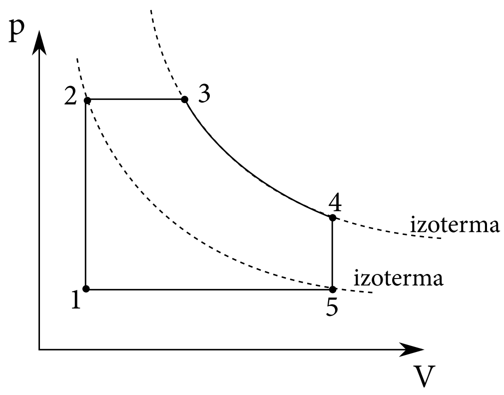


16 Určite to poznáte. Ste astronautom na ISS a práve nemáte čo robiť. Tak sa rozhodnete, že si budete so svojím obľúbeným ruským kamarátom prehadzovať medicinbaly. Obaja vážite M a vznášate sa oproti sebe s medicinbalmi v rukách. Jeden medicinbal váži $m < M$. Akú vzájomnú rýchlosť získate, keď si prehodíte lopty rýchlosťou v?

17 Kocka Dušan si rád zájde na plaváreň. Keď si len tak lebedí na voľnej hladine, tretina objemu jeho tela je ponorená pod vodnou hladinou. Z akého najnižšieho mostíka musí skočiť do vody, aby sa celým svojím objemom ponoril pod hladinu? Dĺžka hrany Dušana je a. Vodu pokladajte za ideálnu kvapalinu. Predpokladajte, že spodná podstava Dušana je počas celého pohybu rovnobežná s vodnou hladinou.

18 Jerguš našiel u starých rodičov na povale prehistorický kotúč magnetickej pásky. Nemal práve nič iné na práci, takže ju začal pomaly odvíjať ťahaním za koniec konštantnou rýchlosťou. Za 20 minút sa mu podarilo zmenšiť polomer kotúča na polovicu. Ako dlho mu potrvá, kým zmenší polomer kotúča opäť na polovicu, ak sú rozmery trubičky, na ktorej je páska navinutá, zanedbateľné?

19 Ako už možno viete, Denda má veľmi rada všelijaké deje. Naposledy ju zaujal takýto termodynamický: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$. Má ho však zatiaľ zakreslený iba v pV súradniciach. Od Vás by chcela, aby ste ho prekreslili do VT súradníc. Pomôžte jej!



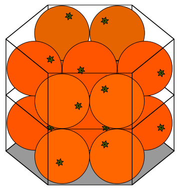
20 Výkon slnečného žiarenia dopadajúceho na Zem je $1366\,\mathrm{W/m^2}$. Koľko hmoty stratí Slnko za rok v termojadrových reakciách?

21 Máme zápalný knôt dĺžky L, ktorý zhorí za čas t. Položíme ho na zem tak, aby sa sám seba dotýkal práve dvakrát. Ako najrýchlejšie ho dokážeme spáliť, ak ho tentokrát smieme zapáliť na ľubovoľnom mieste?

22 Bratia Juan a Jorge Cruderos založili firmu na dovoz ultraluxusných mexických pomarančov. Samozrejme, všetok kapitál investovali do nákupu starého ropného tankera s hmotnosťou M a objemom V.

Ultraluxusné pomaranče majú tvar gule a hustotu ρ_p. Aby sa nedotĺkli, naložili ich Cruderovci do lode špeciálnym spôsobom: rozložili ich do identických vrstiev, pričom v každej vrstve pomaranče poukladali do hexagonálnej mriežky najhustejším možným spôsobom. Takto zaplnili celý objem tankera.

Keďže ich počiatočný kapitál nebol práve veľký, po vyplávaní z Mexika objavili v trupe dieru. Do lode začala vnikať oceánska voda s hustotou ρ. Jediná vec, ktorá teraz Juana a Jorgeho trápi, je toto: aká časť objemu lode zostane trčať nad hladinu oceánu, keď voda zaplní všetok voľný priestor medzi pomarančami?



23 Hasiči potrebujú bežne dostreknúť do výšky 10 m. Hasičská hadica má polomer 5 cm, no samotná tryska len 2 cm. Aký pretlak (oproti atmosférickému tlaku) musí byť v hadici, aby hasiči dostrekli tak vysoko?

24 Je letná noc. Plyš leží na lúke a sleduje jasný satelit. V okamihu, keď satelit prelieta práve nad ňou, Plyš mu odmeria okamžitú uhlovú rýchlosť 1 °/s. V akej výške nad Zemou obieha, ak je jeho dráha kruhová?

Úloha má škaredé analytické riešenie. Uznané budú odpovede líšiace sa od správnej o menej ako 10 km. *Nebojte sa použiť kalkulačku. Pri riešení úlohy zanedbajte rotáciu Zeme.*

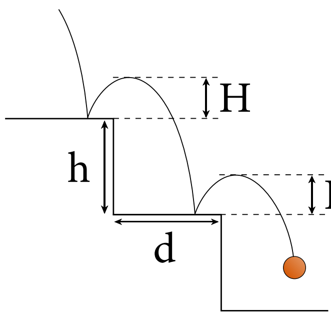
25 Superman práve z trosiek horiaceho múzea zachránil vzácny porcelánový čajník. Teraz sa vznáša vo výške h nad mestom a chce letieť po ďalší artefakt. Čajník mu však zavadzia, takže by ho potreboval najprv čo najrýchlejšie odložiť do bezpečia, teda do nulovej výšky na zem.

Superman je síce nezničiteľný, čajník však prežije najviac preťaženie $G > 1\,\mathrm{g}$. Za aký najkratší čas ho dokáže položiť na zem bez toho, aby ho rozbil?

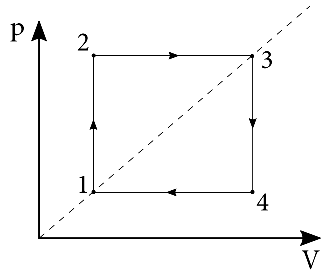
Uvedomte si, že čajník stojaci na zemi cíti preťaženie 1 g.

26 Štyri rovnaké planéty s hmotnosťou m rozmiestnené do štvorca obiehajú okolo spoločného ťažiska po kružnici s polomerom R. Aká je perióda ich obehu?

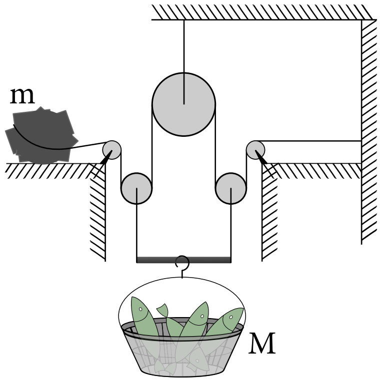
27 Fero má doma schodisko, na ktorom je každý schod vysoký h a dlhý d. Keď z istej výšky nad schodom šikovne hodí gumenú loptičku vodorovnou rýchlosťou v, loptička po každom odraze vyskočí rovnako vysoko vzhľadom na schod, od ktorého sa odrazila. Do akej výšky by sa táto loptička odrazila, keby ju Fero pustil zvislo na schod z výšky h?



28 Lukaf za dlhých polárnych nocí skúma rôzne termodynamické stroje. Zabudol však, akú prácu vykoná jeden mól ideálneho plynu v termodynamickom stroji, ktorý je vlastne cyklom $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ na obrázku. Pamätá si však, že teploty plynu v bodoch 1 a 3 sú T_1 a T_3, a že spojnica bodov 1 a 3 vedie cez počiatok pV diagramu. Nájdite veľkosť práce, ktorú jeden mól ideálneho plynu v tomto stroji vykoná počas jedného cyklu.

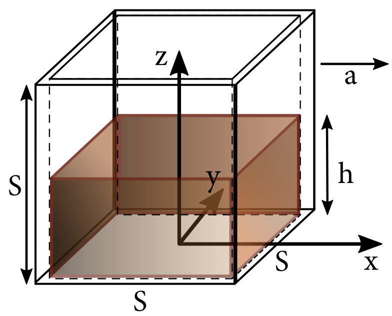


29 Rybár Tomáš sa vrátil z rybačky s poriadným úlovkom. Z lode ho vytiahol obrovským kladkostrojom a lano pripevnil o balvan hmotnosti m. So svojím úlovkom sa chcel aj zvečniť, no keď si robil selfie, všimol si, že jeho úlovok hmotnosti M padá späť do vody so zrýchlením A. Aká je hodnota tohto zrýchlenia, ak koeficient trenia medzi balvanom a zemou je f?

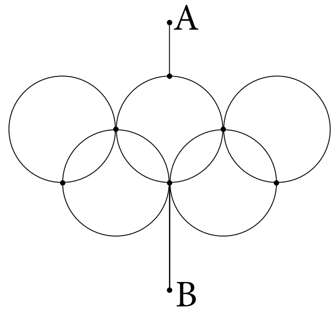


30 Enka stojí v určitej vzdialenosti od steny a monofrekvenčne zavýja s frekvenciou f. Tommy stojí medzi stenou a Enkou a od ľaku uteká smerom k stene rýchlosťou v, pričom počuje rázy (periodické zmeny hlasitosti) s frekvenciou Δf. Aká je frekvencia Enkinho zavýjania?

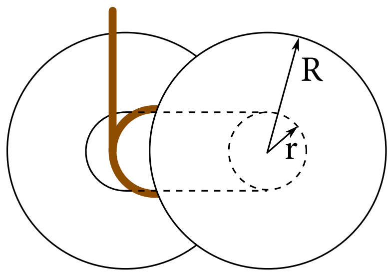
31 Kávičkár Deduško si na palubnú dosku svojho auta položil svoj obľúbený pohárik v tvare kocky s hranou dĺžky s. Deduškov pohárik má tenké homogénne steny, vďaka čomu váži len $M = \frac{1}{10}s^3\rho$. Do pohárika následne nalial do výšky $h = \frac{1}{2}s$ svoju obľúbenú kávičku s hustotou ρ. Počas jazdy však musel prudko zabrzdiť so spomalením $a = 0{,}2\,\mathrm{g}$, následkom čoho sa káva v poháriku naklonila. Pritom sa samozrejme posunulo aj spoločné ťažisko kávičky a pohárika. Nájdite pozíciu ťažiska $[x; y; z]$ vzhľadom na stred podstavy pohárika.



32 Aj tento rok fyzici fandili našim olympionikom. Preto postavili z odporového drôtu s dĺžkovým odporom λ zapojenie v tvare olympijských kruhov. Každý z nich má polomer r. Aký je výsledný odpor zapojenia medzi bodmi A a B?



33 Jojo si môžeme bežne predstaviť ako kotúč zložený z valčeka polomeru r a hmotnosti m a dvoch diskov (tenkých valcov) polomeru $R > r$ a hmotnosti M ako na obrázku. Ak na jojo namotáme šnúrku dĺžky $L \gg R$, chytíme koniec šnúrky a jojo pustíme, ako dlho bude trvať, kým sa celá šnúrka odmotá a začne sa namotávať späť?



34 Maťo počas písania diplomovej práce hrozne schudol. Bolo mu však ľúto vyhodiť svoj starý opasok. Daroval ho teda matičke Zemi. Ukázalo sa však, že aj tej je pridlhý – presne o meter dlhší, než treba.

Aký vysoký stĺp musí teraz nechať postaviť, aby bol opasok v každom svojom mieste napnutý? Pri tejto úlohe neváhajte použiť kalkulačku alebo ešte viac zapojiť svoje mozgové závity.

Táto úloha nemá analytické riešenie. Odovzdávajte numerický výsledok zaokrúhlený na desiatky metrov.

35 Sféricky symetrický Polik s hustotou $\rho/2$ sa vo voľnom čase správa ako vodivý kondenzátor. Keď je umiestnený vo vákuu, jeho kapacita je C_0. Ak Samo nechá Polika plávať (na hladine vody s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ε_r), jeho kapacita bude C_1. Akú kapacitu bude mať Polik, keď ho Samo potopí úplne?

Pod „potopí úplne“ má Samo samozrejme na mysli, že Polik je zo všetkých strán obklopený veľkým množstvom vody.

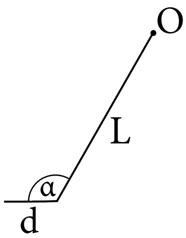
$\boxed{36}$ František dostal darček – kocku zo šiestich veľmi tvrdých kartónových štvorcov s hranou a obopnutú dookola stuhami, ako už darčeky zvyknú byť (viď obrázok). Stuha má hrúbku h a pretrhne sa pri pôsobiacej sile F. Aký by musel byť pretlak Δp v škatuli, aby stuhy praskli?

$\boxed{37}$ Kvík má na záhrade zrkadlo v tvare paraboloidu s polomerom r a hĺbkou h. Keď ho namieri na Slnko a do ohniska umiestni kúsok dreva alebo papiera, okamžite vzbĺkne. Z pyromanstva sa však človek nenaje... Kvík teda vytiahol z komory riadny kus slaniny a napichol ho na ražeň. Uvedomil si však, že cez poludnie opekať nemôže, pretože odkvapkávajúci tuk by paraboloid zašpinil.

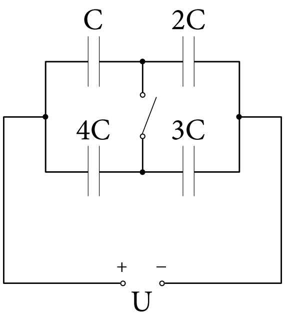
Pri akej najväčšej uhlovej výške Slnka nad obzorom sa nemusí báť, že si zrkadlo zašpiní odkvapkávajúcou masťou?

$\boxed{38}$ Navzdory všetkým zákazom má Čajka na internáte dvojplatničku. Keď naleje do svojho dokonale čierneho hrnca s dokonale čiernou pokrievkou 5 l vody a položí ju na menšiu platničku s výkonom 1 kW, tepelnú rovnováhu dosiahne pri 90 °C. Ak hrniec preloží na väčšiu platničku s dvojnásobným výkonom, voda o chvíľu zovrie. Ako dlho od tohoto okamihu potrvá, kým sa všetka voda vyparí? Uvažujte, že teplota v miestnosti je ustálená na hodnote 20 °C a steny sú po minulých Čajkiných pokusoch o varenie obhorené do čierna.

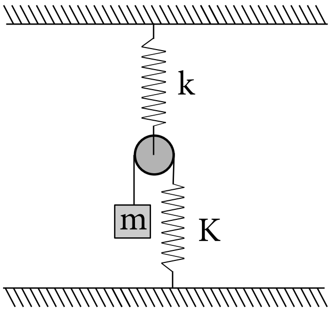
$\boxed{39}$ Jakubovu hokejku hmotnosti m možno aproximovať dvomi palicami dĺžky d (čepeľ) a $L = 5d$ (rukoväť) zvierajúcimi uhol $\alpha = 120°$. Vyjadrite moment zotrvačnosti hokejky okolo osi kolmej na rovinu hokejky prechádzajúcej jej horným koncom ako násobok md^2. Predpokladajte, že hokejka má v celej dĺžke konštantnú dĺžkovú hustotu.



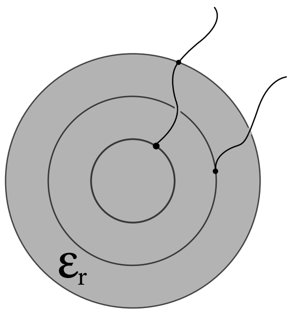
$\boxed{40}$ Maťo je taká kapacita, že ani kondenzátory sa s ním nemôžu merať. On si však vzal štyri z nich s kapacitami C, $2C$, $3C$, $4C$ a zostavil z nich obvod zobrazený na schéme. Aký celkový náboj pretečie cez spínač po jeho zopnutí?



41 Katka má hračku zloženú z dvoch pružín tuhostí k a K, závažia hmotnosti m a nehmotnej kladky. Aká je perióda kmitov hračky?

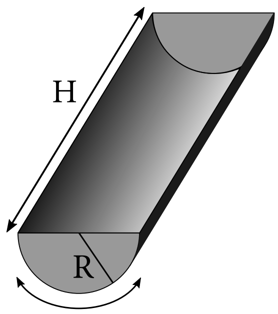


42 Samko má cibuľku, ktorá sa skladá z troch koncentrických guľových šupiek, pričom ich polomery sú r, $2r$ a $3r$. Následne svoju cibuľku strčil do roztoku a pokovil povrchy všetkých guľových šupiek. Potom prvú a tretiu šupku vodivo spojil a na druhú šupku priviedol vodivý kontakt. Akú má jeho cibuľka kapacitu, ak relatívna permitivita cibule je ε_r?



43 Jaro chová doma prasatá a kúpil pre ne nový válov. Válov je vyrobený z tenkého plechu a má tvar dutého polvalca s polomerom podstavy R a výšky H (viď obrázok). Keďže je Jaro fyzik, viac ako to, že prasce budú nažraté, ho zaujalo, že válov dokáže kmitať. Aká je perióda malých kmitov válova?

Ťažisko polkružnice je vzdialené od „pôvodného stredu" $\frac{2}{\pi}R$ a moment zotrvačnosti okolo „pôvodného stredu" je MR^2. Pre polkruh platí, že vzdialenosť ťažiska od „stredu" je $\frac{4}{3\pi}R$, a moment zotrvačnosti okolo tohto bodu má hodnotu $\frac{1}{2}MR^2$.



44 Jaro si pripravoval svoj obľúbený bazový sirup a napĺňal ním valcovité zaváraninové poháre s polomerom R. Jeden plný a uzavretý pohár sa mu však vyšmykol, padol na zem a odgúľal sa na druhý koniec miestnosti. Keď ho položil na stôl, sirup vo vnútri rotoval uhlovou rýchlosťou ω. Ako sa zmenili napäťové sily v skle v porovnaní so situáciou, keď je sirup v pokoji? Do jedného pohára sa zmestí sirup s celkovou hmotnosťou m.

Vzorové riešenia

1 Andrejovi trvá prebehnúť od kraja lesa ku košiaru čas $t = \frac{L}{v}$. Za tento čas musí vedieť takisto prebehnúť celú vzdialenosť ku hranici košiara (označíme ju d) aj ovečka, teda musí platiť $t = \frac{d}{w}$. Toto položíme do rovnosti a vyjadríme odtiaľ

$$d = L\frac{w}{v}.$$

Zadanie sa však pýta na vzdialenosť od lesa, nie od košiara, takže nás zaujíma rozdiel L a d:

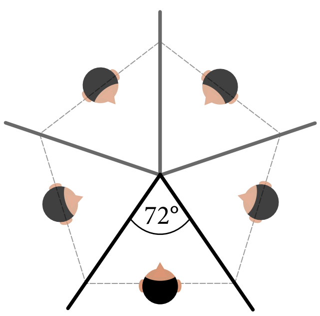
$$L - d = L - L\frac{w}{v} = L\left(1 - \frac{w}{v}\right).$$

Najmenšia dĺžka, na ktorú sa môže ešte ovečka priblížiť je teda $L\left(1 - \frac{w}{v}\right)$.

2 Úplne najlepšie by bolo skúsiť si vyriešiť túto úlohu s reálnymi zrkadlami. No keďže ich nemôžeme pribaliť ku každému jednému vzoráku, budeme musieť riešenie tejto úlohy vysvetliť starým dobrým spôsobom.

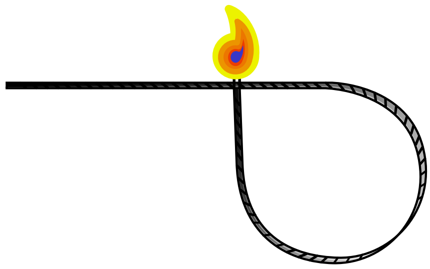
Rovinné zrkadlá symetricky zobrazujú predmety z jednej polroviny na obrazy v druhej polrovine, a to konkrétne podľa osi, ktorá je definovaná polohou zrkadla. Ak máme teda zrkadlá dve, môže nastať situácia, že obraz vytvorený jedným zrkadlom bude predmetom pre druhé zrkadlo, a zas naopak. To presne nastáva aj v našom prípade pre $N \geq 3$. Konkrétne, ak zvolíme uhol medzi zrkadlami $360°/N$, vznikne $N - 1$ obrazov, pretože zrkadlá a „imaginárne“ zrkadlá (obrazy zrkadiel) rozdelia rovinu na N rovnakých častí. Pre $N = 1$ máme iba jedno zrkadlo, čiže to je mimo našej úlohy, a ak je $N = 2$, dve zrkadlá tvoria iba jedno rovinné a vidíme sa raz. Teda to, že vidíme $N - 1$ obrazov bude platiť vždy. A keďže $N \in \mathbb{N}$, nemôže nastať ani situácia, že by sme videli polovičné alebo nekompletné obrazy.

Pre lepšiu predstavu prikladáme obrázok zrkadiel a obrazov pre $N = 5$.



3 Pointa tejto úlohy tkvie v tom, čo sa stane s horiacim knôtom, keď plameň dorazí k miestu dotyku. Jeden plameň sa jednoducho rozdelí na tri. Keďže máme povolený práve jeden dotyk, naraz môžu horieť maximálne tri plamene. Teda najmenší čas, za ktorý môže knôt zhorieť, je $t/3$. Ak teda nájdeme ľubovoľné také riešenie, budeme si istí, že lepšie to už nepôjde.

Ako ho nájsť? Je jasné, že chceme, aby nám horeli tri plamene čo najskôr, takže prekríženie bude čo najbližšie pri začiatku. Zároveň chceme knôt rozdeliť prekrížením tak, aby každému plamienku prislúchala práve tretina dĺžky knôtu, takže druhý bod dotyku musí ležať v $2/3$ jeho dĺžky. Hľa obrázok:



4 Je viditeľné, že trať je zložená iba z častí, ktoré sú buď rovné, alebo sú to osminkové výseky kruhu. Na rovných častiach prejdú ľavé aj pravé kolieska rovnakú dráhu. Zaujímavé to začne byť až pri tých kruhových výsekoch. Ak je vnútorný polomer zakrivenia trate na kruhovom dieliku R, vonkajší musí byť $R + d$. To znamená, že pri zatočení o uhol α je rozdiel dráh, ktoré kolesá prejdu $\alpha(R + d) - \alpha R = \alpha d$.

Vidíme, že od polomeru zakrivenia výsledný rozdiel nemôže závisieť. Navyše, vláčik sa v súčte otočil o uhol 2π, takže pravé kolieska prešli oproti ľavým dráhu dlhšiu o $2\pi d$.

5 Vozík sa pohybuje do kopca konštantnou rýchlosťou, nezrýchľuje, čiže sila motora F práve kompenzuje tangenciálnu zložku gravitačnej sily, ktorá ťahá vozík dolu kopcom. Matematický zapísané

$$F = mg \sin \alpha.$$

Keď vozík otočíme a necháme, aby ho motor poháňal smerom dolu kopcom, výsledná sila v tangenciálnom smere bude

$$F' = F + mg \sin \alpha = 2mg \sin \alpha.$$

Na to, aby sme zistili zrýchlenie vozíka v tejto situácii, stačí zapísať pohybovú rovnicu podľa 2. Newtonovho zákona

$$ma = F' = 2mg \sin \alpha \Rightarrow a = 2g \sin \alpha.$$

6 Výšku, v ktorej sa vajíčko nachádza v čase t' od vyhodenia vieme popísať jednoduchou rovnicou pre polohu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe.

$$h = -\frac{1}{2} g t'^2 + v t',$$

kde g je gravitačné zrýchlenie.

Ako ďalšie si označíme čas T, ako čas, ktorý uplynul od vyhodenia prvého vajíčka po ich zrážku. Keďže pri zrážke je poloha vajíčok H rovnaká, stačí už len vyriešiť dve rovnice popisujúce polohu prvého, respektíve druhého, vajíčka.

$$H = -\frac{1}{2} g T^2 + v\, T,$$
$$H = -\frac{1}{2} g (T - t)^2 + v(T - t).$$

Vylúčením T z rovníc dostávame

$$H = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} - \frac{1}{8} g t^2.$$

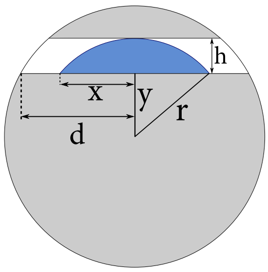
7 Áno, aj takýto jednoduchý príklad sme dali tento rok do Náboja. Keďže Janíčko pohybuje laserom rádovo vyššiou uhlovou rýchlosťou, ako sa točí Mesiac okolo Zeme, alebo samotná Zem, ostatné pohyby môžeme zanedbať a obvodovú rýchlosť laserovho lúča vypočítať jednoducho ako

$$v = \omega d = 720\,°/\mathrm{s} \cdot 400\ 000\,\mathrm{km} = 4\pi/\mathrm{s} \cdot 400\ 000\,\mathrm{km} \doteq \frac{16\pi}{3}\mathrm{c} \doteq 16{,}76\,\mathrm{c}.$$

Mohli by ste si povedať, že tento výsledok nemôže byť správny, lebo prekračuje rýchlosť svetla a rýchlejšie sa predsa nemôže nič pohybovať. Toto obmedzenie však platí pre rýchlosť šírenia sa informácie. V tomto prípade je tou informáciou letiaci fotón z lasera. No to, čo Janíčko pozroruje je veľa dopadajúcich fotónov v rade na Mesiac, nie len jeden fotón, takže všetko je v súlade s fyzikálnymi zákonmi.

Inak povedané, fakt, že sa po povrchu Mesiaca pohybuje bodka rýchlejšie ako svetlo, ľudia alebo prípadne iní obyvatelia Mesiaca nevedia využiť na prenos informácie.

8 Zamyslime sa nad tým, prečo vlastne voda v tuneli začala stúpať. Po krátkej chvíľke prídeme na to, že aj na podzemnú vodu musí pôsobiť gravitačná sila Zeme. Ak predpokladáme, že Zem je homogénna guľa, tak aj hladina podzemnej vody má sférický tvar. To znamená, že vzdialenosť od stredu Zeme do bodu, kde začala voda presakovať do tunela, a bodu, kde sa voda dotkla stropu tunela, musí byť rovnaká.



Označme si teraz všetky vzdialenosti, ktoré potrebujeme. Nech $d = 5\,\mathrm{km}$ je dĺžka polovice tunela, $x = 3\,\mathrm{km}$ je vzdialenosť od miesta zatopenia po stred tunela, r je polomer sféry, ktorá predstavuje hladinu vody, y je vzdialenosť od stredu Zeme po stred tunela, a h je hľadaná výška tunela.

Z jednoduchej geometrie v podobe Pytagorových viet vieme, že

$$y^2 = R^2 - d^2,$$
$$r^2 = y^2 + x^2 = R^2 - d^2 + x^2.$$

Nás zaujíma výška $h = r - y$, čiže po dosadení dostávame

$$h = \sqrt{R^2 - d^2 + x^2} - \sqrt{R^2 - d^2} \doteq 0{,}71\,\mathrm{m}.$$

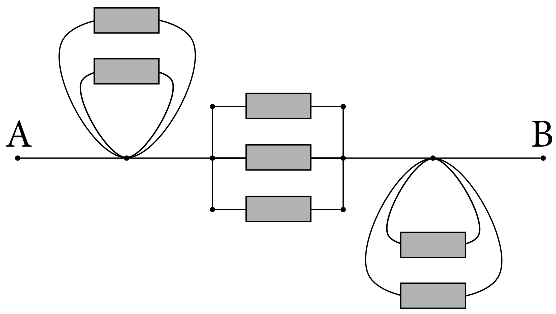
9 Celá práca, ktorú Mojžiš vykonal, sa minula na zvýšenie potenciálnej energie vody. Bez ujmy na všeobecnosti sa to dá predstaviť tak, že zdvihol kváder vody s rozmermi $12\,\mathrm{km} \times 40\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ a ťažiskom vo výške 20 m nad dnom, a rozlial ho po povrchu Červeného mora. More je obrovské, takže jeho výška sa pri tomto zázraku nezmenila, a ťažisko premiestnenej vody sa posunulo do výšky 40 m nad dno.

Práca, ktorú Mojžiš vykonal, je teda

$$W = \Delta E_p = \rho V g \Delta h = 960\,\mathrm{GJ},$$

kde $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ označuje hustotu vody, V objem premiestnenej vody, a $\Delta h = 20\,\mathrm{m}$ predstavuje zmenu výšky ťažiska.

10 Najdôležitejšia vec, ktorú si musíme pri riešení tejto úlohy uvedomiť, je to, že miesta, ktoré spája dokonalý vodič, majú rovnaký potenciál. To znamená, že ak ten vodič skrátime, alebo ho tam pridáme ľubovoľne veľa, nič sa nezmení. Na základe toho si môžeme prekresliť odporovú sieť nasledovne:



Z toho jasne vidieť, že cez dva rezistory naľavo aj napravo nepotečie žiaden prúd, ak by sme naložili na sieť nejaké napätie. Takže ich príspevok k výslednému odporu je nulový a prispievajú k nemu iba tri paralelne zapojené rezistory v strede. A teda výsledný odpor je jednoducho $\frac{R}{3}$.

11 Predpokladajme, že Maťove vozidlo má zanedbateľné rozmery voči dĺžke kamióna a rezerve, ktorú si necháva Maťo pri predbiehaní. Teraz prejdime k samotnému riešeniu.

Je jasné, že pri predbiehaní pôjde maximálnou povolenou rýchlosťou w. To ale aj znamená, že z pohľadu (vzťažnej sústavy) kamionistu pôjde Maťo rýchlosťou $w - v$. Ak sa pozrieme na prejdené vzdialenosti počas obiehaceho manévru tiež v kamionistovej sústave, uvidíme, že celá dráha, ktorú musel Maťo prejsť je iba súčtom rezerv pred a za kamiónom a dĺžok kamiónu a samotného auta, čiže $2k + d + h$. To znamená, že predbiehanie trvá $t = \frac{2k+h+d}{w-v}$.

Za tento čas sa nesmie zraziť Maťove vozidlo s prípadným protiidúcim. Samozrejme, čím rýchlejšie protiidúce auto pôjde, tým ďalej musí vidieť. V najhoršom prípade protidúce pôjde maximálnou rýchlosťou w, takže od začiatku predbiehania po koniec prejdú protiidúce vozidlá celkovú dráhu

$$l = 2wt = \frac{2w(2k + h + d)}{w - v},$$

čo je teda aj minimálna vzdialenosť, do ktorej musí Maťo vidieť, aby nedošlo k zrážke. Nakoniec dodajme, že ak ste uvažovali aj rezervu medzi protiidúcimi autami, výsledok sa samozrejme zmení len o jej dĺžku, teda $l' = \frac{2w(2k+h+d)}{w-v} + k$.

12 Fuj! Zrezaný kužeľ, už zase... to ťažisko sa bude teda počítať ťažko... jedine, že by sme ho, podobne ako minulý rok, vôbec nepotrebovali. Stačí, ak si spomenieme, že moment sily $\vec{M}$ sa počíta ako vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily $\vec{r}$ a pôsobiacej sily $\vec{F}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Na zistenie veľkosti momentu sily nám stačí poznať dĺžku kolmej zložky tohto polohového vektora, t.j. dĺžku ramena sily. Stačí teda, ak vyvážime všetky momenty vzhľadom na dolnú hranu pohára a objem už len triviálne vyjadríme. Označme si hmotnosť Žaby M, hmotnosť pohára m, vrchný polomer pohára R a dolný r. Čiže dostávame

$$mgr + V\rho gr = Mg(R - r) \implies V = \frac{M}{\rho}\frac{R - r}{r} - \frac{m}{\rho} \doteq -9\,\mathrm{ml}.$$

Záporný objem? Skúška správnosti a čuduj sa svete výsledok je naozaj záporný. Že by sme teda mali niečo z pohára odliať? Zamyslime sa, čo to presne znamená. Moment sily spôsobený ťiažou vody sa nachádza na rovnakej strane rovnice, ako moment sily vytváraný tiažou samotného pohára, čo zodpovedá tomu, že voda pomáha pohár stabilizovať. Uvažujme na chvíľu, že do pohára nenalejeme žiadnu vodu a spočítajme si momenty tiažových síl žaby a pohára. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme, že $mgr < Mg(R-r)$. To mi ale hovorí, že žaba nie je dostatočne ťažká na to, aby prevrhla pohár, ani keď si sadne na jeho okraj. Pre iné číselné hodnoty by sa samozrejme mohlo taktiež stať, že žaba bude priťažká a s vodou už pohár vyvážiť nevieme.

13 Úlohu budeme riešiť od konca. Pozrime sa najskôr na to, aké sily na puk počas pohybu pôsobia. V prvom rade je to tiažová sila $F_G = mg$ kompenzovaná normálovou silou od ľadu. Okrem toho proti smeru pohybu pôsobí sila šmykového trenia $F_t = fF_G = fmg$, ktorá puku bráni v pohybe. Môžeme napísať pohybovú rovnicu pre puk $ma = mfg$, teda puk vykonáva rovnomerne spomalený pohyb so spomalením $a = fg$.

Nech má puk po odraze rýchlosť v_2. Keďže puk na konci zastal, tak celá jeho kinetická energia $\frac{1}{2}mv_2^2$ sa spotrebovala na prácu trecích síl $mgfd$. Preto

$$v_2 = \sqrt{2fgd}.$$

Ďalej vieme, že pri odraze sa stráca časť energie. Platí

$$p = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}.$$

Preto

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{p}\frac{1}{2}mv_2^2.$$

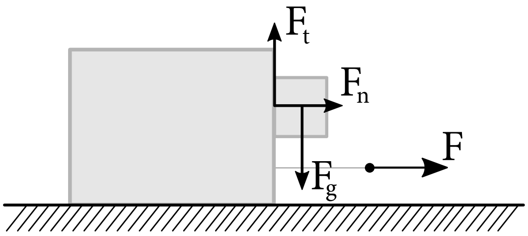
Pre prvú fázu pohybu platí to isté, rozdiel kinetickej energie na začiatku a nakonci sa spotreboval na prácu trecích síl.

$$\frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_1^2\right) = mgfd.$$

Po dosadení príslušných výrazov za rýchlosť dostaneme

$$v_0 = \sqrt{2fgd\left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

14 Prvoradé je vedieť, aké sily pôsobia v našej sústave, špeciálne, aké sily pôsobia na „levitujúcu“ kocku.



V horizontálnom smere pôsobí iba normálová sila F_n od veľkej kocky. Pohybová rovnica[1] v horizontálnom smere pre „levitujúcu“ kocku má teda tvar

$$ma = F_n.$$

[1] Prakticky iba 2. Newtonov zákon

Vo vertikálnom smere pôsobia dve sily, gravitačná $F_\mathrm{g} = mg$, a trecia $F_\mathrm{t} \leq fF_\mathrm{n}$. Keďže nás zaujíma prípad, kde sa „levitujúca" kocka nebude pohybovať vo vertikálnom smere, s určitosťou musí platiť rovnosť síl

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{t} \Rightarrow mg \leq fF_\mathrm{n}.$$

Posledný dielik puzzle je pohybová rovnica celého systému. Obe kocky sa hýbu so zrýchlením a v horizontálnom smere a jediná vonkajšia sila, ktorá na nich pôsobí je sila F, ktorou pôsobia Žaba s Janom na lano, takže

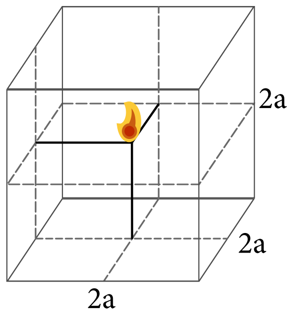
$$(m + M)\,a = F.$$

Spojením všetkých troch pohybových rovníc dostávame podmienku pre silu F

$$F \geq (m + M)\,\frac{g}{f},$$

a teda najmenšiu hodnotu má F vtedy, ak nastane rovnosť.

15 Predstavme si, že máme lampáš tvaru kocky so stranou dĺžky $2a$. Ak by sme umiestnili sviečku presne do stredu, každá zo šiestich stien by bola osvetľovaná rovnako. To znamená, že ak by boli jeho vrchná a spodná stena nepriehľadné, lampáš by osvetľoval $4/6 = 2/3$ priestoru.



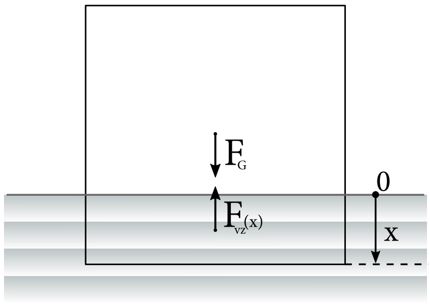
Keď sa však pozrieme na Adamov lampáš, vytvoríme ho z nášho tak, že celú spodnú polovicu nahradíme nepriehľadnou podstavou rozmeru $2a \times 2a$. Takže všetko svetlo, ktoré by mohlo vychádzať von spodnou polovicou nášho lampáša, z Adamovho vychádzať nebude. Po tejto úvahe je už zjavné, že Adamov lampáš bude osvetľovať presne $1/3$ priestoru.

16 Ako ste si už zo zadania mohli všimnúť, situácia je pre vás oboch rovnaká. Ak by sme sa chceli hrať na drsných fyzikov, povedali by sme, že situácia je symetrická. Stačí sa teda pozerať na to, čo sa deje s jedným z vás. Pre druhého bude platiť to isté, akurát všetky rýchlosti budú mať opačný smer.

Keďže na sústravu astronaut(vy) a medicinbal nepôsobí žiadna vonkajšia sila, musí sa zachovávať celková hybnosť tejto sústavy. Astronaut a medicinbal sú na začiatku v pokoji (samozrejme, v inej sústave to tak byť nemusí, ale ako už zadanie napovedá, na celú úlohu sa pozeráme v takej sústave, kde sú astronauti na začiatku v pokoji). Ak označíme V' rýchlosť astronauta po tom, ako odhodí medicinbal, aplikovaním prvého zákona zachovania hybnosti $(M + m) \cdot 0 = MV' + mv \implies MV' = -mv$ ľahko získame veľkosť jeho hybnosti.

Na astronauta teraz letí aj medicinbal odhodený druhým astronautom. Ak ho chytí, získa navyše ďalšiu hybnosť $-mv$. Rýchlosť každého z astronautov po tom, ako si vymenia medicinbaly, je teda $(M + m)V = -2mv \implies V = -\frac{2m}{m+M}v$ a keďže sú ich rýchlosti protismerné, ich vzájomná rýchlosť je $\frac{4m}{m+M}v$.

17 Pozrime sa najskôr na situáciu, keď si Dušan lebedí na hladine. Vtedy sa nehýbe, preto sily, ktoré naňho pôsobia, musia byť v rovnováhe. Menovite tiažová sila $F_G = a^3\rho_D g$ musí byť v rovnováhe so vztlakovou silou $F_{vz} = \frac{1}{3}a^3\rho_v g$, na základe čoho vieme určiť hustotu Dušana $\rho_D = \frac{1}{3}\rho_v$.



Vztlaková sila pôsobiaca na Dušana je funkciou hĺbky ponorenia. Nech je dolná podstava v hĺbke x pod hladinou. Potom na Dušana pôsobí vztlaková sila

$$F(x) = -a^2 x\rho_v g = -\underbrace{a^2\rho_v g}_{k}x = -kx \implies k = a^2\rho_v g.$$

Znamienko „mínus" nám len hovorí, že ak je kocka vychýlená nadol, tak vztlaková sila pôsobí smerom hore. Bystré oči v tom rýchlo spoznajú silu pružnosti harmonického oscilátora (pružinky) s tuhosťou $k = a^2\rho_v g$, preto možno kocke ponorenej pod hladinou priradiť potenciálnu energiu pružnosti $E_{pr}(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}a^2\rho_v g x^2$. Nezabúdajme však, že táto „pružinka" sa zapína len pre kladné x, teda keď je spodná stena kocky pod hladinou, a sila už ďalej nerastie, keď spodná podstava dosiahne hĺbku a. Okrem toho sa kocka pohybuje aj v gravitačnom poli, preto má aj gravitačnú potenciálnu energiu, ktorá je opäť funkciou ponorenia $E_{\mathrm{pot}}(x) = -\frac{1}{3}a^3\rho_v g x$.[2]

Keď Dušan dosiahne najnižšie miesto svojej trajektórie, má nulovú rýchlosť, a teda nulovú kinetickú energiu. Podľa zadania to má byť v hĺbke $x = a$, pretože to je najmenšia hĺbka, pri ktorej je už celý ponorený. Jeho celková energia je teda daná súčtom oboch potenciálnych energií

$$E = E_{\mathrm{pr}}(a) + E_{\mathrm{pot}}(a) = \frac{1}{2}\rho_v g a^4 - \frac{1}{3}\rho_v g a^4 = \frac{1}{6}\rho_v g a^4.$$

Celková energia nám vyšla kladná, čo však nie je samozrejmosť. Mohla by nám vyjsť aj záporná, čo by znamenalo, že Dušan nikdy nebol celý nad hladinou, pretože E_{pr} je nezáporná a teda E_{pot} by musela byť nevyhnutne záporná, čo zodpovedá aspoň čiastočnému ponoreniu. My však máme kladnú celkovú energiu, preto Dušan musel skočiť do vody z nejakej výšky h. V momente, keď Dušan skáče z mostíka, má ešte nulovú kinetickú energiu, a tak jediná energia, ktorú má, je potenciálna gravitačná energia. Zo zákona zachovania energia má platiť $E = E_{pot}(-h)$, čiže $\frac{1}{6}\rho_v g a^4 = \frac{1}{3}a^3\rho_v g h$, odkiaľ

$$h = \frac{1}{2}a.$$

18 Mohlo by sa nám zdať, že na to, aby sme úlohu úspešne vyriešili, potrebujeme poznať hrúbku pásky. Ale vzhľadom na to, že je konštantná, o dĺžke odmotanej pásky nám presne hovorí zmena obsahu kotúča s magnetickou páskou.

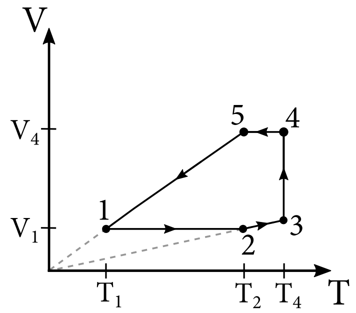
[2] Za nulovú potenciálovú hladinu sme si zvolili úroveň, keď sa spodná podstava kocky dotýka hladiny. Znamienko „mínus" je tam, pretože za kladný smer rastu x sme zvolili smer nadol.

Zo zadania vieme, že Jergušovi trvalo 20 minút, kým zmenil obsah kotúča s magnetickou páskou z πR^2 na $\pi \frac{R^2}{4}$. Čiže odmotal $\frac{3}{4}\pi R^2$ pásky. Ak sa bude snažiť zmenšiť polomer pásky opäť na polovicu, tzn. zmenšiť obsah kotúča na $\pi \frac{R^2}{16}$, bude musieť odmotať $\frac{3}{16}\pi R^2$ magnetickej pásky. To je presne štvrtina oproti tomu, čo na začiatku, takže mu to potrvá štvrtinový čas, teda 5 minút.

19 Začnime kresliť v bode 1.

- Dej $1 \to 2$ je izochorická expanzia, čo vo VT-diagrame znázorníme úsečkou rovnobežnou s osou T. Keďže počas izochorickej expanzie rastie tlak, musí aj teplota, keďže $p \propto T$.
- Dej $2 \to 3$ je izobarická expanzia, pri ktorej rastie objem aj teplota. Zo stavovej rovnice ideálneho plynu $pV = nRT$ si vyjadríme závislosť objemu od teploty $V = (nR/p)T \implies V \propto T$, čo je v prípade izobarického deja priamka začínajúce v počiatku súradníc. Dej $2 \to 3$ je úsečka na tejto priamke pokračujúca z teploty T_2 až do nejakej vyššej teploty T_4.
- Dej $3 \to 4$ je izotermická expanzia, čo je vo VT diagrame úsečka na priamke rovnobežnej s osou V.
- Dej $4 \to 5$ je izochorická kompresia, čo bude znovu úsečka rovnobežná s osou T. Pozor si musíme dať jedine na to, že body 2 a 5 ležia na izoterme, čiže musia vo VT-diagrame ležať na rovnakej priamke rovnobežnej s osou V.
- Dej $5 \to 1$ je znovu úsečka na priamke vychádzajúcej z počiatku súradníc.

Výsledný diagram teda vyzerá takto:

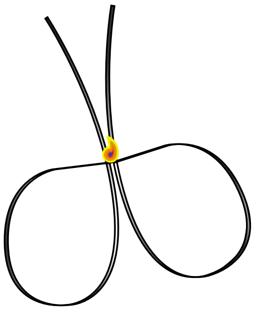


20 Máme informáciu o tom, koľko energie pretečie jednotkovou plochou kolmou na smer šírenia svetla za jednotku času, teda poznáme slnečnú konštantu k. Očakávame, že Slnko žiari do všetkých smerov rovnako, preto musí mať výkon $P = 4\pi R^2 k$, kde R je vzdialenosť Zeme od Slnka. Keďže výkon je definovaný ako energia vyžiarená za jednotku času, celková energia vyžiarená za čas τ je $E = P\tau = 4\pi R^2 k\tau$.

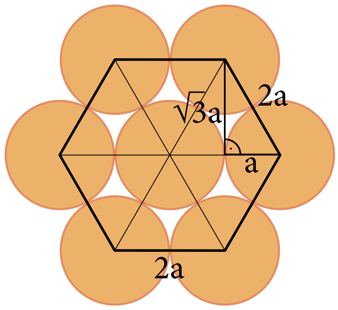
Zistili sme, koľko energie vyžiari Slnko za rok, zadanie sa nás však pýta na úbytok hmotnosti. Na prepočet energie na hmotnosť použijeme notoricky známy vzťah $E = mc^2$. Dostávame teda, že úbytok hmotnosti je $m = \frac{4\pi R^2 k\tau}{c^2}$. Za rok Slnko stratí $m \approx 1{,}35 \cdot 10^{17}$ kg.

21 Rovnako ako o pár príkladov vyššie, zamyslime sa, koľko najviac plameňov vieme vytvoriť. Keďže môžeme knôt zapáliť kdekoľvek, hneď od začiatku môžu horieť dva plamene. Už vieme, že jedno miesto dotyku spraví z jedného plameňa tri, a keďže je knôt sa sám seba dotýka dvakrát, môžeme na dvoch miestach získať maximálne šesť plameňov. Teda minimálny čas, za ktorý zhorí takto zapálený knôt je $\frac{t}{6}$.

Už len konkrétny príklad. Ak knôt zapálime v strede, dostaneme dva samostatne horiace knôty polovičnej dĺžky, horiace od konca. Optimálne riešenie pre takýto knôt však poznáme z predchádzajúcej úlohy, teda raz sa bude knôt dotýkať v šestine a polovici (resp. zanedbateľne blízko k polovici) dĺžky, a druhýkrát v polovici a $\frac{5}{6}$ dĺžky. Hľa ďalší obrázok.



22 Jednu vrstvu môžeme celú vyskladať z pravidelných šesťbokých hranolov s výškou $2r$ a podstavou pravidelného šesťuholníka so stranou $2r$. Pravidelný šesťuholník možno rozdeliť na šesť pravidelných trojuholníkov so stranou $2r$. Z Pytagorovej vety ľahko zistíme, že každý z trojuholníkov má výšku $\sqrt{3}r$. Obsah jedného trojuholníka je $\sqrt{3}r^2$, obsah podstavy v tvare pravidelného šesťuholníka je $6\sqrt{3}r^2$. Objem pravidelného šesťbokého hranola je potom jednoducho $12\sqrt{3}r^3$. V jednom takomto hranole sa nacháza jeden celý pomaranč a šesť častí pomaranča s objemom dvoch celých pomarančov (gúľ).



Pomaranče teda zapĺňajú objem $(6 \cdot 1/3 + 1) \cdot 4/3\pi r^3 = 4\pi r^3$. Ultraluxusné pomaranče bratov Cruderos vyplnia $(4\pi r^3)/(12\sqrt{3}r^3) = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 60\%$ celého priestoru. Čisto pre porovnanie, ak by pomaranče uložili tým najhustejším možným spôsobom, zaplnili by až $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 74\%$ celého priestoru.

Tanker bratov Cruderos váži M a pomaranče v ňom $\pi/(3\sqrt{3})V\rho_p$. Ak voda vyplní všetok priestor medzi pomarančami, tak bude vážiť $(1 - \pi/(3\sqrt{3}))V\rho$. Z Archimedovho zákona ľahko zistíme objem ponorenej časti lode V_{ponor}

$$V_{\mathrm{ponor}} = \left(\frac{M}{\rho} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\frac{\rho_p}{\rho} + 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) V.$$

Nad hladinou tak zostane trčať $(V - V_{\mathrm{ponor}})/V$ objemu lode, teda presne

$$\left(1 - \frac{\rho_p}{\rho}\right)\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{M}{V\rho}.$$

23 Uvažujme, že voda v hadici sa správa ako ideálna kvapalina. Vieme, že platí rovnica kontinuity medzi vodou v hadici a vodou v tryske

$$\pi R^2 v_1 = \pi r^2 v_2,$$

kde v_1 a v_2 sú rýchlosti v jednotlivých segmentoch.

Taktiež si musíme uvedomiť, že tlak na konci trysky musí byť atmosférický. Teda ak označíme hľadaný pretlak v hadici ako p, Bernoulliho rovnicu vieme zapísať ako

$$(p + p_{\mathrm{atm}}) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{\mathrm{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Tretia vec, ktorú využijeme je, že po tom, čo voda opustí hadicu, zachová si energiu, ale zmení sa jej forma z kinetickej $\frac{1}{2}mv_2^2$ na potenciálnu mgh. Teda platí

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gh.$$

Po troške matematického umenia so všetkými troma rovnicami dostaneme výsledok

$$p = \rho\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)gh = 97{,}44\,\mathrm{kPa}.$$

24 Z pohľadu Plyšu sa satelit pohybuje zdanlivou uhlovou rýchlosťou $\omega = 1\,°/\mathrm{s}$ vo výške h priamo nad jej hlavou. To znamená, že v skutočnosti pozorovala satelit pohybujúci sa rýchlosťou $v = h\omega$.

Otázkou teda je, aká je hodnota tejto rýchlosti. Satelit obieha po stabilnej kruhovej dráhe, takže z jeho pohľadu odstredivá sila kompenzuje tú gravitačnú.

$$G\frac{M_Z m}{(R_Z + h)^2} = m\frac{v^2}{R_Z + h}$$

Keď vyjadríme rýchlosť obehu satelitu v poslednej rovnosti pomocou nami hľadaného h, dostaneme

$$\frac{GM_Z}{\omega^2} = h^2(R_Z + h).$$

To je kubická rovnica, ktorá sa síce analyticky riešiť dá, ale je to ťažké. Radšej treba vziať kalkulačky a opäť sa pustiť do binárneho vyhľadávania ako v príklade 34 tohtoročného Náboja, alebo si zostaviť vhodný rekurentný vzťah a numericky ho doraziť, napríklad prepísaním na iteračnú schému

$$h_{i+1} = \sqrt{\frac{GM}{\omega^2\,(R + h_i)}},$$

ktorá pri vhodne zvolených počiatočných podmienkach (stačí aj $h_0 = 0$) rýchlo skonverguje k správnemu výsledku. Rovnica má síce tri korene, ale dva z nich sú záporné, takže ich v zmysle zadania príkladu môžeme vylúčiť a ostane nám hodnota $h \doteq 438\,\mathrm{km}$.

25 Vysvetlime si, čo naozaj znamená preťaženie, aj keď sme to v zadaní naznačili. Je to celková sila, ktorá tlačí mechanicky na teleso, vztiahnutá na jednotku hmotnosti. Teda samotná gravitačná aj elektromagnetická sila spôsobujú nulové preťaženie. Preto, keď taký čajník padá voľným pádom, jeho preťaženie je nulové, a keď stojí na zemi a pôsobí naň normálová sila od podložky, je rovné 1 g.

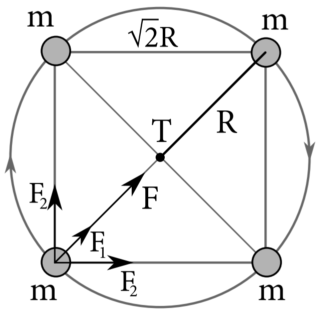
Na základe toho nie je ťažké dospieť k tomu, že Superman môže na čajník pôsobiť maximálnou silou mG, a teda čajník môže byť zrýchľovaný smerom k zemi zrýchlením $G + g$, ale spomaľovaný iba spomalením $G - g$. Ak chce teda Superman položiť čajník na zem čo najrýchlejšie, bude čo najdlhší čas t_1 zrýchľovať a potom zvyšok času t_2 bude brzdiť, až kým nepristane. Pre prejdenú dráhu a maximálnu dosiahnutú rýchlosť teda platí

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(G+g)t_1^2 + vt_2 - \frac{1}{2}(G-g)t_2^2, \\ v &= (G+g)t_1 = (G-g)t_2. \end{aligned}$$

Po úprave týchto rovníc dostaneme celkový čas

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{h}{G}}\left(\sqrt{\frac{G+g}{G-g}} + \sqrt{\frac{G-g}{G+g}}\right) = 2\sqrt{\frac{hG}{G^2 - g^2}}.$$

26 Planéty na seba navzájom pôsobia gravitačnými silami. Situácia je zjavne úplne stredovo súmerná, takže môžeme spočítať, aká sila pôsobí na ľubovoľnú z nich.



Protiľahlá planéta sa nachádza vo vzdialenosti $2R$, preto pôsobí silou veľkosti $F_1 = \frac{Gm^2}{4R^2}$. Priľahlé planéty sa nachádzajú vo vzdialenosti $\sqrt{2}R$, preto budú pôsobiť silami veľkosti $F_2 = \frac{Gm^2}{2R^2}$. Zo symetrie úlohy je zrejmé, že výslednica síl od dvoch priľahlých planét bude smerovať do stredu, preto si ich rozložme do dostredného smeru a smeru naň kolmého. Kolmé zložky sa vybijú a prežijú iba dostredné zložky $\frac{1}{\sqrt{2}}F_2$.

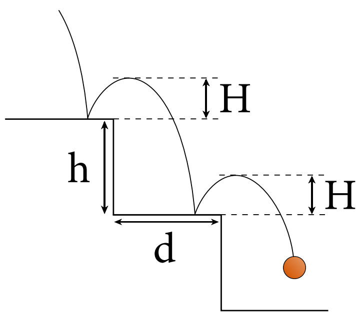
Výsledná sila pôsobiaca na planétu teda bude

$$F = F_1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Gm^2}{R^2}.$$

Táto sila spôsobuje pohyb po kružnici, čiže je dostredivou silou $F = m\omega^2 R$. Z rovnosti dostredivej a výslednej gravitačnej sily dostávame $\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Gm}{R^3}}$. Z definície uhlovej rýchlosti $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dopočítame periódu obehu planét

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}}\sqrt{\frac{R^3}{Gm}}.$$

27 Popíšme si, ako skákanie loptičky po schodisku prebieha. Fero hodí loptičku rýchlosťou v vodorovným smerom. Rýchlosť v tomto smere sa počas celého pohybu nemení, pretože v ňom nepôsobí žiadna sila. Zaujímavejší je pohyb vo zvislom smere. Predpokladajme, že loptička po odraze vystúpa do výšky H nad schod. V tomto momente má vo vertikálnom smere nulovú rýchlosť, preto začne rovnomerne zrýchľovať so zrýchlením g. Celé to trvá čas t_1 a loptička poklesne o výšku $H + h$, kde h je výška schoda.



Popisujú to rovnice

$$H + h = \frac{1}{2}gt_1^2, \tag{1}$$

$$u_1 = gt_1. \tag{2}$$

Po odraze sa zmení vertikálna rýchlosť loptičky na $u_2 < u_1$ a loptička vystúpa do maximálnej výšky H. Je to popísané rovnicami

$$H = u_2 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2, \tag{3}$$

$$0 = u_2 - g t_2. \tag{4}$$

Celkový čas pohybu je

$$t = t_1 + t_2. \tag{5}$$

Za tento čas so v horizontálnom smere musí loptička posunúť o dĺžku schoda d, teda

$$d = vt. \tag{6}$$

Pomer rýchlostí po a pred odrazom je s využitím (2) a (4)

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{t_2}{t_1}. \tag{7}$$

Vylúčme z rovníc (1) a (3) H a za u_2 dosaďme (4). Dostaneme

$$\frac{2h}{g} = t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = (t_1 - t_2)\, t,$$

$$t_1 - t_2 = \frac{2h}{gt}. \tag{8}$$

Z rovníc (5) a (8) vieme dopočítať trvania jednotlivých fáz pohybu

$$t_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \frac{h}{gt}. \tag{9}$$

Dosadením do (7) a vylúčením času pomocou (6) dostávame

$$k = \frac{gd^2 - 2hv^2}{gd^2 + 2hv^2}. \tag{10}$$

Teraz už môžeme dopočítať, do akej výšky $\mathcal{H}$ sa odrazí loptička voľne padajúca z výšky h. Koeficient k nám udáva pomer rýchlostí po a pred odrazom. Takže pre rýchlosť dopadu pred odrazom platí $w_1 = \sqrt{2gh}$, rýchlosť loptičky po odraze, ak vyletí do výšky $\mathcal{H}$, je $w_2 = \sqrt{2g\mathcal{H}}$. Keďže platí $kw_1 = w_2$, tak

$$\mathcal{H} = \frac{w_2^2}{2g} = k^2 h = \left(\frac{gd^2 - 2hv^2}{gd^2 + 2hv^2}\right)^2 h.$$

28 Ako vieme, práca, ktorú vykoná stroj počas cyklu, je daná obsahom útvaru ohraničeného prebiehajúcimi dejmi. Označme tlak a objem plynu v bode 1 diagramu p_1, V_1, podobne v bode 2 p_2, V_1 a v bode 3 nech je p_2, V_3. Prácu vykonanú počas deja potom vypočítame už jednoducho ako

$$W = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1).$$

Ďalej vieme, že Lukaf skúmal stroj, v ktorom bol použitý ideálny plyn, pre ktorý platí stavová rovnica ideálneho plynu. Ak využijeme ešte fakt, že ide o práve jeden mól ideálneho plynu, môžeme zapísať $p_1 V_1 = RT_1$, $p_2 V_3 = RT_3$. Dosadením druhej rovnice v poradí do prvej získame vzťah pre V_3,

$$V_3 = \frac{T_3}{T_1}\frac{p_1}{p_2}.$$

Ďalej podľa zadania vieme, že spojnica bodov 1 a 3 prechádza počiatkom pV diagramu, teda musí nutne platiť úmernosť

$$\frac{p_2}{V_3} = \frac{p_1}{V_1}.$$

Vyjadrením objemu V_3 a dosadením do predchádzajúceho vzťahu získame hodnotu p_2,

$$p_2 = p_1\sqrt{\frac{T_3}{T_1}}.$$

Ak využijeme všetky vzťahy, dosadením do prvej rovnice získame hodnotu

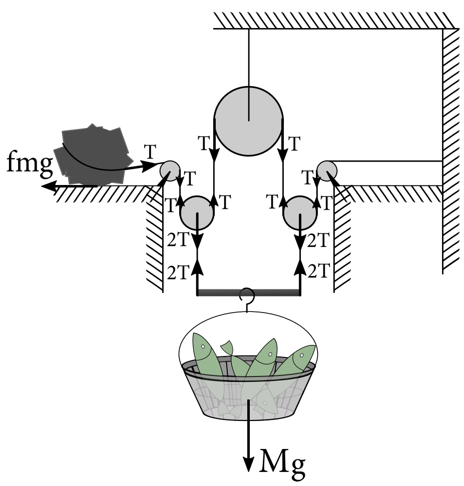
$$W = p_1\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right) V_1\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right) = RT_1\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right)^2 = R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2.$$

29 Základom je zakresliť si všetky sily pôsobiace na rybárov kladkostroj aj s úlovkom a balvanom.

Začnime u balvana. Na ten pôsobí trecia sila maximálnej veľkosti fmg, keďže sa šmýka, a ťahová sila T od lana. To znamená, že jeho pohyb popisuje 2. Newtonov zákon v tvare

$$ma = T - fmg.$$

Predpokladajme, že náš kladkostroj je ideálny. To znamená, že laná sú dokonale pevné, a teda prenášajú silu z jedného konca na druhý. Kladky sú taktiež ideálne, a teda sily aj momenty síl pôsobiace na ne musia byť v rovnováhe. Keď sa budeme riadiť týmito zákonmi, dospejeme k rozloženiu síl ako na obrázku.



Na kôš s rybami pôsobí gravitačná sila Mg a ťahová sila od každého z lán, ktorej hodnota je $2T$. Teda pohybová rovnica má tvar

$$MA = Mg - 4T.$$

Posledné, čo potrebujeme zistiť, je vzťah medzi zrýchleniami A a a. Predstavme si, že lano s balvanom sa posunie o vzdialenosť x doprava. V takom prípade každá z voľných kladiek aj košík s rybami poklesne o $\frac{x}{4}$. Pre zrýchlenia teda musí platí $a = 4A$.

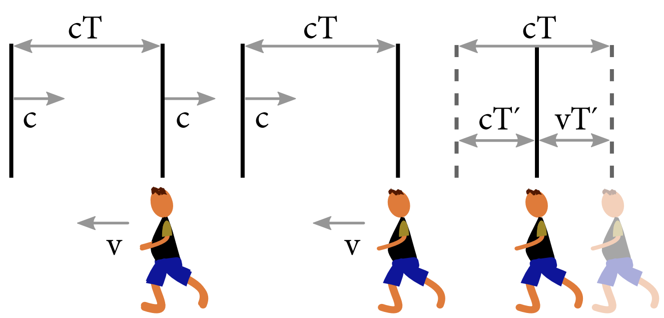
Z pohybových rovníc už ľahko vyjadríme, že

$$A = \frac{M - 4fm}{M + 16m} g.$$

$\boxed{30}$ Keďže Tommy stojí medzi stenou a Enkou, okrem zvuku, ktorý prichádza od Enky, počuje aj zvuk, ktorý sa najprv odrazí od steny a až potom príde do Tommyho ucha. Ak by sa Tommy nepohyboval, tieto dva zvuky – vlnenia budú medzi sebou interferovať a v závislosti od toho, kde sa Tommy postaví, bude počuť Enkino zavýjanie silnejšie alebo slabšie.

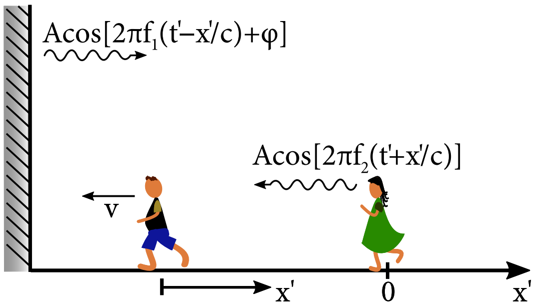
V okamihu akonáhle sa začne Tommy pohybovať sa objaví aj Dopplerov efekt. Ten si rýchlo odvodíme, nie je to nič strašné. Pre jednoduchosť na začiatok uvažujme iba stenu a Tommyho bežiaceho k stene rýchlosťou v. Od steny prichádzádza Enkino zavýjanie, pričom maximá vĺn sú od seba vzdialené práve o vlnovú dĺžku $\lambda = cT$, kde c je rýchlosť zvuku a $T = 1/f$ je perióda Enkinho zavýjania. Tommy však nebude počuť zavýjanie s rovnakou frekvenciou resp. periódou, a to preto, že z jeho pohľadu sú maximá vĺn vzdialené od seba menej, keďže beží smerom k nim.

Uvažujme teda dve maximá vĺn vzdialené od seba cT a pohybujúce sa smerom doprava rýchlosťou zvuku c a Tommyho pohybujúceho sa doľava rýchlosťou v. Keďže ale Tommy beží smerom k ďalšiemu maximu, ktoré sa pobyhuje smerom k nemu, tak ho stretne za čas T', ktorý je menší ako T. Pre čas T' zjavne platí $(c+v)T' = cT$ (viď obrázok). Odtiaľ $T' = \frac{c}{c+v}T$.



Práve sme si odvodili Dopplerov efekt, Tommy bude zavýjanie, ktoré sa odráža od steny, počuť s frekvenciou $f_1 = 1/T' = (1 + v/c)f$. Potom je tu ešte zavýjanie od samotnej Enky. Keďže ale Tommy beží od Enky, jeho rýchlosť má teraz opačný smer, čo sa prejaví zmenou znamienka pri v, t.j. zavýjanie, ktoré prichádza priamo od Enky bude počuť s frekvenciou $f_2 = (1 - v/c)f$. Ak Vám nie je jasné prečo, skúste si nakresliť podobný obrázok!

Posledný efekt, ktorý ešte prichádza do hry, je interferencia (skladanie) vlnení prichádzajúce od steny a od Enky.



Každú (rovinne polarizovanú) vlnu môžeme zapísať v tvare $A\cos(2\pi ft \pm 2\pi/\lambda \cdot x + \varphi)$, kde A je amplitúda vlnenia a φ je fázový posun. Vlnovú dĺžku môžeme vyjadriť pomocou f ako $2\pi/\lambda = 2\pi f/c$. Ak x rastie smerom doprava a pri x je znamenieko $+$, vlna ide doľava; ak je tam znamienko $-$, vlna ide doprava.

V ďalšom zápise sa pri x aj t objavia čiarky, chceme tým len zdôrazniť, že vlnenia skladáme v sústave spojenej s Tommym[3] V našej úlohe máme dve vlnenia, vlnenie prichádzajúce od Enky $A\cos(2\pi f_2(t' + x'/c))$ a vlnenie odrazené od steny $A\cos(2\pi f_1(t' - x'/c) + \varphi)$. Fázový posun φ sme pridali len kvôli korektnosti, pre riešenie úlohy ďalej nie je dôležitý, jeho konkrétna hodnota záleží od toho ako ďaleko sa nachádza Enka od steny.

Na zloženie vlnení využijeme súčtový vzorec

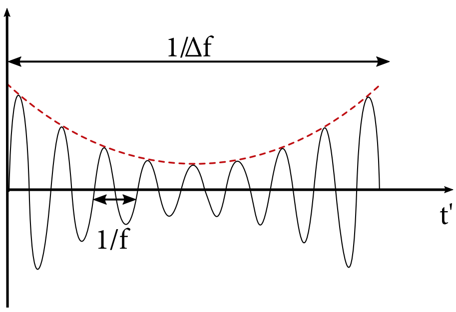
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Pre súčet vlnení potom platí

$$A\cos(2\pi f_2(t' + x'/c)) + A\cos(2\pi f_1(t' - x'/c) + \varphi) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{2\pi\,(f_2+f_1)\,t'}{2} + \frac{2\pi\,(f_2-f_1)\,x'}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\,(f_2-f_1)\,t'}{2} + \frac{2\pi\,(f_2+f_1)\,x'}{2}\right).$$

Keďže sa na vlnenie pozeráme z Tommyho pohľadu v Tommyho sústave, platí $x' = 0$. Ak ešte využijeme fakt, že $f_2 + f_1 = f$ a $f_2 - f_1 = -2v/cf$ a párnosť kosínusu, výrazy sa nám zjednodušia na

$$2A\cos 2\pi ft' \cos\left(2\pi\frac{\cancel{2}\frac{v}{c}f}{\cancel{2}}t'\right).$$



Môžeme všimnúť, že prvý člen je rovnaký ako v prípade rovinnej vlny (nezabudnime, že $x' = 0$), no je modulovaný druhým členom s oveľa nižšou frekvenciou ($v < c$), ktorý moduluje amplitúdu, a teda aj hlasitosť

[3] Ak sa v čase nula nachádzal Tommy pri Enke, platí $x' = x - vt$ a $t' = t$.

výsledného zvuku. Keďže ľudské ucho nie je citlivé na fázu, ale iba na amplitúdu, nevie rozlíšiť medzi stavmi, keď kosínus dosiahne hodnotu 1 a -1. Preto počuje zvuk modulovaný s frekvenciou $\Delta f = 2v/cf$. Odtiaľ už ľahko získame hľadanú frekvenciu Enkinho zavýjania $f = \frac{c}{2v}\Delta f$.

Jednoduchšia možnosť, ako sa dopracovať k riešeniu, bola pozerať sa čo sa deje s vlnením priamo v sústave spojenej s Enkou resp. pevne stojacou stenou. V tejto sústave vlnenie prichádzajúce od Enky $A\cos(2\pi f(t + x/c))$ interferuje priamo s vlnením odrazeným od steny $A\cos(2\pi f(t - x/c) + \varphi)$ vytvárajúc tak stojatú vlnu

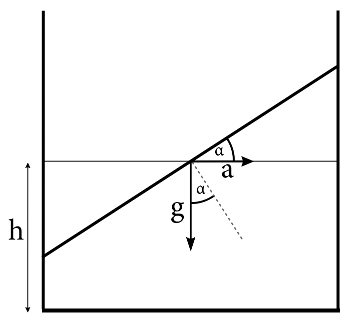
$$A\cos\left(2\pi f\left(t + x/c\right)\right) + A\cos\left(2\pi f\left(t - x/c\right) + \varphi\right) = 2A\cos\left(2\pi t + \pi/2\right)\cos\left(2\pi f x/c - \pi/2\right).$$

V tejto sústave je vlnová dĺžka vlny c/f a uzly resp. kmitne sú od seba vzdialené o polovicu vlnovej dĺžky. A túto vzdialenosť prebehne Tommy za čas $1/(\Delta f) = c/(2fv)$. Zvyšok riešenia je už následne rovnaký ako v prvej metóde výpočtu.

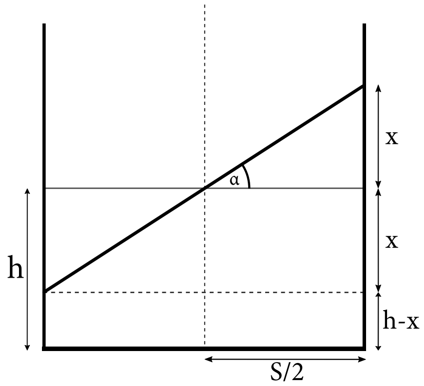
$\boxed{31}$ Vypočítajme najprv pozíciu ťažiska prázdneho pohárika. Vďaka symetrii bude určite ťažisko ležať v určitej výške z_p nad stredom podstavy pohárika, čiže rovno môžeme písať, že ťažisko bude na pozícii $[0; 0; z_p]$. Keďže steny pohárika sú homogénne, môžeme zaviesť plošnú hustotu $\sigma \equiv M/(5s^2)$. Ťažisko každej bočnej steny sa nachádza vo výške $s/2$ a ťažisko spodnej steny je vo výške 0. Ťažisko prázdneho pohárika sa teda nachádza vo výške

$$z_p = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)\cdot(4s^2\sigma) + (0)\cdot(s^2)}{M} = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)\cdot(4s^2\sigma)}{(5s^2)\sigma} = \frac{2}{5}s.$$

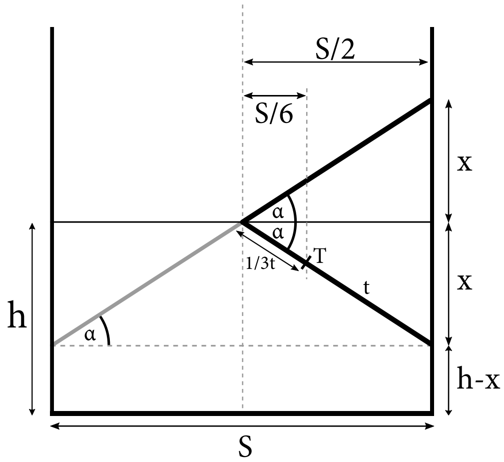
Potom ako Deduško začal s autom brzdiť spomalením a sa hladina kávičky naklonila. V sústave spojenej s autom pôsobí na všetky objekty zotrvačné zrýchlenie a v horizontálnom smere. Okrem toho tu stále pôsobí ťiažové zrýchlenie g smerom nadol. Hladina sa nakloní v takom smere, aby výsledné zrýchlenie bolo kolmé na hladinu kávičky.



Oproti horizontálnemu smeru sa tak káva nakloní o uhol α, pre ktorý platí $\tan(\alpha) = a/g$. Označme x rozdiel výšok hladín na stene pohárika pred a po začatí brzdenia. Pre x platí $\tan(\alpha) = 2x/s$. Odtiaľ $x = \frac{1}{2}(a/g)s$. Vypočítajme teraz pozíciu ťažiska $[x_k, y_k, z_k]$ kávičky potom čo sa nakloní. Kávičku možno rozdeliť na dva útvary. Kváder so štvorcovou podstavou s a výškou $(h - x)$ a zrezaný hranol so štvrocovou podstavou a bočnou stenou výšky $2x$.



Ťažisko kvádra s výškou $(h-x)$ sa nachádza na pozícii $[0; 0; (h-x)/2]$. Ťažisko zrezaného hranolu veľmi ľahko určíme, ak ho budeme počítať vzhľadom na bod $[0; 0; h]$. Keďže táto časť kávičky má tvar trojbokého hranolu, v podstate počítame ťažisko trojuholníka. Ťažisko trojuholníka leží na ťažnici t, ktorá spája stred prepony a protiľahlého vrcholu v jednej tretine jej dĺžky. Z podobnosti trojuholníkov vieme, že ťažisko sa vzhľadom na bod $[0; 0; h]$ nachádza o $s/6$ viac doprava a o $(s/6)\tan(\alpha)$ nižšie. Ťažisko trojbokého hranola teda leží na pozícii $[s/6; 0; h - (s/6)(a/g)]$.



Ostáva už vypočítať len spoločné ťažisko $[x_t; y_t; z_t]$ všetkých častí

$$x_t = \frac{(0)\cdot(M) + (0)\cdot((h-x)s^2\rho) + (s/6)\cdot(xs^2\rho)}{M + (h-x)s^2\rho + xs^2\rho} = \frac{s^4\rho}{12(M+hs^2\rho)}\frac{a}{g} = \frac{1}{36}s,$$

$$y_t = \frac{(0)\cdot(M) + (0)\cdot((h-x)s^2\rho) + (0)\cdot(xs^2\rho)}{M + (h-x)s^2\rho + xs^2\rho} = 0,$$

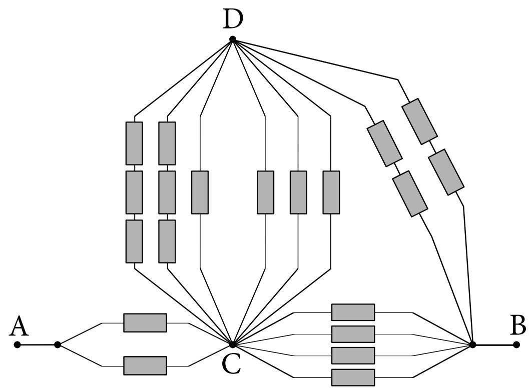
$$z_t = \frac{\left(\frac{2}{5}s\right)\cdot(M) + \left(\frac{h-x}{2}\right)\cdot((h-x)s^2\rho) + \left(h - \frac{s}{6}\frac{a}{g}\right)\cdot(xs^2\rho)}{M + (h-x)s^2\rho + xs^2\rho} = \frac{\frac{2sM}{5} + \frac{s^2\rho}{2}\left(h^2 + \frac{1}{6}\frac{a^2}{g^2}s^2\right)}{M + hs^2\rho} = \frac{101}{360}s.$$

Ťažisko Deduškovej kávičky teda leží na pozícii

$$\left[\frac{1}{36}s; 0; \frac{101}{360}s\right].$$

$\boxed{32}$ Ako prvé si pre jednoduchosť označíme odpor štvrťkružnice odporového drôtu ako $R = \frac{1}{2}\lambda\pi r$, keďže každý odpor medzi ľubovoľnými dvoma uzlami olympijského zapojenia vieme vyskladať zo štvrťkružníc.

Teraz k samotnej pointe úlohy. Zapojenie vyzerá viac ako komplikovane a s istotou by sme jeho odpor mohli vypočítať pomocou Kirchhoffových zákonov. To však neurobíme, ale využijeme fakt, že medzi bodmi s rovnakým potenciálom po spojení nebude tiecť žiaden prúd, a teda výsledný odpor sa nezmení. Ľahko nahliadneme, že sú to práve tie body, ktoré sú symetrické podľa hlavnej osi prechádzajúcej bodmi A a B. Po prekreslení a zamenení odporového drôtu za rezistory s odporom R dostávame:

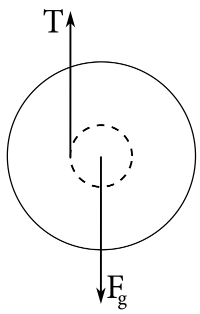


Takto sme dostali schému už len sériovo a paralelne zapojených rezistorov, čo je ľahké spočítať. Preto vypíšeme len medzi výsledky bez postupu. Odpor medzi bodmi C a D má hodnotu $R_{\mathrm{CD}} = \frac{3}{14}R$, a teda odpor medzi bodmi C a B je $R_{\mathrm{CB}} = \frac{17}{82}R$.

Výsledný odpor medzi bodmi A a B je teda

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{29}{41}R = \frac{29}{82}\lambda\pi r.$$

33 Jojo je odmotané práve vtedy, keď prejde jeho ťažisko dráhu L. To znamená, že ak zistíme zrýchlenie ťažiska joja, čas už len jednoducho dostaneme ako $t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$.[4]



Na to, aby sme zistili zrýchlenie joja, potrebujeme poznať všetky pôsobiace sily a momenty síl v sústave. Ako vidíme na obrázku, sily sú len dve. Gravitačná $(2M+m)g$ a ťahová v lanku T. Pre jojo teda musí platiť pohybivá rovnica

$$(2M + m)a = (2M + m)g - T.$$

Keď sa pozrieme na momenty síl vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom joja, zistíme, že je iba jeden. Pre rotačný pohyb preto platí

$$I_0\varepsilon = Tr,$$

[4] Samozrejme za predpokladu, že zrýchlenie je konštantné a nenulové, čo – ako neskôr uvidíme – je.

kde I_0 je moment zotrvačnosti joja okolo spomínanej osi. Keďže moment zotrvačnosti je aditívna veličina a moment zotrvačnosti homogénnych valcov má tvar $\frac{1}{2}mr^2$, tak $I_0 = \frac{1}{2}mr^2 + 2\frac{1}{2}MR^2$.

Ako posledné si musíme uvedomiť, že lanko je pevne pripevnené k joju, takže pri odmotávani po povrchu sa nekĺže, ale pekne odvíja. Teda $a = \varepsilon r$.

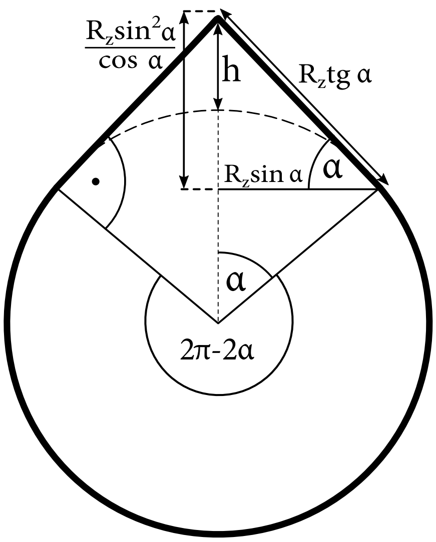
Teraz už stačí iba chvíľku pomasírovať rovnice a dostaneme zrýchlenie

$$a = \frac{(2M+m)r^2}{MR^2 + (2M + \frac{3}{2}m)r^2} g,$$

ktoré je naozaj konštantné, tak ako sme predpokladali. A teda

$$t = \sqrt{\frac{2MR^2 + (4M+3m)r^2}{(2M+m)r^2}\frac{L}{g}}.$$

$\boxed{34}$ Označme hľadanú výšku stĺpu h. Aby bol opasok v každom bode napnutý, v miestach, kde sa prestáva dotýkať Zeme, musí mať smer dotyčnice. Celý problém parametrizujeme pomocou uhla α, ktorý vyjadruje pozíciu miesta, kde sa prestáva opasok dotýkať Zeme voči pozícii stĺpu. Polomer Zeme označme R_Z a rozdiel obvodu Zeme a dĺžky celého opasku o označme Δ.



Opasok môžeme rozdeliť na dve časti. Časť kružnice vytýčenú obvodovým uhlom $2\pi - 2\alpha$ a časť tvorenú preponami pravouhlých trojuholníkov. Dĺžku časti kružnice vypočítame jednoducho ako $(2\pi - 2\alpha)R_Z$. Dĺžku prepôn určíme taktiež jednoducho, ak si uvedomíme, kde všade sa nachádza uhol α. Po troške geometrie a využitím zopár pravouhlých trojuholníčkov zistíme, že dĺžky prepôn sú $R_Z \tan(\alpha)$.

Pre celkovú dĺžku opasku platí

$$o = 2\pi R_Z + \Delta = (2\pi - 2\alpha)R_Z + 2R_Z \tan(\alpha).$$

Nachvíľku sa budeme tváriť, že sme už túto rovnicu pre α vyriešili. Ostáva nám už len určiť výšku stĺpu h. Po troške geometrie zistíme, že musí platiť

$$R_Z\left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha)\right) = h + R_Z \implies h = R_Z\left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha) - 1\right)$$

OK, teraz späť k pôvodnému problému, ako vyriešiť rovnicu pre α. Túto rovnicu zjavne nevieme riešiť všeobecne, keďže sa v nej vyskytuje kombinácia výrazov obsahujúcich α a $\tan(\alpha)$. Takže sa k riešeniu budeme musieť dopracovať nejakou približnou metódou. Ukážeme si dva postupy, prvý z nich je založený na aproximácii funkcií Taylorovým rozvojom[5], druhý z nich na prostoduchom riešení rovnice po dosadení numerických hodnôt napríklad metódou delenia intervalu – teda binárnym vyhľadávaním.

Taylorov rozvoj

Zo zadania vieme, že $\Delta = 1\,\mathrm{m}$, čo je rádovo menej ako $R_\mathrm{Z} = 6371\,\mathrm{km}$. Intuitívne asi tušíme, že h bude voči R_Z relatívne malé, a preto môžeme očakávať, že aj samotný uhol $\alpha \ll 1$. Pre α blízke nule platí :

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha) &\approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \ldots\\
\cos(\alpha) &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots\\
\tan(\alpha) &\approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \ldots\\
\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} &\approx \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{6} + \ldots
\end{aligned}
$$

Dosadením aproximácie $\tan(\alpha)$ do rovnice získame približné riešenie pre α v najnižšom ráde

$$
\begin{aligned}
2\pi R_\mathrm{Z} + \Delta &= 2\pi R_\mathrm{Z} - 2\alpha R_\mathrm{Z} + 2\alpha R_\mathrm{Z} + 2R_\mathrm{Z}\frac{\alpha^3}{3} + \ldots\\
\alpha &\approx \left(\frac{3}{2}\frac{\Delta}{R_\mathrm{Z}}\right)^{1/3}.
\end{aligned}
$$

Použitím Taylorovho rozvoja v druhej rovnici

$$
h = R_\mathrm{Z}\left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha) - 1\right) \approx R_\mathrm{Z}\left(\frac{\alpha^2}{2} + \ldots\right) \approx \frac{1}{2}R_\mathrm{Z}\left(\frac{3}{2}\frac{\Delta}{R_\mathrm{Z}}\right)^{2/3} \doteq 121{,}46\,\mathrm{m}.
$$

Binárne vyhľadávanie

Asi najjednoduchšia metóda, akú môžeme použiť, je *binárne vyhľadávanie*. Nemusíte sa báť, nie je to nič strašné. Najprv si však z rovnice urobíme funkciu $f(\alpha) = \Delta + 2\alpha R_\mathrm{Z} - 2R_\mathrm{Z}\tan(\alpha)$. Teraz sa budeme pozerať, ako sa mení znamienko tejto funkcie na nejakom intervale.

Ak sa totiž zmení znamienko na našom intervale, určite tam bude ležať koreň.[6] Celá myšlienka je založená na rozumnom zmenšení tohto intervalu, napr. aby sa hodnoty h vypočítané zo začiatočného a konečného bodu intervalu nelíšili iba v metroch – a ak si chceme byť istí, tak aj na prvom desatinnom mieste.

1. Na začiatku si tipneme, v akom intervale $\langle x, y\rangle$ bude ležať riešenie. V našom prípade to je ľahké, riešenie určite leží medzi 0 a 0,1 (prvotný tip).
2. Následne sa pozrieme na hodnotu funkcie $f(\alpha)$ v bode $\alpha = \frac{x+y}{2}$. Podľa toho, aké je znamienko funkcie v tomto bode, si v ďalšom kroku zoberieme znovu taký interval, na ktorom sa mení znamienko funkcie. Čiže zmeníme buď x alebo y na terajší stred.

[5] Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0 je $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)'}{1!}(x - x_0) + \frac{f(x_0)''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$, kde čiarky značia derivácie funkcie v danom bode.

[6] Toto tvrdenie vskutočnosti platí iba pre spojité funkcie – také, ktorých graf sa dá „nakresliť jedným ťahom“.

3. Postup opakujeme, pokiaľ interval nie je dostatočne malý, v našom prípade pokiaľ sa vypočítané hodnoty h nelíšia viac ako na prvom desatinnom mieste.

Po niekoľkých iteráciách sa opäť dostaneme k hodnote 121 m.

35 Označme C^* kapacitu Polika, keď je obkolesený zo všetkých strán nekonečným množstvom vody, v Samovej terminológii je „úplne potopený".

Zo symetrie ľahko vieme, že ak Polika obkoleseného vákuom rozdelíme na polovicu, každá z polgúľ bude mať polovičnú kapacitu. Rovnako na to môžeme prísť, ak si uvedomíme, že dve polgule tvoria dva kondenzátory zapojené paralelne. Na tomto výsledku by sa nič nezmenilo, ak by bol Polik v ľubovoľnom dielektriku, teda je úplne jedno, aký materiál ho obklopuje, polovica Polika má presne polovičnú kapacitu.

Ak necháme Polika voľne plávať na hladine, keďže má akurát polovičnú hustotu ako voda, práve polovica Polika je potopená a polovica nad hladinou. Keďže povrch Polika je kovový, tvorí ekvipotenciálnu plochu. Na každú z polovíc Polika, ležiacu každú v inom dielektriku, sa tak pokojne môžeme pozerať ako na samostatný kondenzátor a na celého Polika ako na paralelné zapojenie týchto kondenzátorov. Pre kapacitu Polika v tomto prípade teda platí

$$C_1 = \frac{C_0}{2} + \frac{C^*}{2}.$$

Odtiaľ už ľahko získame hodnotu $C^* = 2C_1 - C_0$.

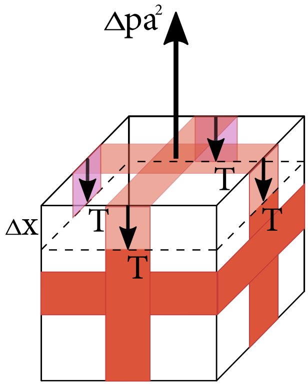
36 Pri riešení tejto úlohy využijeme princíp virtuálnych prác. Vďaka tomuto postupu zistíme, ako súvisí napäťová sila T v stuhe od pretlaku Δp v krabici. Maximálny možný pretlak potom už dostaneme iba jednoducho tým, že do získaného vzťahu dosadíme za napäťovú silu T hraničnú silu F zo zadania.

Princíp virtuálnych prác hovorí to, že ak sa súčasti fyzikálneho systému v stave rovnováhy posunú o nejaké malé virtuálne posunutie pod vplyvom určitých síl, tak ak je systém naozaj v stave rovnováhy, potom súčet všetkých čiastkových prác vykonaných týmito silami je nulový.[7]

Skúsme aplikovať princíp virtuálnych prác v našom prípade. Ak je v krabici pretlak Δp, na každú zo šiestich štvorcových stien kocky pôsobí sila $\Delta p a^2$. Keďže sú steny kocky z veľmi tvrdého kartónu, nemôžu sa deformovať, ale len posunúť o nejaké maličké Δx. Keďže je však každá stena kocky pritláčaná dvomi stuhami, ktoré sú napnuté, pri posúvaní stien krabice musíme vykonať aj prácu, vďaka ktorej prekonáme napäťové sily v stuhách.

Ak si uvedomíme, že na každú stenu krabice pôsobia dve stuhy spolu celkovou silou $4T$ (každá z dvoch stúh sa na krajoch každej steny dvakrát zohne, čiže každej stene pripadajú štyri zohnutia stúh – viď obrázok), ľahko vypočítame prácu, ktorú musíme prekonať pri posunutí steny krabice o Δx ako $4T\Delta x$.

[7] Pod pojmom virtuálna práca máme na mysli prácu, ktorú vykonajú silu, ak by naozaj túto prácu tieto sily konali, avšak ako už naozaj názov napovedá, táto práca sa v skutočnosti silami nekoná, keďže posunia sú iba myslené – virtuálne a nič sa v skutočnosti nehýbe. Celý koncept je teda naozaj postavený na tom, ak táto sila vykoná prácu… potom…

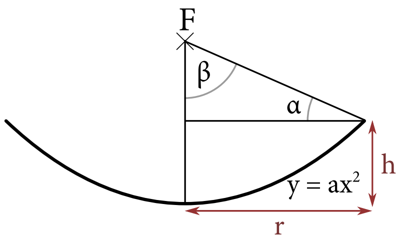


Keďže stien je spolu šesť, podľa princípu virtuálnych prác musí byť celková práca, ktorú vykonáme posunutím všetkých stien krabice, rovnaká ako celková práca, ktorú vykonáme natiahnutím všetkých stúh.

$$6 \cdot \Delta p a^2 = 6 \cdot 4 \cdot T \implies T = \frac{1}{4} \Delta p a^2$$

Ak dosadíme do T maximálnu možnú silu, ktorú ešte stuhy zvládnu, nájdeme maximálnu možnú hodnotu pretlaku $\frac{4F}{a^2}$.

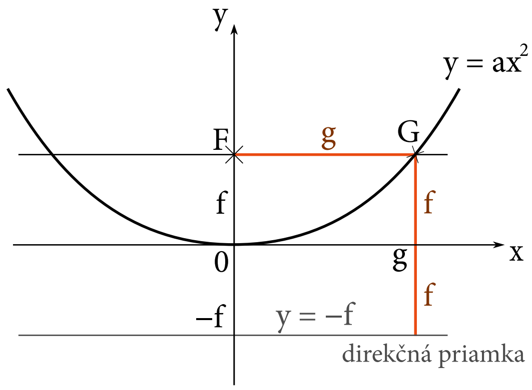
37 Úloha je síce trojrozmerná, ale paraboloid je rotačne symetrický, takže sa nám stačí pozerať na ľubovoľný dvojrozmerný prierez. Týmto prierezom bude samozrejme časť paraboly. Tú si môžeme zorientovať do súradnicovej sústavy tak, aby bola súmerná vzhľadom na os y a jej vrchol ležal v počiatku. Slnko potom bude ležať priamo na osi y v (prakticky) nekonečnej vzdialenosti.



V týchto súradniciach je naša parabola definovaná predpisom $y = ax^2$, pričom konštantu a vieme určiť zo zadania. Vieme totiž, že x-ovej súradnici r prislúcha práve okraj zrkadla, ktorého zvislá vzdialenosť od vrchola musí byť h. Platí teda

$$ar^2 = h \quad \implies \quad a = \frac{h}{r^2}.$$

Predpis paraboly teda poznáme, potrebujeme ešte nájsť ohnisko. Dá sa nájsť rôznymi spôsobmi, napríklad pomocou odrazu lúča alebo derivovaním, ukážeme si však jednoduchší postup. Parabola sa dá popísať aj ako množina bodov, ktorých vzdialenosť od ohniska a priamky (zvanej *direkčná priamka*) je rovnaká. Je teda zrejmé, že vrchol paraboly bude práve v polovici dĺžky najkratšej úsečky spájajúcej ohnisko s priamkou. Označme si rovnaké vzdialenosti medzi ohniskom a vrcholom a vrcholom a direkčnou priamkou f. Ak je vrchol paraboly v počiatku súradnicovej sústavy, ohnisko sa nachádza v bode $[0, f]$ a direkčná priamka je daná predpisom $y = -f$.



Teraz sa nám stačí pozrieť na ľubovoľný bod paraboly a zistiť, pre akú hodnotu f bude podmienka rovnakých vzdialeností splnená. Aby sme sa vyhli Pytagorovej vete, zvolíme si tento ľubovoľný bod (označený G) tak, aby jeho y-ová súradnica bola práve f. Vzdialenosť od ohniska bude potom rovná jeho x-ovej súradnici, ktorú si označíme g.

Z predpisu paraboly $y = ax^2$ vieme, že pre bod G platí $f = ag^2$; z podmienky rovnakých vzdialeností zas poznáme vzťah $g = 2f$. Riešením tejto jednoduchej sústavy rovníc získame riešenie $f = \frac{1}{4a}$, čo je po dosadení za a rovné $\frac{r^2}{4h}$.

Ostáva nám vypočítať potrebný uhol. Parabolu si otočíme tak, aby x-ová súradnica ohniska bola väčšia, než x-ová súradnica pravého okraja; a teda aby masť kvapkajúca z ohniska už samotné zrkadlo nemohla zasiahnuť. To nastane práve pri otočení o uhol β. Podľa zadania však nehľadáme uhol od zenitu, ale od obzoru, teda doplnok uhla β do 90°. No a to je práve uhol α z obrázka. Jednoduchou trigonometriou získame výsledok

$$\tan\alpha = \frac{f-h}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{\frac{r^2}{4h}-h}{r} = \arctan\frac{r^2-4h^2}{4hr}.$$

38 Uvažujme, že teplo medzi hrncom a zvyškom miestnosti sa prenáša iba žiarením, to znamená, že sa budeme riadiť Stefan-Boltzmannovým zákonom žiarenia. Keď je Čajkin hrniec v stave teplotnej rovnováhy, všetku energiu, ktorú vyžaruje, musí aj prijímať, či už od platničky alebo od okolia. Matematicky povedané, musí platiť

$$\sigma S\, T_1^4 = P + \sigma S\, T_0^4,$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konštanta, S povrch hrnca, P výkon platničky, T_1 teplota vody a hrnca, a T_0 teplota okolia, čiže stien kuchyne.

Keď hrniec preloží na väčšiu platničku, výkon platničky sa zvýši na $2P$, no stúpne aj množstvo vyžarovanej energie a prebytok sa minie na vyparovanie vody. Teda platí, že

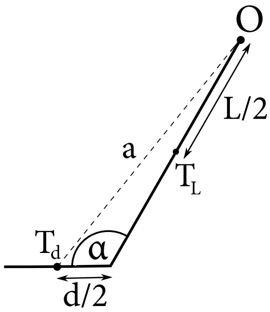
$$\sigma S\, T_2^4 + \frac{\rho V l}{t} = 2P + \sigma S\, T_0^4,$$

pričom T_2 je teplota varu vody, ρ hustota vody, V objem vody, l skupenské teplo vyparovania vody, a t čas, ktorý hľadáme.

Jednoduchou úpravou rovníc dostaneme čas, za ktorý sa voda vyparí

$$t = \frac{V\rho l}{P\left(2 - \frac{T_2^4 - T_0^4}{T_1^4 - T_0^4}\right)} \doteq 14\ 097\,\mathrm{s} \doteq 3{,}9\,\mathrm{h}.$$

39 Dĺžková hustota hokejky za predpokladu zo zadania je $\lambda = \frac{m}{L+d}$. Momenty zotrvačnosti budeme hľadať zvlášť pre rukoväť a zvlášť pre čepeľ a potom už len využijeme aditivitu momentu zotrvačnosti vzhľadom na spoločnú os otáčania. Budeme vychádzať zo známeho momentu zotrvačnosti tyče hmotnosti M a dĺžky x okolo ťažiska $J_0 = \frac{1}{12}Mx^2$[8]. Ďalej budeme používať Steinerovu vetu, ktorá hovorí, že ak poznáme moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej ťažiskom J_0, tak moment zotrvačnosti okolo osi rovnobežnej s touto osou a vzdialenej r je $J_r = J_0 + Mr^2$.



Zrátajme najskôr moment zotrvačnosti rukoväte hokejky. S využitím Steinerovej vety dostávame

$$J_L = \frac{1}{12}m_L L^2 + m_L\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL}{L+d}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)L^2 = \frac{1}{3}\frac{mL^3}{L+d}$$

Teraz sa pozrime na čepeľ. Vzdialenosť ťažiska čepele od osi otáčania určíme pomocou kosínusovej vety $a^2 = L^2 + \frac{d^2}{4} - Ld\cos\alpha$. Moment zotrvačnosti čepele je potom

$$J_d = \frac{1}{12}m_d d^2 + m_d a^2 = \frac{md}{L+d}\left(L^2 + \frac{1}{3}d^2 - Ld\cos\alpha\right)$$

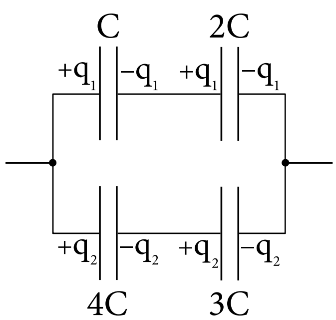
Moment zotrvačnosti hokejky okolo osi otáčania O je potom

$$J = J_L + J_d = m\frac{\frac{1}{3}L^3 + L^2 d - Ld^2\cos\alpha + \frac{1}{3}d^3}{L+d}$$

Využime ešte informácie zo zadania: $L = 5d$ a $\alpha = 120°$. Výsledok sa nám zjednoduší na

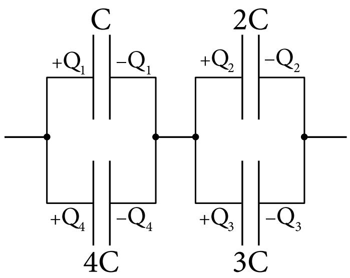
$$J = \frac{139}{12}md^2 \doteq 11{,}6\, md^2.$$

40 Pozrime sa najskôr na prípad pred zopnutím spínača. V takom prípade máme paralelné zapojenie dvoch vetiev, každú tvorenú dvomi do série zapojenými kondenzátormi.



[8] Ak nie je známy, dá sa vypočítať škálovaním alebo integrovaním.

Na dvojiciach kondenzátorov C, $2C$ a $3C$, $4C$ musia byť rovnaké náboje[9] – označme ich q_1, resp. q_2. Nie je problém dopočítať, aký náboj bude na jednotlivých kondenzátoroch, no prv než sa pustíme do bezhlavého rátania, zamyslime sa nad tým, čo chceme vypočítať. Zaujíma nás, aký náboj pretečie cez spínač po jeho zopnutí. Cez spínač preteká náboj spomedzi kondenzátorov C, $2C$ medzi kondenzátory $3C$, $4C$. To znamená, že nás zaujíma, ako sa zmení súčet nábojov na platniach kondenzátorov C, $2C$, resp. $3C$, $4C$, priľahlých k spínaču. Tento súčet nábojov pred zopnutím však vieme určiť bez akejkoľvek námahy, kedže na oboch z dvojice kondenzátorov je rovnaký náboj, teda ich súčet je $(-q_1) + (+q_1) = (-q_2) + (+q_2) = 0$.



Preskúmajme teraz situáciu po zopnutí spínača. V tomto prípade sú uzly medzi dvojicami kondenzátorov spojené bezodporovo, preto ich možno stiahnuť do jedného a schému prekresliť na sériovo zapojené 2 paralelné zapojenia 2 kondenzátorov. Tentokrát môže náboj prechádzať aj medzi pôvodnými vetvami, takže na jednotlivých kondenzátorch môžu byť rôzne náboje – označme ich postupne Q_1 až Q_4. Čo ale platiť musí, je, že náboj nevie pritiecť do časti obvodu medzi kondenzátormi, teda celkový náboj na priľahlých platniach kondenzátorov musí byť nulový

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0. \tag{1}$$

Zrátajme si celkovú kapacitu uvažovaného zapojenia kondenzátorov. Kapacity sa skladajú presne naopak ako odpory, teda výsledná kapacita zapojenia je $\frac{5}{2}C$. Na vonkajších platniach kondenzátorov je dokopy celkový náboj $Q_1 + Q_4$ a napätie na nich je U, teda možno písať

$$\frac{Q_1 + Q_4}{\frac{5}{2}C} = U. \tag{2}$$

Vieme, že v každej uzavretej slučke má byť súčet napätí nulový. Napíšme si rovnice pre slučky s kondenzátormi C, $4C$ a $2C$, $3C$.

$$\frac{Q_1}{C} = \frac{Q_4}{4C}, \tag{3}$$

$$\frac{Q_2}{2C} = \frac{Q_3}{3C}. \tag{4}$$

Máme sústavu 4 lineárnych rovníc o 4 neznámych, ktorú potrebujeme vyriešiť. Konkrétne nás zaujíma dvojica nábojov Q_1, Q_2, resp. Q_3, Q_4, pretože nás zaujíma iba súčet nábojov na dvojici susedných kondenzátorov v pôvodnom zapojení. Riešením tejto sústavy je

$$Q_1 = \frac{1}{2}CU,$$

$$Q_2 = CU,$$

$$Q_3 = \frac{3}{2}CU,$$

[9] Pretože medzi dvojicu kondenzátorov náboj nemá ako dotiecť.

$$Q_4 = 2CU.$$

Zoberme si napríklad súčet nábojov na vnútorných platniach kondenzátorov C, $2C$:

$$(-Q_1) + (+Q_2) = \frac{1}{2}CU.$$

Pôvodne tam však bol nulový náboj, takže tento náboj tam musel pretiecť cez vetvu so spínačom. Cez spínač preto po zopnutí pretečie náboj $\frac{1}{2}CU$.

41 Zaveďme najprv označenie pre predĺženie pružín, x_1 pre spodnú pružinu s tuhosťou K, a x_2 pre vrchnú pružinu s tuhosťou k.

Vypočítajme predĺženie pružín v stave rovnováhy. Vieme, že sily aj momenty síl pôsobiace na ideálnu kladku musia byť nulové, takže platí

$$mg = Kx_1^0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1^0 = \frac{mg}{K},$$
$$mg + Kx_1^0 = kx_2^0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2^0 = \frac{2mg}{k}.$$

Ideálna kladka je nehmotná, to znamená, že sily a momenty síl pôsobiace na ňu musia byť nulové nie len v stave rovnováhy. Analogickým spôsobom dostaneme všeobecne platný vzťah $x_1 = \frac{k}{2K}x_2$.

Predstavme si teraz, že systém okolo rovnovážnej polohy kmitá. Povedzme, že závažie je vychýlené z rovnovážnej polohy smerom nadol[10] o x' a pohybuje sa rýchlosťou v. Ak zvolíme hladinu nulovej potenciálnej energie v rovnovážnej polohe, potenciálna energia závažia je $-mgx'$, a jeho kinetická energia je $\frac{1}{2}mv^2$.

Potenciálne energie pružín sa pri vychýlení taktiež zmenia oproti rovnovážnej polohe. Konkrétne potenciálna energia spodnej pružiny je $\frac{1}{2}K\left(x_1^0 + x_1'\right)^2$ a vrchnej je $\frac{1}{2}k\left(x_2^0 + x_2'\right)^2$, pričom x_1' a x_2' sú výchylky pružín z rovnovážnej polohy. Aj pre ne platí, že $x_1' = \frac{k}{2K}x_2'$, no naviac sú zviazané s výchylkou závažia vzťahom

$$x' = x_1' + 2x_2'.$$

V tomto prípade sa energia zachováva, keďže v systéme neuvažujeme trenie. Teda

$$\begin{aligned} E = \text{konšt.} &= -mgx' + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\left(x_1^0 + x_1'\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2^0 + x_2'\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}K\left(x_1^0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2^0\right)^2 + \left[Kx_1^0x_1' + kx_2^0x_2' - mg\left(x_1' + 2x_2'\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}Kx_1'^2 + \frac{1}{2}kx_2'^2 + \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Prvé dva členy výrazu su konštantné a tretí je nulový vďaka podmienkam pre rovnovážnu polohu. To znamená, že pri kmitaní systému sa „prelieva" energia iba medzi zvyšnými členmi a teda platí

$$E' = \text{konšt.} = \frac{1}{2}Kx_1'^2 + \frac{1}{2}kx_2'^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{4}{k} + \frac{1}{K}}x'^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Tento výsledok by mal byť každému známy ako energia harmonického oscilátora, ktorého perióda je určená konštantami pri x'^2 a v^2. Katkina hračka teda kmitá s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{4}{k} + \frac{1}{K}\right)}.$$

[10] Pokojne by mohlo byť vychýlené aj nahor, vo všeobecnosti na tom nezáleží.

42 Označme si najmenšiu šupku číslom 1 a najväčšiu šupku číslom 3, rovnako budeme indexovať náboje a potenciály na šupkách. Keďže ide o kondenzátor, pre súčet nábojov na šupkách musí platiť

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Predstavme si, že na druhú šupku privedieme náboj Q a držíme ju na potenciáli U, potom $Q_1 + Q_3 = -Q$. Potenciál na prvej a tretej šupke môžeme položiť rovný nule. (Dôležitý je len rozdiel potenciálov medzi prvou a druhou resp. treťou a druhou šupkou. Potenciálový rozdiel držíme v kondenzátore konštantný. V našom prípade je rovný práve U.) Kapacitu Samkovej cibuľky vypočítame jednoducho, ak nájdeme aký je súvis medzi potenciálovým rozdielom U a nábojom na kondenzátore Q. ($C \equiv Q/U$)

Pre potenciálové rozdiely medzi šupkami musí platiť $\varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1 = U$. Spočítať potenciálové rozdiely nebude ťažké, len si musíme uvedomiť, že elektrické pole medzi nejakými dvomi šupkami (napr. 2 a 3) je určené len nábojmi, ktoré ležia na menších šupkách (v tomto príklade 1 a 2). Prečo? Na chvíľku si predstavme, že máme iba jednu kovovú šupku nabitú nábojom Q. Mimo šupky, vo vzdialenosti r od stredu, má elektrické pole radiálny smer a veľkosť $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, vo vnútri šupky je však elektrické pole nulové a potenciál konštantný a rovnaký ako na povrchu. Pekné geometrické vysvetlenie nájdete vo vzoráku k príkladu 36 z Náboja z roku 2015.

Potenciálový rozdiel $\varphi_2 - \varphi_3$ je

$$U = \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right) + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right).$$

Potenciálový rozdiel $\varphi_2 - \varphi_1$

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right).$$

Položením týchto rovníc do rovnosti, využitím $Q_2 = Q$ vieme vyjadriť $Q_1 = -Q/4$. Ak teraz vložíme túto informáciu do druhej rovnice, získame hľadaný vzťah medzi U a Q,

$$U = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{2R}.$$

Odtiaľ už ľahko vidíme, že kapacita Samkovej cibuľky je $32\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R$.

43 Začneme tým, že si vypočítame hmotnosť celého válova. Zatiaľ uvažujme, že má plošnú hustotu σ. Ten je zložený z dvoch podstáv s plochu $\frac{1}{2}\pi R^2$ a plášta plochy πRH. Teda válov má hmotnosť

$$m = \sigma\pi R(R + H).$$

Ako ďalšie zistíme polohu ťažiska válova. Je jasné, že sa bude nachádzať na osi symetrie, takže nás zaujíma iba vzdialenosť od stredu „pôvodne celého" valca. Teda dostávame

$$r_\mathrm{t} = \frac{2 \cdot \sigma\frac{\pi}{2}R^2\frac{4}{3\pi}R + \sigma\pi RH\frac{2}{\pi}R}{m} = \frac{R}{\pi\,(R + H)}\left(\frac{4}{3}R + 2H\right).$$

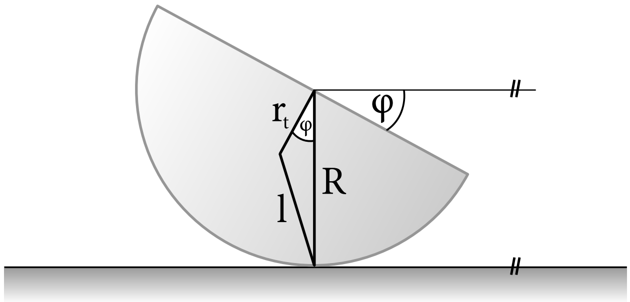
Keď vychýlime válov z rovnovážnej polohy o uhol φ, jeho potenciálna energia stúpne o

$$E_\mathrm{p} = mgr_\mathrm{t}(1 - \cos\varphi).$$

Kinetickú energiu môžeme vyjadriť ako kinetickú energiu otáčania okolo okamžitej osi otáčania, avšak tá sa bude neustále meniť. Preto

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I_\mathrm{A} \omega^2,$$

kde I_A je moment zotrvačnosti okolo aktuálnej osi otáčania. Ťažisko bude od tejto osi nej vzdialené o l (viď obrázok), pričom platí kosínusová veta $l^2 = r_\mathrm{t}^2 + R^2 - 2r_\mathrm{t} R \cos\varphi$.



To, čo nepoznáme, je práve moment zotrvačnosti, takže sa pusťme do jeho počítania. V prvom rade potrebujeme zistiť moment zotrvačnosti jednotlivých častí válova okolo ich ťažiska $I_{\mathrm{T}n}$ a následne okolo osi otáčania $I_{\mathrm{A}n}$. Použijeme na to dvakrát Steinerovu vetu.

Pre podstavy dostávame

$$I_\mathrm{T1} = \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 - \frac{1}{2}\sigma\pi R^2 \left(\frac{4}{3\pi}R\right)^2 = \sigma\pi R^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2}\right),$$
$$I_\mathrm{A1} = I_\mathrm{T1} + \frac{1}{2}\sigma\pi R^2 l^2 = \sigma\pi R^4 \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\cos\varphi\right).$$

Rovnako pre plášť dostávame

$$I_\mathrm{T2} = \sigma\pi R^3 H - \sigma\pi R H \left(\frac{2}{\pi}R\right)^2 = \sigma\pi R^3 H \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right),$$
$$I_\mathrm{A2} = I_\mathrm{T2} + \sigma\pi R H l^2 = \sigma\pi R^3 H \left(2 - \frac{4}{\pi}\cos\varphi\right).$$

Nás budú zaujímať malé kmity, takže uhol φ bude veľmi malý. Pre malé uhly φ ale platí[11] $\cos\varphi \approx 1$, takže výsledný moment zotrvačnosti môžeme vyjadriť ako

$$I_\mathrm{A} = 2I_\mathrm{A1} + I_\mathrm{A2} = \sigma\pi R^3 \left[H\left(2 - \frac{4}{\pi}\right) + R\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)\right].$$

Ako posledné vypočítame celkovú energiu systému, pričom člen $(1-\cos\varphi)$ v potenciálnej energii položíme rovný prvému nenulovému členu rozvoja kosínusu, čiže využijeme približný vzorec

$$1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Pre celkovú energiu teda dostávame

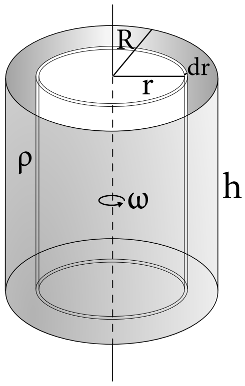
$$E = \frac{1}{2} m g r_\mathrm{t} \varphi^2 + \frac{1}{2} I_\mathrm{A} \omega^2 = \text{konšt.}$$

[11] Platí to z rozkladu kosínusu do Taylorovho polynómu, pričom uvažujeme len dominantný člen

čo je vlastne energia harmonického oscilátora s periódou, ktorá je určená konštantami pri ω^2 a φ^2. Takže válov kmitá s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\mathrm{A}}{mgr_\mathrm{t}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{8}{3}\right)R + (2\pi - 4)\,H\right]R}{\left(\frac{4}{3}R + 2H\right)g}}.$$

44 Keď je pohár len tak položený na stole a sirup je v pokoji, na steny tlačí silou pochádzajúcou v hydrostatickom tlaku. Toto sa samozrejme nemení aj keď sirup v pohári rotuje. Navyše však na steny pohára pôsobí odstredivou silou. Poďme si túto odstredivú silu zrátať.



Odstredivú silu vieme zrátať podľa vzťahu $F = m\omega^2 r$. Vidíme, že jednotlivé valcové vrstvy sirupu pôsobia na pohár rôznymi odstredivými silami lineárne rastúcimi s ich polomerom. Uvažujme valcovú vrstvu s polomerom r a hrúbkou dr. Tá pôsobí silou

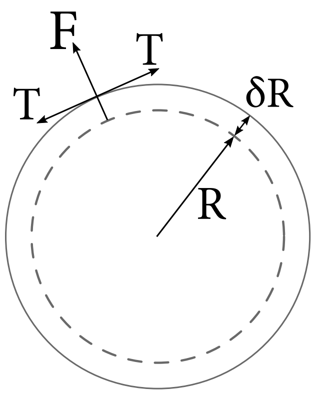
$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}m\,\omega^2 r = 2\pi r\ \mathrm{d}r\,h\rho\omega^2 r = 2\pi h\rho\omega^2 r^2\ \mathrm{d}r.$$

Keď chceme vypočítať celkovú odstredivú silu, stačí nám preintegrovať túto infinitezimálnu silu cez celý objem pohára, teda cez polomer od 0 po R. Dostávame

$$F = \int_0^R 2\pi h\rho\omega^2 r^2\ \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi h\rho\omega^2 R^3.$$

Vyjadrime to pomocou hmotnosti sirupu v pohári $m = \pi R^2 h\rho$. Celková sila potom bude

$$F = \frac{2}{3}m\omega^2 R.$$



Teraz už len zostáva zrátať, aké napäťové sily v skle táto odstredivá sila spôsobuje. Použijeme princíp virtuálnych prác. Predstavme si, že vplyvom odstredivej sily sa polomer pohára zväčší o δR. Tým pádom odstredivá sila vykoná infinitezimálnu prácu $\delta W = F\,\delta R$. Avšak môžeme sa no to pozerať aj tak, že túto prácu vykonali ťahové sily v skle, ktoré zodpovedajú napäťovým silám. Tieto sily však konali prácu po dráhe zodpovedajúcej predĺženiu obvodu pohára, teda možno písať $\delta W = T \cdot 2\pi\,\delta R$. Z rovnosti virtuálnych prác dostávame veľkosť napäťových síl v skle

$$T = \frac{F}{2\pi} = \frac{m\omega^2 R}{3\pi}.$$