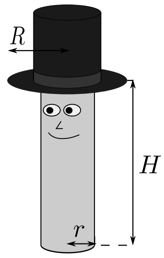
Zadania

1. Jimi má nepremokavý klobúk s polomerom R. Samotný Jimi je štíhly, podobá sa na zvislý valec s polomerom $r < R$ a výškou H. Ako rýchlo môže Jimi chodiť v daždi, aby nezmokol? Prší zvislo, rýchlosťou u.

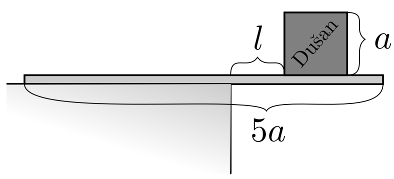


Obr. 1

2. Tlak vody vo vodovodnom potrubí na prízemí budovy je 20 atmosfér. Aká najvyššia môže byť budova, aby aj na jej vrchu tiekla voda z vodovodu?

3. Koľkokrát musíme prehnúť papier, aby sme jeho hrúbkou zaplnili vzdialenosť Zem-Slnko? Hrúbka papiera je 100 µm.

4. Dušan je taká kocka, až je to nepríjemné. Preto si z neho zvyšní FKSáci spravili srandu a v spánku ho preniesli na dosku, ktorá ležala na okraji útesu. Do akej najväčšej vzdialenosti l od okraja útesu ho mohli umiestniť, aby nespadol? Dušan má hmotnosť m a hranu dĺžky a, doska má hmotnosť $\frac{m}{2}$ a dĺžku $5a$.



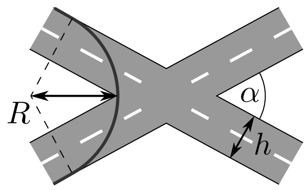
Obr. 2: Kubický Dušan na okraji útesu

5. Kvík sa chce sprchovať vodou s teplotou $T_{hot} = 30\,°\mathrm{C}$ a prietokom $Q = 0{,}1\,\mathrm{l\,s^{-1}}$, ale k dispozícii má iba vodu s teplotou $T_{cold} = 25\,°\mathrm{C}$. Riešením môže byť prietokový ohrievač. Aký príkon (odber elektrickej energie) musí mať, aby splnil Kvíkove nároky? Hustota vody je $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, tepelná kapacita $c = 4180\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ a účinnosť ohrievačov je blízka 100 %.

6. Ponorka používa na meranie hĺbky vodorovného dna ultrazvuk, čiže vysiela signál všetkými smermi. Následne zaznamenáva, kedy sa jej vráti signál odrazený odo dna. Uvažujte ponorku pohybujúcu sa vodorovne rýchlosťou v. Ako vysoko je ponorka odo dna, ak sa signál vrátil po čase T? Rýchlosť zvuku vo vode je c.

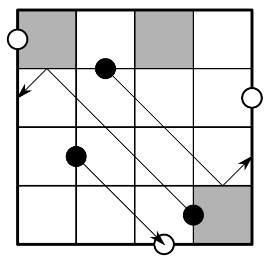
7. Kaja si v horúci letný deň zaliala ľadový čaj hustoty ϱ_c a vhodila doň kocku ľadu s hranou dĺžky a a hustoty ϱ_l. Pred tým, než si ho naplno vychutnala, položila ho na váhu a zmerala jeho hmotnosť. Nepáčilo sa jej však, že kocka ľadu plávala na hladine, a tak ju zatlačila nadol tak, aby bola celá pod hladinou. Na jej veľké prekvapenie váha začala ukazovať iné číslo. O koľko sa zmenila hmotnosť zobrazená na váhe?

8. Dve cesty šírky h sa pretínajú pod ostrým uhlom α. Traktorista Fero chce na križovatke odbočiť, nesmie však pritom vyjsť z cesty. Aký najväčší polomer môže mať jeho dráha? Šírku Ferovho traktora zanedbajte.



Obr. 3

9. „Chce sa im rátať? Asi nie... tak nech sa radšej hrajú!" Tri laserové lúče vychádzajú z čiernych zdrojov vo vyznačenom smere. Na sivých zrkadlových kockách sa odrážajú, inak sa šíria priamo. Ako musíme premiestniť zrkadlové kocky, aby lúče trafili všetky zakrúžkované terče? Zrkadlá môžeme umiestňovať len do štvorcov siete 4×4. Lúče sa na vonkajších okrajoch siete neodrážajú, ale pohlcujú.



Obr. 4: Lasery a zrkadlá

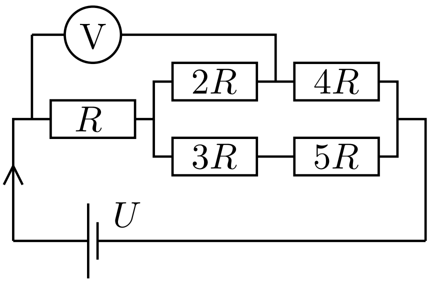
10. Vladko si zadovážil nový obrovský teplovzdušný balón. A aby nikto netvrdil, že má malé ambície, hneď prvým letom plánuje obletieť nad rovníkom celú Zem. Potrebuje však vedieť, na koľko dní si musí vziať zásoby. Výsledok zaokrúhlite nahor na celé dni.
Hmotnosť Vladkovho balóna je 3000 kg, priemer guľového plášťa je 30 m, koeficient aerodynamického odporu balóna je 0,16, teplota vzduchu vnútri balóna je 350 K. Atmosféra sa správa adiabaticky, bežné podmienky na morskej hladine sú 100 kPa a 15 °C. Deformáciu plášťa zanedbajte. Vietor nad rovníkom fúka zo západu na východ konštantnou rýchlosťou $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

11. Kubo nie je hokejista. Preto sa na ľade radšej hráva s dvomi kvádrami. Väčší kváder s hmotnosťou $M = 4\,\mathrm{kg}$ položil na ľad a naň umiestnil menší s hmotnosťou $m = 1\,\mathrm{kg}$. Ten

spodný potom vodorovne potiahol silou $F = 2\,\mathrm{N}$. Aké zrýchlenie získal vrchný kváder? Medzi ľadom a kvádrom je trenie zanedbateľné a koeficient trenia medzi kvádrami je $f = 0{,}32$.

12. „Denda, vstávaj do školy!“ „Mama, nechaj ma. Vieš, aké náročné je tam ísť?“ „Nie, a ty?“ Pomôžte jej. Nájdite množstvo vynaloženej energie E na prejdenie vzdialenosti s, ak je dĺžka kroku l. Predpokladajte, že energia sa spotrebuje len na opätovné zdvíhanie ťažiska pri každom kroku. Ďalej predpokladajte, že hmotnosť tela je m a dĺžka nôh h.

13. Juro dostal od Julky k narodeninám voltmeter. Keďže medzi nimi nie je žiadne napätie, rozhodol sa, že ho radšej vyskúša na elektrickom obvode, ktorý si postavil. Aké napätie mu ukáže voltmeter, ak ho pripojil k obvodu tak, ako na obrázku?

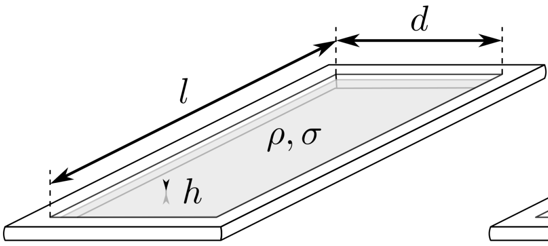


Obr. 5: Jurov elektrický obvod

14. Žaba hmotnosti $100\,\mathrm{g}$ si sadla na okraj pohára, ale bojí sa o svoju stabilitu. Pohár má tvar zrezaného kužeľa s horným polomerom $5\,\mathrm{cm}$, dolným polomerom $3\,\mathrm{cm}$ a jeho hmotnosť je $50\,\mathrm{g}$. Aký objem vody s hustotou $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ musíme naliať do pohára, aby sa pod žabou neprevrátil?

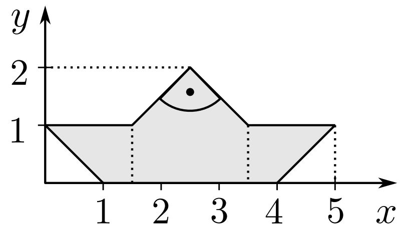
15. Máme dokonale izolovaný generátor na pevné palivo, ktorý funguje nasledovne. Do generátora vložíme palivo s hmotnosťou m_0 a výhrevnosťou H. Účinnosť generátora je η. Zvyšná energia sa premení na teplo. Na odvádzanie tepla sa používa chladenie vodou. Máme tepelne izolovanú nádrž s vodou hmotnosti M. Vždy po dohorení paliva privedieme z nádrže ku generátoru vodu s hmotnosťou $m < M$, čím ho ochladíme. Ohriatu vodu privedieme späť do nádrže, kde sa zmieša so zvyšnou vodou. Tento cyklus opakujeme. Aká je teplota vody v nádrži po n cykloch, ak jej merná tepelná kapacita je c a na začiatku mala teplotu t_0?

16. Enka sa hrala s mydlovou blanou hrúbky $h = 1\,\mathrm{\mu m}$ v obdĺžnikovom rámiku s rozmermi $l = 10\,\mathrm{cm}$ a $d = 5\,\mathrm{cm}$. Zrazu však mydlová blana praskla pozdĺž kratšej strany a zmrštila sa k protiľahlej strane. Enku by teraz zaujímalo, koľko času ubehlo od prasknutia po úplné zmiznutie bubliny.
Mydlový roztok, z ktorého je mydlová blana urobená, má hustotu $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a povrchové napätie $\sigma = 0{,}03\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Výsledok odovzdávajte v milisekundách.



Obr. 6: Prasknutie mydlovej blany

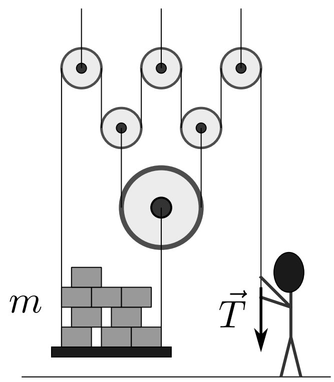
17. Pirát Vladko si konečne našetril na novú loď. Zašiel do papiernictva a kúpil si jeden hárok papiera. Vystrihol si z neho loďku ako na obrázku a bolo. Teraz mu však vŕta v hlave otázka: aké sú súradnice jej ťažiska?



Obr. 7: Predražená loďka

18. Pištoľník Sebastián sedí na dne veľkej jaskyne. Je mu dlho, a tak vystrelí z pištole smerom nahor rýchlosťou $200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. O päť sekúnd počuje, že guľka narazila do stropu. Aká vysoká je jaskyňa, ak sa zvuk v jaskyni šíri rýchlosťou $330\,\mathrm{m\,s^{-1}}$?

19. „To mám tie tehly nosiť sám? Ani ma nehne! Radšej si postavím kladkostroj z ultraľahkých lán a kladiek.“ Akou silou musím ťahať za koniec lana, ak potrebujem zdvihnúť tehly s celkovou hmotnosťou m?



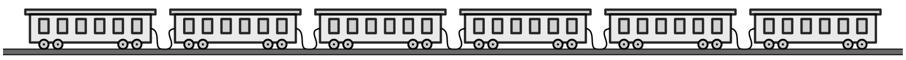
Obr. 8: Veľkolepý kladkostroj

20. Homeopati využívajú pri výrobe liečiv tzv. centezimálne riedenie. To funguje nasledovne: zoberú 1 kvapku účinnej látky (tiež vodný roztok) a pridajú k nej 99 kvapiek čistej vody. Produkt označia stupňom riedenia 1 C. Ak chcú vyrobiť riedenie so stupňom 2 C, zoberú 1 kvapku z roztoku 1 C a pridajú k nej 99 kvapiek čistej vody. Rovnakým spôsobom vytvárajú riedenie vyšších stupňov. Koľkokrát musia postup zopakovať, teda aký veľký stupeň riedenia musia použiť, aby sa vo výslednom vodnom roztoku (liečive), ktorý sa zmestí na jednu čajovú lyžičku (5 ml) už nenachádzala (priemerne) žiadna molekula účinnej látky?

21. Toaletný papier dĺžky L a hmotnosti m je namotaný na vodorovnej rolke zanedbateľnej hmotnosti s polomerom r. Rolka sa očakávane nachádza na držiaku roliek. Na koniec papiera sa zavesí mačka hmotnosti M a celý ho vlastnou váhou odroluje. Akou uhlovou rýchlosťou sa bude točiť rolka, keď sa minie všetok papier a mačka na ňom bude stále zavesená? Uvažujte $L \gg r$ a nulové trenie medzi rolkou a držiakom.

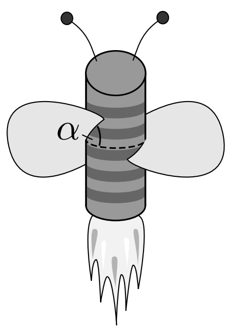
22. Zuzka púšťa vodu z kohútika, ktorý má polomer $R = 2\,\mathrm{cm}$. Prietok cez trubicu je $Q = 0{,}2\,\mathrm{dm^3\,s^{-1}}$. Je všeobecne známe, že čím nižšie sa prúd vody dostane, tým je užší. Aký polomer má vodný prúd v mieste dopadu na umývadlo, ktoré je $H = 33\,\mathrm{cm}$ pod kohútikom? Povrchové javy neuvažujte.

23. Tinka sa ako malá rada hrala s vláčikmi. Na rovné koľajnice postavila vedľa seba N rovnako ťažkých vozíkov, pospájaných dokonale nepružnými lankami dĺžky l. Postavila ich tak tesne vedľa seba, že žiadne lanko nebolo napnuté. Následne prvému vozíku v rade udelila rýchlosť v_1. Po akom čase sa začal pohybovať celý vláčik?



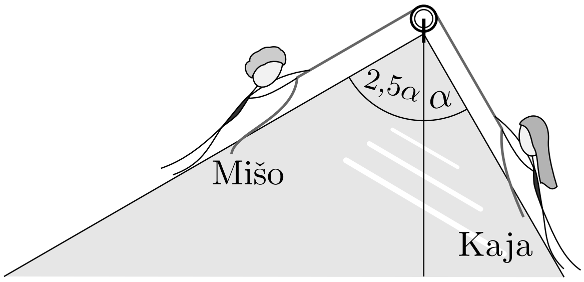
Obr. 9

24. Maja si na Silvestra kúpila malý ohňostroj – včielku. Včielka pozostáva z raketového motorčeka a dvoch krídeliek dĺžky r zahnutých proti sebe pod uhlom α voči vodorovnej rovine. Keď sa motor zapáli, včielka sa prudko roztočí s uhlovým zrýchlením ε a zavŕta sa do vzduchu ako vrtuľa rýchlosťou úmernou uhlovej rýchlosti. Keď motorček po čase t dohorí, ohňostroj vo včielke vybuchne. Aká je dĺžka dráhy, ktorú opíše koniec krídelka?



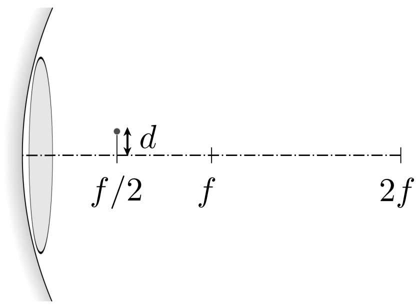
Obr. 10

25. Po ľadovom kopci lezú z jeho dvoch strán 70-kilový Mišo a Kaja vážiaca 56 kíl. Keďže sa na kopci dosť kĺže, sú navzájom istení lanom, ktoré je na vrchole kopca prevlečené cez dokonalú kladku. Aký musí byť uhol kopca α (meraný od zvislice) na Kajinej strane, ak kopec na strane Miša má uhol od zvislice $2{,}5\alpha$, aby Kaja a Mišo boli na kopci v pokoji? Trenie zanedbajte. Odovzdávajte výsledok v stupňoch s presnosťou na jedno desatinné miesto. Pri hľadaní správneho výsledku sa nebojte použiť kalkulačku alebo papier a pero :)
Úloha nemá analytické riešenie.



Obr. 11

26. Optická sústava sa skladá zo spojky s ohniskovou vzdialenosťou f a dutého zrkadla s ohniskovou vzdialenosťou $2f$. Spojka aj zrkadlo sú zanedbateľne tenké, umiestnené zanedbateľne blízko seba na optickej osi (viď. obrázok) Vo vzdialenosti $f/2$ od nich sa nachádza špendlík dĺžky d. Pri pohľade do šošovky môžeme vidieť aj jeho obraz. Aký je veľký? Je priamy alebo prevrátený?



Obr. 12

27. Kvík sa hral s veľmi ťažkou a elektricky vodivou homogénnou guľovou škrupinkou polomeru R a hmotnosti M. Akým veľkým nábojom Q musí Kvík rovnomerne nabiť škrupinku, aby škrupinka nemala tendenciu sa zmršťovať ani zväčšovať?

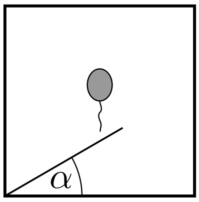
28. Lietadlo stojí na začiatku pristávacej dráhy. Keď pilot zapne motory, začne zrýchľovať s konštantným zrýchlením $a = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Aby lietadlo vzlietlo, musí dosiahnuť voči vzduchu rýchlosť $v = 80\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Keď vzlieta proti vetru, potrebuje na to dráhu dlhú $L = 1200\,\mathrm{m}$. Akú dlhú dráhu by potrebovalo pri vzlete v opačnom smere, ak sa vietor nezmení?

$\boxed{29.}$ Jaro si urobil prak. Použil pružnú gumičku s nulovou pokojovou dĺžkou, tuhosťou k a konár tvaru Y s rozpätím d. Aká je *tuhosť* takéhoto praku, ak ťaháme stred gumičky v smere kolmom na rovinu praku? Tuhosť je pomer sily, ktorou ťaháme, a dosiahnutej výchylky.

$\boxed{30.}$ Oceľové lano, ktoré si odmotávam z kotúča, má takú pevnosť, že sa voľne visiac roztrhne pri dĺžke L. Najviac koľko lana si môžem odmotať, aby sa mi neroztrhlo, keď ho chytím za koniec a roztočím ho vodorovne veľkou uhlovou rýchlosťou ω?

Tiažovú silu zanedbajte.

$\boxed{31.}$ Vladko stojí v rohu miestnosti v tvare štvorca so stranou dlhou 10 m. Miestnosť má všetky štyri vnútorné steny pokryté zrkadlami a v jej strede je upevnený malý balón. Vladko by naň hrozne rád zasvietil laserom, bojí sa však, že balón praskne.
Našťastie je vo vzduchu veľa prachu a zrkadlá sú dosť špinavé. Pri prechode jedným metrom vzduchu klesne intenzita laserového lúča o 1 %, pri odraze od zrkadla až o 10 %. Intenzita svetla z Vladkovho lasera na výstupe je presne dvakrát väčšia, ako je potrebné na prasknutie balóna. Pod akým uhlom k stene má Vladko namieriť laser, aby balón osvetlil čo najsilnejšie, ale bez toho, aby praskol?



Obr. 13

Laser musí smerovať dovnútra miestnosti ($0° < \alpha < 90°$).

$\boxed{32.}$ Ekologické vozidlo JaroMišo pozostáva z vane s vodou (plocha hladiny A), ktorá je položená na koľajniciach bez trenia. V zadnej časti je výpust, z ktorého strieka vodorovný prúd vody s plochou prierezu S a vozidlo tak reaktívne poháňa dopredu. Výhodou oproti konkurencii je, že počas dažďa sa voda priebežne dopĺňa.
Ak je intenzita dažďa w (meraná napríklad v napršaných $\mathrm{mm\,h^{-1}}$), výška hladiny aj rýchlosť vozidla sa po čase ustália. Aká bude ustálená rýchlosť JaroMiša? Predpokladajte, že kvapky dažďa padajú zvislo nadol.

$\boxed{33.}$ Kubo zistil, že keď vodičom s polomerom r prechádza prúd I, tak sa vodič vďaka Joulovmu teplu ohreje na teplotu T. Kubo ho začne využívať ako zdroj tepla a je mu fajn. V jeden deň mu Maťo daruje rovnako dlhý vodič z rovnakého materiálu, ale s dvojnásobným polomerom. Koľkokrát musí Kubo zmeniť prechádzajúci prúd, aby sa vodič ohrial na rovnakú teplotu T ako predtým? Predpokladajte, že teplo uniká iba z valcového plášťa vodiča.

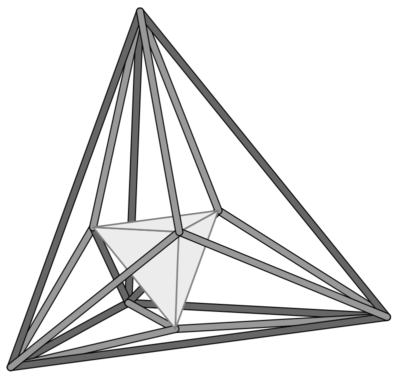
$\boxed{34.}$ Predpokladajme, že planéty obiehajú okolo Slnka po kruhových orbitách v jednej rovine. Ako dlho bude pozorovateľný prechod Venuše popred Slnko z miesta tesne nad povrchom Zeme na spojnici Zem–Slnko? Vzdialenosť Venuše od Slnka je 1,4–krát menšia ako vzdialenosť Zeme od Slnka. Pozorovateľ na Zemi vidí Slnko v malom zornom uhle a Venušu pokladá za bodový objekt.

Odovzdávajte číselný výsledok.

35. Exoplanéta *Cimermanos* polomeru R_c má teplotu T_c a obieha vo vzdialenosti D_c od svojej materskej hviezdy. Mladý astronóm Kubo objavil ďalšiu planétu obiehajúcu okolo tej istej hviezdy. Novoobjavená planéta má osemkrát väčšiu periódu obehu τ_n a trikrát väčší polomer ako planéta *Cimermanos*. Kuba by však zaujímalo, aká je teplota T_n novoobjavenej planéty. Hviezdu a planéty môžete považovať za dokonale čierne telesá.

36. Ťažký frajer Kvík letí nadzvukovým lietadlom spoločnosti FKS priamo nad rovníkom vo výške 18 000 m smerom na východ. Nina ho sleduje z povrchu Zeme, a zdá sa jej, že lietadlo letí rýchlosťou $600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Keď sa Kvík v lietadle postavil na váhu, ukázala mu, že je naozaj ťažký. Presne 90 kg. Aká je však Kvíkova skutočná hmotnosť m, ak váha ukazuje správne hodnoty v tiažovom poli $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$?

37. Viete aký odporný by bol Trojsten v inej dimenzii? Nie? Tak teda vypočítajte odpor medzi dvoma vrcholmi štvorstenovej konštrukcie, ktorá vyzerá tak, ako na obrázku. Vonkajšiu konštrukciu tvorí odporový drôt, ktorý spája všetky vrcholy pravidelného štvorstenu a tiež vrcholy jednotlivých strán s príslušnými stredmi. Uvažujte, že každý drôt má odpor R. Navyše stredy strán sú spojené menším štvorstenom, ktorý je vyrobený z dokonale vodivého plechu.

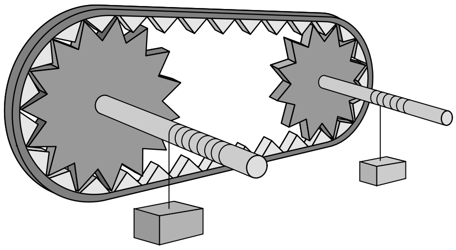


Obr. 14: Odporný štvorsten

38. Bzdušo sa rozhodol, že zdolá Mont Blanc. Vyrazil z dedinky Chamonix ležiacej v nadmorskej výške 1000 m, kde si kúpil croissant v obale s objemom 280 ml. Pri výstupe sa obal nafúkol na maximálny objem 300 ml. V akej nadmorskej výške sa croissant sám otvoril, ak vieme, že obal znesie pretlak 10 kPa? Po prasknutí obalu Bzdušo zistil, že objem croissantu je 180 ml. Predpokladajte izotermickú atmosféru a exponenciálny pokles tlaku s výškou podľa vzťahu $p = p_0 e^{-ch/p_A}$, kde p_A je atmosférický tlak pri hladine mora a $c = 10\,\mathrm{Pa\,m^{-1}}$.

39. Máme dve ťažké ozubené kolesá s hmotnosťami M_1, M_2 a polomermi R_1, R_2 spojené reťazou. Na každé z nich pripevníme tyč s namotaným lankom tak, že visia z vonkajších strán

sústavy (viď obrázok). Polomery tyčí sú ρ_1, ρ_2 a na lanká pripevníme závažia s hmotnosťami μ_1, μ_2. Závažia najprv držíme, následne ich pustíme. Aké je zrýchlenie závažia s hmotnosťou μ_1, keď obe závažia pustíme? Momenty zotrvačnosti uvažujte, ako keby kolesá boli disky, moment zotrvačnosti tyčí zanedbajte.



Obr. 15: Ozubené kolesá spojené reťazou

$\boxed{40.}$ Oceľové lano, ktoré si odmotávam z kotúča, má takú pevnosť, že sa voľne visiac roztrhne pri dĺžke L. Kubo zobral túto odtrhnutú časť a spravil z nej na zemi kruhovú slučku s obvodom L. Následne ju začal roztáčať vo vodorovnej rovine okolo stredu slučky. Pri akej uhlovej rýchlosti sa roztrhne?

$\boxed{41.}$ Keď bol Maťo v lete stanovať, všimol si na oblohe veľmi jasný a rýchly meteor. Na kiwipédii zistil, že meteorom muselo byť zrnko prachu pochádzajúce z kométy 31462 *Brch*. O kométe sa však dočítal len toľko, že jej dráha okolo Slnka má tvar paraboly. Viete povedať, akou najväčšou rýchlosťou môžu zrnká prachu z kométy 31462 dopadnúť na Zem?
Uvažujte, že obežná dráha Zeme je kruhová a hrúbku atmosféry zanedbajte.

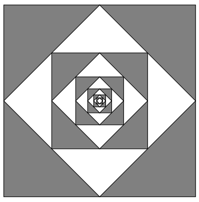
$\boxed{42.}$ Kubo s Maťom zo Zeme pozorujú objekty vo vesmíre. Zrazu uvideli rýchlo pohybujúci sa neznámy objekt, približujúci sa k Zemi, a rozhodli sa zmerať jeho rýchlosť. Keďže si neuvedomili mnohé súvislosti, neprišlo im divné, že odmerali neznámemu objektu zdanlivú rýchlosť $3c$. Akou zdanlivou rýchlosťou sa bude od nich objekt vzďaľovať potom, ako preletí popri Zemi? (Zdanlivá rýchlosť $3c$ znamená, že za čas Δt sa nám zdá, že sa objekt priblížil o $3c\Delta t$, aj keď má, samozrejme, podsvetelnú rýchlosť.)

$\boxed{43.}$ Čajka sa hrala so zaujímavou fyzikálnou sústavou. Do tepelne izolovanej krabice s dokonale odrážajúcim vnútorným povrchom vložila žiarič s teplotou $T = 3000\,\mathrm{K}$, plochou S a obrovskou tepelnou kapacitou. V strede krabice sa nachádza zložitá optická sústava, ktorá celý výkon žiariča zaostrí na malú čiernu doštičku s desaťkrát menšou plochou ležiacu na opačnej strane krabice. Aká je teplota T_d doštičky po ustálení?

$\boxed{44.}$ Vo vzdialenej galaxii sa nachádza hviezda hmotnosti M s celkovým výkonom žiarenia P. Okolo nej obieha planéta na kruhovej orbite s periódou T. Hustota planéty je ϱ a polomer R. V akej vzdialenosti r obieha planéta okolo hviezdy?

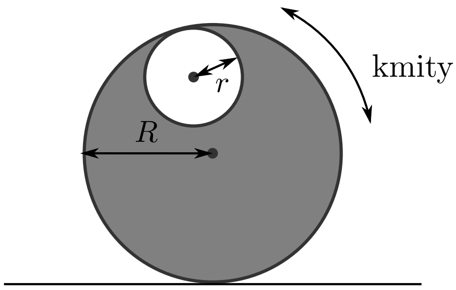
$\boxed{45.}$ Mišo vbehol do FKS miestnosti so svojím novým objavom – Mišovým štvorcom. Mišov štvorec má hranu dĺžky a a hmotnosť M. Vyrobíme ho tak, že zoberieme štvorec s hranou

a, vyrežeme z neho menší štvorec s vrcholmi v stredoch strán pôvodného štvorca a následne do vyrezaného štvorca pridáme ďalší štvorec s vrcholmi v stredoch strán vyrezaného štvorca. Následne celý postup opakujeme až do nekonečna. Ak sme sa nepomýlili, dostaneme útvar ako na obrázku. Maťovi sa Mišov štvorec veľmi páči. Radosť mu však kazí to, že nepozná jeho moment zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej kolmo stredom štvorca. Pomôžete mu?



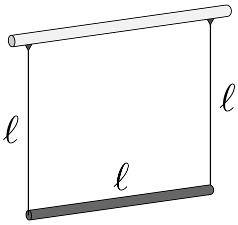
Obr. 16: Mišov štvorec

46. Máriovi sa pokazilo koleso. Ostalo síce okrúhle, ale spravila sa mu doň na okraji diera. Akú bude mať periódu malých kmitov, keď ho položí na vodorovný povrch a nechá prekotúľavať okolo rovnovážnej polohy? Pokazené koleso má teraz už len hmotnosť M, polomer R a diera má polomer $r = R/3$.



Obr. 17

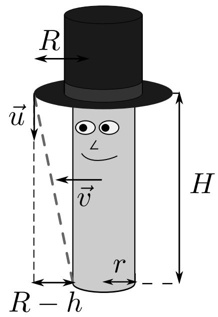
47. Pravouhlý rámček je zložený zo štyroch tyčí zanedbateľného priemeru o dĺžke l. Spodná je vodivá, bočné dve sú nevodivé a so zanedbateľnou hmotnosťou, vrchná je vodorovne upevnená tak, že zvyšné tri sa vedia okolo nej otáčať. Celý tento systém je vložený do horizontálneho magnetického poľa s indukciou $\vec{\mathbf{B}}$, ktoré je kolmé na zavesený rámček. Následne prišla Kaja, vychýlila tento rámček do horizontálnej polohy a pustila. Aké najväčšie napätie U_{max} sa môže indukovať na spodnom vodiči?



Obr. 18

Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ Dažďová kvapka padajúca tesne popri klobúku prekoná výšku H za čas $t = \frac{H}{u}$. Aby kvapka nedopadla na Jimiho, môže sa za tento čas Jimi posunúť o vzdialenosť $R - r$. Platí teda $R - r = vt$. Po dosadení výrazu pre čas dostávame maximálnu možnú rýchlosť pohybu Jimiho $v = \frac{R-r}{H} u$.



Obr. 19

$\boxed{2.}$ Voda bude vytekať z potrubia iba za predpokladu, že bude vytláčaná väčším tlakom ako je vonku, čiže 1 atmosférou. To však znamená, že vo vodovodnom potrubí môže tlak poklesnúť až o 19 atmosfér a stále z neho bude vytekať voda. Dôvodom prečo bude klesať tlak v potrubí, je práve hydrostatický „proti“ tlak spôsobený vodným stĺpcom nad prízemím. Pre maximálnu výšku budovy teda dostaneme

$$h = \frac{19\,\mathrm{atm}}{\rho g} = \frac{1\,925\,175\,\mathrm{Pa}}{1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \approx 196\,\mathrm{m}\,.$$

$\boxed{3.}$ Každým preložením papiera zväčšíme dvakrát jeho hrúbku. Na začiatku je hrúbka $d = 10 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$, a po n preloženiach je $d \cdot 2^n$.

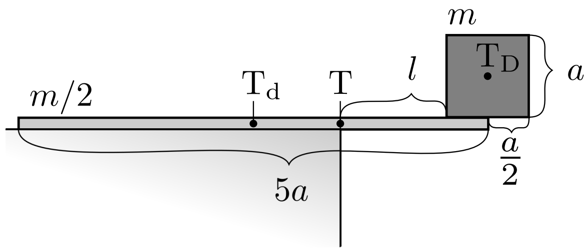
Potrebujeme dosiahnuť hrúbku aspoň $1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^9\,\mathrm{m}$, takže hľadáme také N, že $1\,\mathrm{AU} = d \cdot 2^n$. To je ale jednoduché, stačí to zlogaritmovať [1]

$$\log_2\left(\frac{1\,\mathrm{AU}}{d}\right) = \log_2(2^N) = N \qquad \longrightarrow \qquad N = \log_2\left(\frac{1\,\mathrm{AU}}{d}\right) \doteq 50{,}4$$

Výsledok zaokrúhľujeme nahor, takže dostávame, že papier musíme 51-krát preložiť, aby sme ním dosiahli zo Zeme na Slnko !

$\boxed{4.}$ Aby Dušan nespadol, musí sa jeho ťažisko T_D nachádzať najďalej nad okrajom dosky. Aby doska s Dušanom neprepadla cez okraj útesu, musí byť ich spoločné ťažisko najďalej nad okrajom útesu. Na vyriešenie úlohy musíme teda nájsť len polohu spoločného ťažiska.

[1] A môžeme použiť logaritmus s ľubovoľným základom. Ja volím dvojkový (číslom „2“)!



Obr. 20

Merajme vzdialenosti od začiatku dosky. Poloha ťažiska dosky T_d je vo vzdialenosti $\frac{5}{2}a$ a poloha ťažiska Dušana T_D vo vzdialenosti $5a$. Spoločné ťažisko nájdeme ako vážený priemer jednotlivých ťažísk

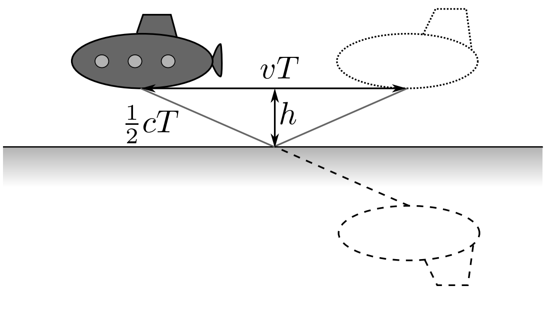
$$\frac{\frac{m}{2}\cdot\frac{5}{2}a + m\cdot 5a}{\frac{m}{2}+m} = \frac{25}{6}a\,.$$

Netreba zabúdať, že Dušan zaberá na doske dĺžku $\frac{a}{2}$. Takže ho môžu položiť do maximálnej vzdialenosti

$$l = 5a - \frac{25}{6}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a\,.$$

$\boxed{5.}$ Uvažujme časový interval τ. Za tento čas pretečie ohrievačom voda s objemom $V = Q\tau$ a hmotnosťou $m = \varrho Q\tau$. Na jej zohriatie z teploty T_{cold} na teplotu T_{hot} je potrebná energia $E = mc\left(T_{hot} - T_{cold}\right)$. Výkon ohrievača je teda $P = E/\tau = \varrho cQ\left(T_{hot} - T_{cold}\right)$. Po dosadení číselných hodnôt dostávame, že prietokový ohrievač musí mať príkon 2,09 kW.

$\boxed{6.}$ Ak ponorka ani ultrazvuk nemenia svoju rýchlosť, existuje len jediný uhol α, pod ktorým mohol ultrazvuk z ponorky vyjsť, aby ho o T sekúnd zaznamenala[2]. Samozrejme signál sa musel odraziť odo dna (viz. obrázok):



Obr. 21

[2]Tento uhol je taký, že ak by sme si premietli ponorku pomocou dna ako cez zrkadlo, tak by dráha zvuku bola rovná čiara.

Pre tento uhol platí $\cos\alpha = \frac{vT}{cT} = \frac{v}{c}$. Ak si všimneme pravouhlý trojuholník obsahujúci tento uhol, tak vieme na základe Pytagorovej vety priamo vypočítať hĺbku vodorovného dna

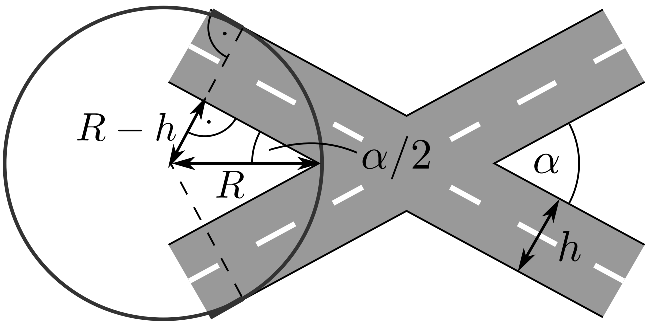
$$h = \frac{cT}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\boxed{7.}$ Pozrime sa najskôr na situáciu, keď ľad pláva voľne na hladine. Sústava pohár-čaj-ľad tvorí jeden objekt s hmotnosťou $m_p + m_c + m_l$. Táto hmotnosť sa zobrazí na váhe. Keď však Kaja zatlačí kocku ľadu pod hladinu, musí pôsobiť silou F, ktorá je rozdielom vztlakovej sily ľadu a tiažovej sily pôsobiacej na ľad $F = F_{vz} - F_G$. A teda jediným rozdielom, oproti predchádzajúcemu prípadu, je existencia sily F pôsobiacej na sústavu, ktorá sa prejaví aj na hmotnosti zobrazenej váhou. Nová ukazovaná hmotnosť bude $m_p + m_c + m_l + \frac{F}{g}$, takže zmena hmotnosti, ktorú hľadáme je

$$\Delta m = \frac{F_{vz} - F_G}{g} = a^3\left(\varrho_c - \varrho_l\right)$$

.

$\boxed{8.}$ Keďže traktor nemôže cestu opustiť, musia byť vonkajšie krajnice cesty dotyčnicami ku kružnici, po ktorej sa traktor pohybuje. Našou úlohou je teda nájsť čo najväčšiu kružnicu, ktorá sa dotýka vonkajších krajníc, pričom kružnicový oblúk, vytýčený bodmi dotyku, leží celý na ceste. Zrejme tomu zodpovedá kružnica prechádzajúca miestom, kde sa stretávajú vnútorné krajnice. Teraz už stačí nájsť len jej polomer.

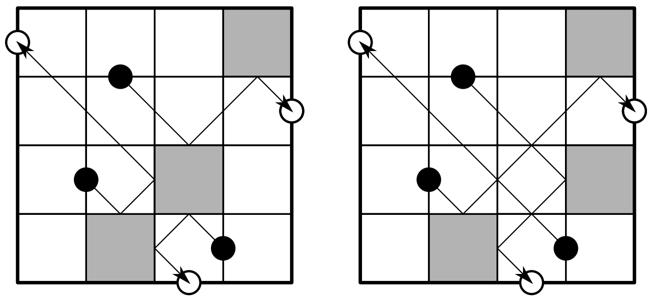


Obr. 22

Z obrázka s využitím jednoduchej trigonometrie vidíme, že $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-h}{R}$, odkiaľ

$$R = \frac{h}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

$\boxed{9.}$ Úloha má dve riešenia:



Obr. 23: Správne rozmiestnenie zrkadiel

$\boxed{10.}$ Keď sa trochu zamyslíme, ako taký balón letí, mali by sme si všimnúť, že striktne vzaté neletí. . . On sa len vznáša v určitej výške a necháva sa unášať vetrom. Takže môžeme zanedbať nielen deformáciu, ale aj všetko ostatné. Jedinou podstatnou informáciou zostáva konštantná rýchlosť vetra a obvod Zeme.

Ten je približne $2\pi \cdot 6378\,\mathrm{km} \doteq 40\,074\,\mathrm{km}$, čo po vydelení rýchlosťou vetra dáva výsledok 1002 hodín, čiže zaokrúhlené nahor 42 dní.

Zrýchľovanie balóna po vypustení síce trvá nenulový, ale určite zanedbateľný čas, rádovo niekoľko sekúnd. Presný výpočet nechávame na čitateľa :-)

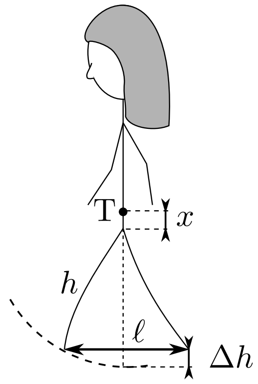
$\boxed{11.}$ Veľa možností tu nemáme. Buď sa horný kváder bude pohybovať spolu so spodným, alebo pôjde voči nemu dozadu. Definitívnu odpoveď nám dávajú sila F zo zadania a trecia sila F_t, ktorá pôsobí medzi kvádrami. Trecia sila je silou reakčnou, takže pôsobí vždy proti aktívnej sile a má svoju maximálnu hodnotu:

$$F_t = mgf = 3{,}14\,\mathrm{N}\,,$$

čo je viac ako aktívna sila $F = 2\,\mathrm{N}$, ktorá ťahá spodnú kocku! Tým pádom ju trecia sila vie vyrovnať a kvádre sa pohybujú spolu. Zrýchlenie celej sústavy je už triviálny výpočet:

$$a = \frac{F}{M+m} = 0{,}4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$\boxed{12.}$ Zrátajme si najprv energiu, ktorú je potrebné vynaložiť pri jednom kroku.



Obr. 24

Krok prebieha nasledovne. Najskôr stojíme zvislo, takže ťažisko je vo výške $x + h$, kde x je vzdialenosť ťažiska od bedier. Pohneme sa trochu dopredu a nohy rozkročíme na vzdialenosť l. Naše ťažisko poklesne do výšky $x+\sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}}$, takže zmena výšky ťažiska je $\Delta h = h-\sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}}$. V tomto momente sme však zatiaľ ešte žiadnu prácu nevykonali, prácu konala tiažová sila. Následne začneme nohy dávať dokopy, takže dvíhame naše ťažisko späť do výšky $x + h$, čiže prekonávame výškový rozdiel Δh. Tentokrát už prácu konáme my proti tiažovej sile. Veľkosť vynaloženej energie pri jednom kroku je $E_0 = mg\Delta h$. Ak chceme prejsť vzdialenosť s, musíme vykonať $n = \frac{s}{l}$ krokov. Celková vynaložená energia je potom

$$E = nE_0 = \frac{s}{l}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4h^2}}\right) mgh\,.$$

$\boxed{13.}$ Jurov voltmeter ukáže podľa zapojenia napätie, ktoré je medzi rezistormi s odporom R a $2R$. Preto si najprv vypočítame prúdy pretekajúce jednotlivými rezistormi.

Prúd pretekajúci prvým rezistorom je taktiež aj celkový prúd v obvode. Rezistory v obvode sú zapojené iba sériovo a paralelne, a teda celkový odpor vypočítame triviálne

$$R_0 = R + \frac{(2R + 4R)(3R + 5R)}{2R + 4R + 3R + 5R} = \frac{31}{7}R$$

Z toho už dostaneme prúd $I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{7}{31}\frac{U}{R}$.

Prúd prechádzajúci druhým rezistorom získame z 2. Kirchhoffovho zákona pre uzavretú slučku. Poprípade vieme, že prúd sa v paralelnom zapojení delí v opačnom pomere ako je pomer odporov jednotlivých vetiev, a teda

$$I' = \frac{3R + 5R}{2R + 4R + 3R + 5R}I_0 = \frac{4}{31}\frac{U}{R}$$

Všetky potrebné informácie o obvode máme a už iba jednoducho spočítame napätie namerané voltmetrom ako súčet čiastkových napätí na jednotlivých rezistoroch.

$$U_{Volt} = RI_0 + 2RI' = \frac{15}{31}U$$

14. Fuj! Zrezaný kužeľ, to ťažisko sa bude teda počítať ťažko…jedine, že by sme ho vôbec nepotrebovali. Stačí, ak si spomenieme, že moment sily $\vec{M}$ sa počíta ako vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily $\vec{r}$ a pôsobiacej sily $\vec{F}$. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Na zistenie veľkosti momentu sily nám stačí poznať dĺžku kolmej zložky tohto polohového vektora, t.j. dĺžku ramena sily. Stačí teda, ak vyvážime všetky momenty vzhľadom na dolnú hranu pohára a objem už len triviálne vyjadríme. Označme si hmotnosť Žaby M, hmotnosť pohára m, vrchný polomer pohára R a dolný r. Čiže dostávame

$$mgr + V\rho gr = Mg(R-r) \implies V = \frac{M}{\rho}\frac{(R-r)}{r} - \frac{m}{\rho} = \frac{50}{3}\mathrm{ml} \doteq 16{,}67\,\mathrm{ml}\,.$$

Pre iné číselné hodnoty by sa mohlo taktiež stať, že žabu bude priťažká a vodou už pohár vyvážiť nevieme.

15. V generátore v jednom cykle spálime palivo s hmotnosťou m_0 a výhrevnosťou H. Uvoľní sa pri tom energia $E0 = Hm_0$. Účinnosť generátora je η. To znamená, že sa efektívne využije energia $E = \eta E_0$ a zvyšok sa uvoľní v podobe tepla $Q = E_0 - E = Hm_0\,(1-\eta)$. Generátor následne ochladíme vodou z nádrže s hmotnosťou m, ktorá absorbuje všetko teplo Q a odvedie ho do nádrže. Mohli by sme, samozrejme, zrátať, ako sa zohreje voda m, a potom, akú teplotu dosiahne voda po zmiešaní v nádrži a takto pokračovať, ale je to úplne zbytočné. Celý systém je dokonale izolovaný, teda teplo nemôže unikať, a tak sa bude hromadiť v nádrži. Po n cykloch sa uvoľní teplo nQ, ktoré absorbuje voda s hmotnosťou M a počiatočnou teplotou t_0. Platí $nQ = Mc\,(t - t_0)$, odkiaľ $t = \dfrac{nQ}{Mc} + t_0 = \dfrac{n\,(1-\eta)\,Hm_0}{Mc} + t_0$.

16. Na kratšiu stranu mydlovej blany pôsobí sila povrchového napätia $F_p = 2\sigma d$. (Dvojka preto, lebo mydlová blana má dve rozhrania so vzduchom.) Potom ako mydlová blana praskne pozdĺž kratšej strany, tak túto silu už nemá ako kompenzovať rámik, a preto začne urýchľovať celú mydlovú blanu hmotnosti $m = ldh\rho$. Zrýchlenie mydlovej blany je $a = F/m = \dfrac{2\sigma}{lh\rho} \approx 600\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, preto aj keby sme blanu natočili v smere tiažovej sily, tak by to veľmi neovplyvnilo výsledok.

Ide teda o rovnomerne zrýchlený pohyb, pričom ťažisko blany musí prejsť z jej stredu na okraj, teda dĺžku $l/2$. Pre čas zmršťovania teda dostávame

$$t = \sqrt{\frac{2\frac{l}{2}}{a}} = \sqrt{\frac{l^2 h\rho}{2\sigma}} = 13\,\mathrm{ms}.$$

Ak by sme sa pozerali na pohyb okraja blany, t.j. uvažovali, že musí prejsť celú dĺžku dlhšej strany l, dopracovali by sme sa k výsledku 18 ms Tento čas je horným odhadom. Čas 13 ms je naopak dolným odhadom. Rozdiel vyplýva z toho, či sa pozrieme na pohyb okraju blany alebo ťažiska.[3]

[3] Ak by sme chceli presnejší výsledok, tak by sme museli započítať aj fakt, že sa mení hmotnosť blany, ktorá sa pohybuje.

$\boxed{17.}$ x–ovú súradnicu ťažiska určíme ľahko – zo symetrie loďky je zjavné, že ťažisko sa bude nachádzať na jej osi, teda $x = 2{,}5$. Vo zvislom smere to už bude komplikovanejšie. Použijeme momentovú vetu – ak totiž loďku podoprieme v ťažisku, výslednica momentov síl v ňom bude nulová. Navyše predpokladáme konštantnú plošnú hustotu papiera, teda hmotnosť ľubovoľného kúsku papiera bude priamo úmerná jeho ploche.

Rozdelíme si teda loďku na štyri časti. Prvá časť je vrchná strieška v tvare trojuholníka. Jej ťažisko sa nachádza vo výške $y_1 = \frac{4}{3}$, pričom má plochu $S_1 = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$. Ďalej máme dva trojuholníky po okrajoch s plochou $S_2 = \frac{1}{2}$ a ťažiskom vo výške $y_2 = \frac{2}{3}$.[4] Zostal nám už iba obdĺžnik s plochou $S_3 = 3$ a ťažiskom vo výške $y_3 = \frac{1}{2}$.

Teraz, keď poznáme polohy ťažísk všetkých častí, dostaneme pre výšku ťažiska ako vážený priemer

$$y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{7}{10}$$

A teda ťažisko má súradnice $[2{,}5; 0{,}7]$.

$\boxed{18.}$ Problém si vieme rozdeliť na dve časti. V prvej letí náboj rovnomerne spomaleným pohybom smerom nahor s počiatočnou rýchlosťou v, pričom mu to bude trvať čas t_1. V druhej časti po náraze, sa už iba šíri zvuková vlna konštantnou rýchlosťou c smerom k nám a trvá jej to čas $t - t_1$, kde $t = 5\,\mathrm{s}$. V oboch prípadoch bude prejdená vzdialenosť h, čo je presne výška, ktorú hľadáme. Dostávame teda rovnice

$$h = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$h = c(t - t_1)$$

Tie vieme upraviť na škaredú kvadratickú rovnicu, čím už ľahko získame riešenia pre výšku jaskyne.

$$h = \frac{\frac{gt}{c} - 1 - \frac{v}{c} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c} - \frac{gt}{c}\right)^2 + 4\frac{g}{2c^2}\left(vt - \frac{1}{2}gt^2\right)}}{\frac{g}{c^2}}$$

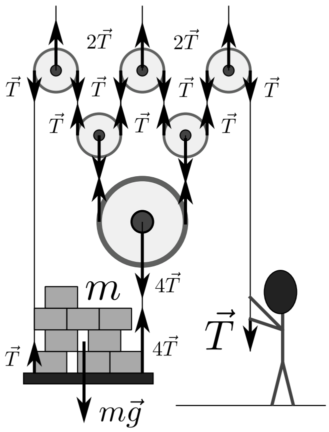
V tomto bode sa musíme zastaviť a zamyslieť, ktoré riešenie je to naše. Fyzikálny zmysel dáva iba to s kladnou výškou, a teda riešenie s "plusom". Po pár úpravách konečne dostaneme výšku jaskyne, v ktorej strieľa Sebastián.

$$h = c\left(t - \frac{c+v}{g} + \sqrt{\left(\frac{c+v}{g}\right)^2 - \frac{2ct}{g}}\right) \approx 591{,}20\,\mathrm{m}$$

[4] Ťažnica smerujúca k prepone má dĺžku $\frac{1}{sqrt2}$ a ťažisko sa nachádza v tretine tejto vzdialenosti od prepony. Ak vypočítame kolmú vzdialenosť od odvesny dostaneme dĺžku $\frac{1}{3}$.

$\boxed{19.}$ Tak ako nám zadanie hovorí, hmotnosti lán a kladiek môžeme zanedbať a budeme ich považovať za ideálne. To však znamená, že výslednica síl aj momentov síl pôsobiacich na každú kladku musí byť nulová a laná prenášajú silu, ktorou sú napínané, pozdĺž celej svojej dĺžky.

Teraz keď to vieme, predstavme si, že zatiahneme za lano silou T. Keďže sme si povedali, že lano prenáša silu, tak tehly budú vyťahované týmto lanom silou T. Kladky vo vrchnom rade budú ťahať sily T smerom nadol z oboch strán a závesy z vrchu ich budú kompenzovať silou $2T$. Tým bude dosiahnutá rovnováha síl na týchto 3 kladkách. Na 2 kladky v strede budú pôsobiť ťahové sily T smerom nahor z oboch strán, a teda lano z nich visiace musí byť napínané silou $2T$ z každej strany. Z tejto úvahy logicky dostávame, že lano visiace z poslednej kladky bude pôsobiť silou $4T$ na tehly.



Obr. 25: Sily v kladkostroji

Na tehly by teda mala pôsobiť celková sila $5T$, ktorá musí byť väčšia ako mg. Ak teda chceme zdvihnúť tehly musíme pôsobiť silou aspoň $\dfrac{mg}{5}$.

$\boxed{20.}$ Pri každom riedení klesne priemerne počet molekúl účinnej látky vo vodnom roztoku na jednu stotinu. Ak označíme počet molekúl v roztoku N, tak potrebujeme zistiť, pre aký najmenší stupeň riedenia n (prirodzené číslo) bude už v priemernom prípade počet molekúl menší ako 1, teda $N\left(\dfrac{1}{100}\right)^n < 1$. Na to využijeme logaritmus.

$$n = \lceil \log_{100} N \rceil$$

[5] Zostáva teda zistiť, koľko molekúl je v objeme $V = 5\,\mathrm{ml}$ vody. To zistíme za použitia Avogadrovej konštanty ($N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$) a molovej hmotnosti vody ($M_m = 18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) ako

$$N = \frac{V\rho}{M_m} N_A$$

[5]Výraz $\lceil x \rceil$ označuje hornú celú časť z x, t.j. najbližšie celé číslo rovné alebo väčšie ako x.

V priemernom prípade teda potrebujeme

$$n = \left\lceil \log_{100}\left(\frac{V\rho N_A}{M_m}\right)\right\rceil = \left\lceil \log_{100}\left(\frac{5\times10^{-6}\,\mathrm{m}^3\cdot 1\times10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\cdot 6{,}022\times10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{18\times10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}\right)\right\rceil = 12$$

riedení.

$\boxed{21.}$ Otázka úlohy smeruje na uhlovú rýchlosť rolky, takže by sme mali intuitívne cítiť, že treba použiť zákon zachovania energie. V našej situácii sa potenciálna energia papiera a mačky premieňa na kinetickú energiu papiera a mačky. Rolka žiadnu energiu nekradne, keďže jej hmotnosť je zanedbateľná.

Jazykom rovníc:

$$-\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$MgL + mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Je zrejmé, že rýchlosť papiera, rýchlosť mačky a obvodová rýchlosť rolky v čase úplného odmotania sú všetky rovnaké a rovné $v = \sqrt{\frac{2M+m}{M+m}Lg}$. Teda uhlová rýchlosť rolky v čase odmotania je:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2M+m}{M+m}Lg}$$

$\boxed{22.}$ Dôvodom, prečo sa prúd vody so vzdialenosťou stenčuje, je to, že platí rovnica kontinuity – zachovanie prietoku Q. Túto skutočnosť zvykneme zapisovať ako:

$$Q = \text{konšt.} \qquad \longrightarrow \qquad Q = \pi R^2 v_0 = \pi r^2 v_r\,,$$

kde $v_0 = \dfrac{Q}{\pi R^2} \doteq 16\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, je rýchlosť vody vychádzajúcej z kohútika a v_r je rýchlosť vody v momente, keď má vodný prúd polomer r. Potrebujeme teda zistiť rýchlosť vody v mieste dopadu na umývadlo. Napíšeme si zákon zachovanie energie pre kúsok vody, ktorý sa dostal od kohútika až na umývadlo a dostávame

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_r^2 \qquad \longrightarrow \qquad v_r = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}$$

Toto zistenie dosadíme do rovnice kontinuity[6] a máme:

$$Q = \pi r^2\sqrt{v_0^2+2Hg} \qquad \longrightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sqrt{v_0^2+2Hg}}} = \doteq 0{,}50\,\mathrm{cm}$$

[6]Hneď prvá rovnica v tomto vzorovom riešení

23. Skúsme ísť na to postupne. Prvý vozík sa pohyboval okamžite. Druhý sa rozhýbal až po čase l/v_1, keď sa naplo prvé lano. Rýchlosť dvoch pohybujúcich sa vozíkov v_2 zistíme zo zákona zachovania hybnosti[7]

$$mv_1 = (m+m)v_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \frac{v_1}{2}$$

Vidíme, že rýchlosť je polovičná. No poďme ďalej. Tretí vozík sa rozpohyboval po napnutí druhého lana, čiže po čase $l/v_1 + l/v_2 = 3l/v_1$. Rýchlosť troch pohybujúcich vozíkov zistíme opäť zo zákona zachovania hybnosti:

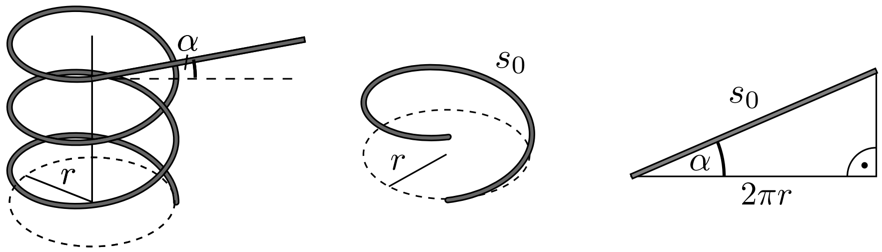
$$mv_1 = (m+m+m)v_3 \qquad \longrightarrow \qquad v_3 = \frac{v_1}{3}$$

Je asi jasné, ako by to pokračovalo. Vláčik s n vozňami by sa hýbal rýchlosťou v_1/n a stalo by sa to po napnutí $(n-1)$-ého lanka. Teda Tinkin vláčik sa celý rozhýbal až po čase:

$$T = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} + \cdots + \frac{l}{v_{N-1}} = \frac{l}{v_1}\Big(1 + 2 + \cdots + (N-1)\Big) = \frac{l}{v_1}\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{l}{v_1}\frac{N(N-1)}{2}$$

24. Včielka sa pohybuje s uhlovým zrýchlením ε. Za čas t opíše uhol $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, to znamená, že spraví $n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}$ otáčok.

Ako zadanie hovorí, rýchlosť pohybu včielky nahor je úmerná uhlovej rýchlosti. Po chvíľke zamyslenia zistíme, že koniec krídelka sa teda pohybuje po špirále, pričom rozostupy medzi závitmi sú rovnaké. Sklon závitov je daný sklonom krídeliek, čiže je rovný α. Označme dĺžku závitu s_0. Urobme priemet závitu do roviny. Takto dostaneme kružnicu dĺžky $2\pi r$. Následne rozviňme závit a jeho priemet do roviny. Dostaneme pravouhlý trojuholník znázornený na obrázku.



Obr. 26

Z trigonometrie dostaneme, že $\cos\alpha = \frac{2\pi r}{s_0}$, odkiaľ $s_0 = \frac{2\pi r}{\cos\alpha}$. Dráhu opísanú koncom krídelka získame tak, že dĺžku závitu už len prenásobíme počtom závitov.

$$s = ns_0 = \frac{\varepsilon r t^2}{2\cos\alpha}\,.$$

[7] Pri riešení tejto úlohy nemôžeme využiť zákon zachovania energie, pretože rozhýbanie stojaceho vozíka je vo svojej podstate nepružnou zrážkou.

$\boxed{25.}$ Mišovu hmotnosť označíme M, Kajinu m. Ak si rozložíme zložky tiažovej sily pôsobiacej na Kaju a na Miša, nie je ťažké prísť na to, že zložky tiažových síl pôsobiacich v smere kopcov musia byť v rovnováhe.

$$mg\cos(\alpha) = Mg\cos(2{,}5\alpha)$$

Po dosadení hmotností, nám už stačí vyriešiť nasledujúcu rovnicu,

$$cos(\alpha) = 1{,}25\cos(2{,}5\alpha)$$

Problémom však je, že keď sa budeme snažiť použiť goniometrické vzťahy na prepísanie $cos(2{,}5\alpha)$ pomocou $cos(\alpha)$ a $sin(\alpha)$, dopracujeme sa k polynómu vysokého stupňa, pre ktorý už vo všeobecnosti neexistuje vzorec, ktorý by nám prezradil, aké sú korene danej rovnice.

Keďže hľadáme riešenie rovnice pre konkrétne hodnoty hmotností a opravovatelia po nás chcú len číselný výsledok, nebojíme sa použiť kalkulačku. Chceme predsa, čo najrýchlejšie úspešne vypočítať príklad. Vo fyzike sa totiž časom dopracujeme k rovniciam, ktoré už nevieme vyriešiť vo všeobecnosti, ale len pre konkrétne hodnoty parametrov.

Asi najjednoduchšia metóda, akú môžeme použiť, je *binárne vyhľadávanie*. Nemusíte sa báť, nie je to nič strašné. Najprv si však z rovnice urobíme funkciu $f(\alpha) = \cos(\alpha) - 1{,}25\cos(2{,}5\alpha)$. Teraz sa budeme pozerať, ako sa mení znamienko tejto funkcie na nejakom intervale. Ak sa totiž zmení znamienko na našom intervale, tak tam bude určite ležať koreň.[8] Celá myšlienka je založená na rozumnom zmenšení tohto intervalu, napr. aby sa ľavý ani koncový bod nelíšili v stupňoch na druhom desatinnom mieste.

1. Na začiatku si tipneme, v akom intervale $< x, y >$ bude ležať riešenie. V našom prípade to je ľahké, ak riešenie existuje, tak musí ležať medzi 0 a $\frac{1}{2{,}5}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.[9]

2. Následne sa pozrieme na hodnotu funkcie $f(\alpha)$ v bode $\alpha = \frac{x+y}{2}$. Podľa toho, aké je znamienko funkcie v tomto bode, si v ďalšom kroku zoberieme znovu taký interval, na ktorom sa mení znamienko funkcie. Čiže zmeníme buď x alebo y na terajší stred.

3. Postup opakujeme, pokiaľ interval nie je dostatočne malý, v našom prípade pokiaľ sa konce intervalu líšia na prvom desatinnom mieste.

Vyžaduje si to len trošku šikovnosti a kúsok trpezlivosti. Po trinástich opakovaniach sa dopracujeme k vytúženému výsledku 15,9°. Počítače využívajú postupy vyžadujúce menší počet krokov, no napočítali by sme sa pri nich viac. Na Náboji nám ide predsa o rýchlosť!

Ďalšou možnosťou, ako sa dopracovať k výsledku, je využiť Taylorov rozvoj[10], t.j. $\cos(\alpha)$ aj $\cos(2.5\alpha)$ aproximujeme polynómami napr. v okolí nuly. Keďže teraz máme na obidvoch

[8] Toto tvrdenie v skutočnosti platí iba pre spojité funkcie – také, ktorých graf sa dá „nakresliť jedným ťahom."

[9] Uhol α určite nemôže byť väčší ako $\frac{1}{2{,}5}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (36°), lebo potom by rovnovážna situácia nenastala, keďže by Kaja stiahla Miša do rokliny pod kopcom. Premyslite si to!

[10] Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0 je $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)'}{1!}(x - x_0) + \frac{f(x_0)''}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$, kde čiarky značia derivácie funkcie v danom bode.

stranách kosínusy, tak v Taylorovom rozvoji sa budú vyskytovať iba párne mocniny α. Ak by sme však mali rovnicu, ktorá by obsahovala sínusy aj kosínusy, tak by sme podobný trik nevedeli použiť, pretože by sme sa dopracovali znovu ku kubickej rovnici.

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

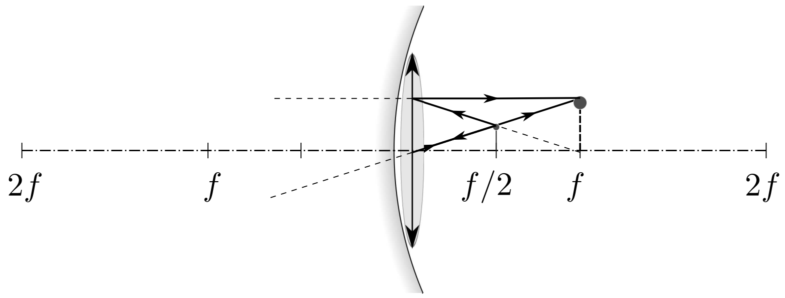
$$\cos(2{,}5\alpha) \approx 1 - 3{,}125x^2 + 1{,}6276x^4 + \dots$$

Dosadením do rovnice, získame bikvadratickú rovnicu,

$$\cos(\alpha) - 1{,}25\cos(2{,}5\alpha) = 0 \implies x^4 - 1{,}709\,25x^2 + 0{,}125\,45 = 0$$

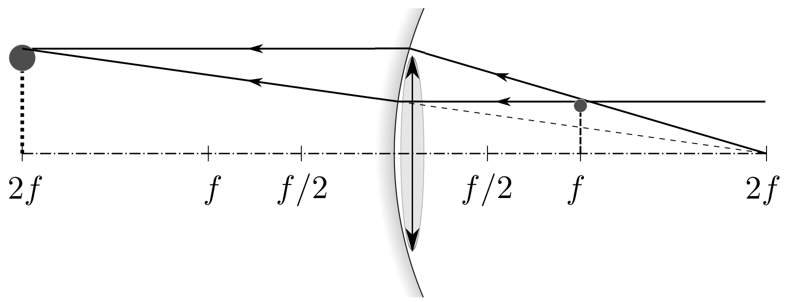
Odkiaľ zoberieme riešenie $\alpha = 0{,}277\,218$ (v radiánoch) ležiaci v našom intervale. Po prepočítaní na stupne dostaneme 15,9°, čo je vzhľadom na požadovanú presnosť správny výsledok :). [11]

$\boxed{26.}$ Obrazy budeme postupne zobrazovať spojkou a zrkadlom, pokiaľ nedostaneme reálny obraz na našej strane. Lúče sú vyznačené na obrázku. Najprv zobrazíme špendlík spojkou s ohniskovou vzdialenosťou f. Tým sa nám špendlík zobrazí do ohniska spojky na tej istej strane. Dostane sa do dvojnásobnej vzdialenosti a obraz sa dvakrát zväčší.



Obr. 27: Zobrazenie špendlíku spojkou s ohniskovou vzdialenosťou f

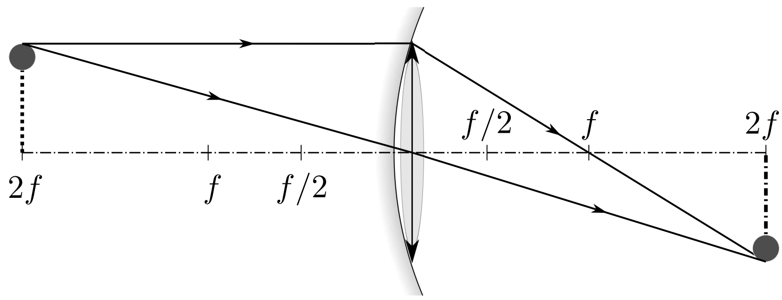
Následne obraz špendlíka zobrazený spojkou zobrazíme pomocou dutého zrkadla s ohniskovou vzdialenosťou $2f$. Tým sa obraz stane virtuálnym, dostane sa do dvakrát väčšej vzdialenosti a opäť sa dvakrát zväčší.



Obr. 28: Zobrazenie špendlíka zobrazeného spojkou pomocou dutého guľového zrkadla

[11] Rozdiel začne byť až na treťom desatinom mieste :).

Nakoniec opätovne zobrazíme virtuálny obraz špendlíka spojkou, čím sa obraz stane reálnym, jeho vzdialenosť od stredu spojky sa nezmení a to sa týka aj jeho veľkosť.



Obr. 29: Zobrazenie virtuálneho obrazu špendlíka pomocou spojky

Celkovo teda dostaneme obraz špendlíka vo vzdialenosti $2f$ od šošovky, ktorý je prevrátený a štyrikrát zväčšený.

27. Úloha nie je ťažká, no vyžaduje pomerne hlboký fyzikálny vhľad.

Najprv sa však zamyslime, prečo by sa mala škrupinka zmršťovať. Keďže gravitačná sila má príťažlivý charakter a v škrupinke je hmota rozdelená rovnomerne, tak na každý malý kúsok škrupinky pôsobí gravitačná sila od zvyšných kúskov na povrchu škrupinky. Tá má tendenciu škrupinku zmršťovať. Ak by sme si teraz predstavili nehmotnú škrupinku rovnomerne nabitú nábojom Q, tak by mali jednotlivé kúsky škrupinky tendenciu škrupinku rozťahovať. Plošnú hustotu náboja označíme $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ a plošnú hustotu hmoty $\lambda = \dfrac{M}{4\pi R^2}$.

Ako to teda bude, ak je škrupinka hmotná a zároveň nabitá? Kľúčové pozorovanie je, že veľkosť gravitačnej aj elektrickej sily je nepriamo úmerná štvorcu vzdialenosti a obidve pôsobia v rovnakom smere, len ich orientácia je rôzna. V tomto prípade ide teda o „rovnaké“ fyzikálne polia, ktoré sa líšia len orientáciou a fyzikálnymi konštantami, ktoré nám vyrobia tie správne jednotky.[12] Ak si teda predstavíme dva ľubovoľné kúsky, ktorých plocha je S_1 a S_2, tak škrupinka musí byť nabitá takým nábojom Q, aby sa gravitačná a tiažová sila navzájom kompenzovali.

$$F_{\text{gravitačná}} = F_{\text{elektrická}} \implies G\frac{\lambda^2 S_1 S_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma^2 S_1 S_2}{r^2} \implies GM^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2$$

$$Q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}M$$

28. Na lietadlo sa vlastne pozeráme v dvoch rôznych sústavách – prvá je spojená so zemou a druhá so vzduchom, pričom sa voči sebe pohybujú nejakou, nám zatiaľ neznámou rýchlosťou vetra u.

[12] Treba ale poznamenať, že tieto analógie majú iba obmedzený charakter, keďže pri hmotnosti sa nám nevyskytuje nič ako polarita náboja a taktiež tam nemáme také bohaté druhy hmoty ako v elektromagnetizme. Napríklad izolanty a vodiče, ktoré sú zodpovedné za mnohé zaujímavé javy v elektrostatike :).

Najprv sa pozrime na vzlet proti vetru v oboch sústavách. V sústave zeme lietadlo počas štartu zrýchli z pokoja na rýchlosť $v-u$ a v sústave spojenej so vzduchom z rýchlosti u na rýchlosť v. Hneď vieme vyjadriť čas, ktorý na to potrebovalo – ten musí byť samozrejme v oboch sústavách rovnaký, $t=\frac{v-u}{a}$. No a ak poznáme čas a zrýchlenie, vieme ľahko vyjadriť celkovú prejdenú dráhu v sústave zeme, ktorá navyše musí byť rovná L.

$$L=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{(v-u)^2}{a}$$

Odtiaľ vyjadríme $u=v-\sqrt{2aL}$.

Teraz sa pozrieme na vzlet v opačnom smere. Jediným rozdielom bude zmena znamienka pri u, keďže naše lietadlo má teraz vietor za chrbtom. Zrýchľovanie bude trvať samozrejme dlhšie, keďže voči zemi teraz zrýchľujeme z pokoja až na rýchlosť $v+u$. Preto aj prejdená dráha L' bude musieť byť väčšia.

$$L'=\frac{1}{2}at'^2=\frac{1}{2}\frac{(v+u)^2}{a}$$

a odtiaľ $u=\sqrt{2aL'}-v$.

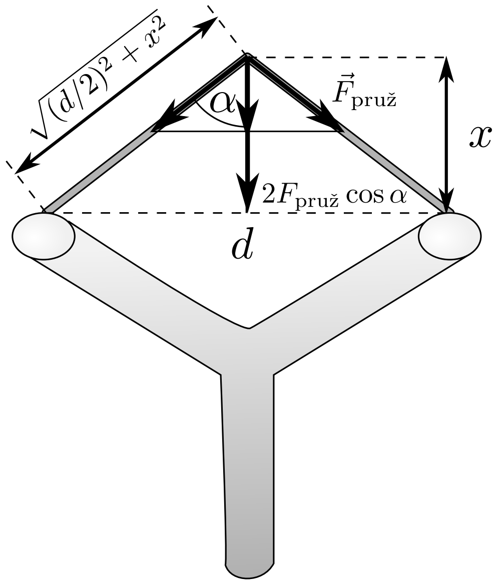
Nakoniec obe rovnice pre u spojíme, a po úpravách dostaneme

$$L'=L+\frac{2v^2}{a}-2v\sqrt{\frac{2L}{a}}$$

Dosadíme do vzorca číselné hodnoty, čím dostaneme $L'\doteq 2057\,\mathrm{m}$.

$\boxed{29.}$ Ako nám zadanie napovedá, musíme zistiť ako medzi sebou súvisí sila, ktorou musíme pôsobiť na stred gumičky, a dosiahnutá výchylka gumičky. Najprv si zostrojíme prak, tým gumičku natiahneme na d. Tuhosť gumičky je k. Teraz si gumičku v strede pomyselne rozdelíme na polovicu. Potom má každá polovica gumičky dvojnásobnú tuhosť $2k$.[13] Ak stred gumičky vychýlime o x, tak každá polovica gumičky sa natiahne na dĺžku $\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}$ (Pytagorova veta). Vratná sila od gumičky, ale pôsobí v smere natiahnutých gumičiek, čiže musíme urobiť ešte ich priemet. Vďaka čomu nám tam vyskočí ešte $cos\alpha$, kde α je uhol medzi pružinkou a smerom vychýlenia. Kosínus uhla určíme z pravouhlého trojuholníka.

[13] Predstavme si dlhú rovnú gumičku s tuhosťou k. Ak ju rozdelíme na polovicu, tak každý z kúskov bude mať dvojnásobnú tuhosť. Ak totiž na gumičku pôsobíme silou F, a tá sa natiahne o Δx, tak na každý z kúskov pôsobí rovnaká sila, oba sa natiahnu rovnako (iba o $\Delta x/2$). Musia mať teda dvojnásobnú tuhosť, aby sa tak stalo.



Obr. 30: Rozklad síl pri naťahovaní praku

$$F(x) = 2(2k)\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}}$$

Škaredé odmocniny sa nám vykrátia, a vidíme, že tuhosť praku (pomer sily F a výchylky x) je $4k$.

$$F(x) = 4kx.$$

$\boxed{30.}$ Lano sa voľne visiac odtrhne vtedy, keď tlak tiažovej sily prekoná medzu pevnosti. Jazykom rovníc:

$$\sigma = \frac{mg}{S} = \frac{\rho L g}{S},$$

kde L je hraničná dĺžka voľne visiaceho lana, S jeho prierez a ρ dĺžková hustota. Teraz prichádza otázka, koľko lana si musíme z kotúča odmotať (označme túto dĺžku ako L^*), aby sa roztrhlo vďaka odstredivej sile pri otáčaní veľkou uhlovou rýchlosťou ω. Keďže ω je podľa zadania veľká, môžeme gravitačné pôsobenie v porovnaní s odstredivou silou pokojne zanedbať. Opäť, tlak odstredivej sily musí prekonať medzu pevnosti.

Odstredivú silu pôsobiacu na celé lano vypočítame ako odstredivú silu pôsobiacu na hmotný bod s hmotnosťou celého lana, ktorý sa nachádza v mieste ťažiska lana[14]:

[14] Formálnejším prístupom k vypočítaniu odstredivej sily by bolo použiť integrál:

$$F_o = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = \rho L^* \omega^2 \frac{L^*}{2} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}$$

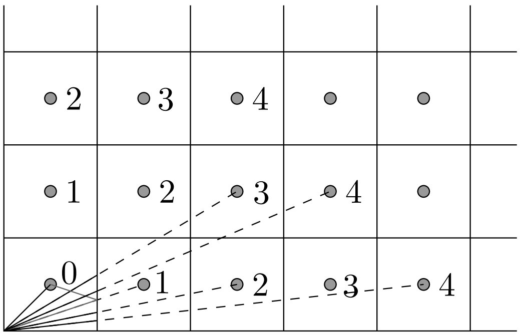
Už môžeme napísať rovnosť tlaku odstredivej sily a medze pevnosti:

$$\sigma = \frac{F_o}{S} = \frac{\frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}}{S} \qquad \longrightarrow \qquad L^* = \sqrt{\frac{2\sigma S}{\rho\omega^2}}$$

Hodnotu výrazu $\frac{\sigma S}{\rho}$ poznáme z prvej rovnice v tomto vzorovom riešení. Je ňou $\frac{\sigma S}{\rho} = Lg$. Takže konečný výsledok pre L^* je:

$$L^* = \sqrt{\frac{2Lg}{\omega^2}}$$

$\boxed{31.}$ Príklad vyriešime pomocou virtuálnych obrazov. Miestnosť si rozšírime na nekonečnú štvorcovú mriežku a zavedieme si súradnicovú sústavu. Roh, kde stojí Vladko, bude v jej počiatku, a balón bude v strede skutočnej miestnosti na súradniciach $[5,5]$. Potom si do stredu každého vzniknutého štvorca pridáme nový virtuálny balón a pokúsime sa ho priamo zasiahnuť laserom.



Obr. 31

Počet odrazov si označíme k. Bude rovný počtu mrežových priamok, ktoré pretneme. Vzdialenosť, ktorú lúč prejde, označíme l, a bude zodpovedať vzdialenosti virtuálneho balóna od počiatku. Nakoniec si uvedomíme, že situácia je symetrická okolo osi spájajúcej Vladka s balónom.

$$F_o = \int_0^{L^*} \omega^2 r \mathrm{d}m = \int_0^{L^*} \omega^2 \rho r \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2},$$

čo ale robiť nemusíme. Keďže odstredivá sila závisí lineárne od vzdialenosti ($F_o = m\omega^2 r$), tak vlastne integrálom počítame rovnakú plochu pod grafom, ako keď hľadáme dráhu zrýchleného pohybu - je ňou trojuholník. No a plocha takéhoto trojuholníka v grafe závislosti odstredivej sily F_o od vzdialenosti od osi r je (premyslieť!!) presne $\frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}$. Všimnite si, že rovnakým spôsobom počítame napríklad moment tiažovej sily v mechanike.

Zo zadania teraz vieme povedať, že intenzita svetla pri balóne bude $(0.9)^k \cdot (0.99)^l$–krát menšia, ako na začiatku lúča. Teraz stačí, aby $(0.9)^k \cdot (0.99)^l < 0.5$, a zároveň aby neexistovala dvojica k a l, pre ktorú bude intenzita väčšia.

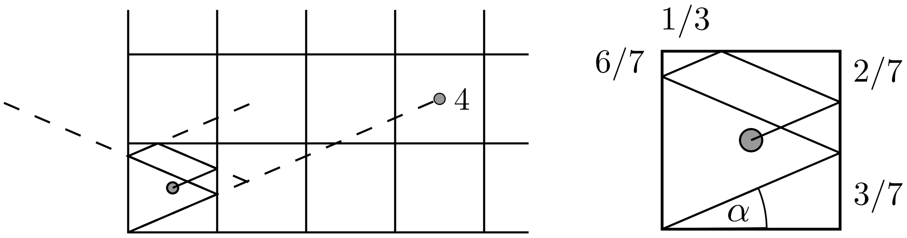
Správne riešenie na prvý pohľad asi neuvidíme, takže budeme musieť skúšať. Napríklad ak zasvietime priamo na balón ($\alpha = 45°$), $k = 0$ a $l = \sqrt{5^2 + 5^2} \doteq 7.07$. Intenzita je potom približne $(0.9)^0 \cdot (0.99)^{7.07} = 93{,}1\,\%$ pôvodnej. To je samozrejme príliš veľa, a balón nám praskne. Takže sa pokúsime trafiť ho po jednom odraze. Vtedy musíme mieriť na virtuálny balón na súradniciach $[5, 15]$. Tu platí $k = 1$ a $l = \sqrt{15^2 + 5^2} \doteq 15.8$. Po dosadení do vzorca zistíme, že laser je stále príliš silný.

Keď takto vyskúšame niekoľko možností, zistíme, že ani po troch odrazoch sa svetlo nikdy dostatočne nestlmí, ale na štyri to už pôjde. Ako najlepšia možnosť sa bude javiť virtuálny obraz v štvorci „o dve vpravo, o dve hore“ na súradniciach $[25, 25]$. Tento obraz však zasiahnuť nemôžeme, pretože nám zavadzia skutočný balón na súradniciach $[5, 5]$.

Ako druhý skúsime štvorec „o jedno vpravo, o tri hore“ s balónom na súradniciach $[15, 35]$. Intenzita lúča pri dopade bude $(0.9)^4 \cdot (0.99)^{\sqrt{1450}} \doteq 44{,}7\,\%$ pôvodnej intenzity.

Poslednou možnosťou je štvorec $[0, 4]$. Virtuálny balón v jeho strede má súradnice $[5, 45]$. Intenzita v tomto prípade vyjde $(0.9)^4 \cdot (0.99)^{\sqrt{2050}} \doteq 41{,}6\,\%$ pôvodnej. To je ale menej, ako v prechádzajúcom prípade.

Pri viacerých odrazoch nám už balón určite nepraskne, pretože s každým ďalším odrazom sa lúč tlmí ešte viac a aj prejdená vzdialenosť nám narastá. [15] My ale hľadáme najväčšiu možnú intenzitu, takže sme našli správne riešenie. Ostáva nám vyjadriť uhol: svietime na virtuálny obraz na súradniciach $[15, 35]$, takže $\alpha = \arctan(15/35) = \arctan(3/7) \doteq 23{,}2°$ a intenzita bude vtedy približne $44{,}7\,\%$ pôvodnej. A zo symetrie je rovnako dobrým riešením aj $\alpha = \arctan(7/3)$.



Obr. 32

$\boxed{32.}$ K riešeniu sa dostaneme takmer bez výpočtov - treba si ale poriadne uvedomiť, ako JaroMišo funguje. Funguje takto: zbiera padajúcu dažďovú vodu, ktorá má nulovú hybnosť vo vodorovnom smere a strieka ju do strany výtokovou rýchlosťou. Udelí jej teda hybnosť a (vďaka zákonu zachovania hybnosti) vozidlo samotné tak získa rovnakú hybnosť opačným smerom.

Čo sa deje v ustálenom stave? Nemení sa výška hladiny a ani hybnosť vozidla s vodou. Z toho vyplýva, že

[15] Pozor, toto neplatí univerzálne. Ak by hodnoty útlmu boli menšie, než v zadaní, mohlo by sa stať, že riešenie s menšou vzdialenosťou a viacerými odrazmi bude lepšie. Vieme ale ľahko overiť, že pre zadané hodnoty to nenastane.

1. Prítok dažďovej vody sa musí rovnať odtoku vytekajúcej vody: $wA = v_{vtok}S$.

2. Rovnakú horizontálnu hybnosť, akú si prináša daždová voda, si musí odnášať vystrekovaná. Keďže dážď padá zvislo (nulová vodorovná zložka rýchlosti), vystrekovaná voda musí *vzhľadom na zem stáť*. To sa stane práve vtedy, keď bude voda striekaná tak rýchlo, ako sa vozidlo hýbe (akurát opačným smerom): $v_{vozidlo} = v_{vtok}$.

Teraz už ľahko vidieť výsledok $v_{vozidlo} = v_{vtok} = w\dfrac{A}{S}$.

$\boxed{33.}$ V ustálenom stave, kedy sa už teplota vodiča nemení, je výkon Joulovho tepla ($P_{\text{elektrický}} = I^2R$) nutne rovnaký ako výkon tepelných strát. Keďže v obidvoch prípadoch chceme dosiahnuť rovnakú teplotu, nemusíme sa zamýšľať nad tým, či prevažujú straty tepla žiarením $\sim T^4$ alebo iba vedením $\sim \Delta T$, je to úplne jedno, keďže členy vzorca obsahujúcu teplotu vlákna a prípadne teplotu okolia budú v obidvoch prípadoch číselne rovnaké. Dôležité je iba si uvedomiť, že výkon tepelných strát je úmerný ploche valcového plášťa vodiča.

$$P_{\text{straty}} \sim 2\pi rl \implies P_{\text{straty}} = C2\pi rl$$

Nesmieme ešte zabudnúť na to, že aj odpor vodiča závisí od jeho polomeru, keďže sa mení jeho prierez, a teda plocha, cez ktorú tečie elektrický prúd. Odpor vodiča určíme na základe Ohmovho zákona, kde ρ je merná elektrická rezistivita a l jeho dĺžka.

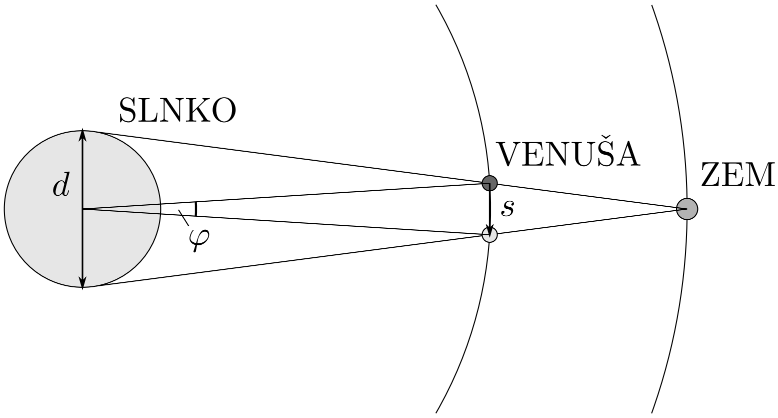
$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{\pi r^2}$$

V ustálenom stave musí platiť rovnosť výkonu Joulovho tepla a výkonu tepelných strát,

$$P_{\text{elektrický}} = P_{\text{straty}} \implies I^2\rho\frac{l}{\pi r^2} = C2\pi rl \implies I^2 \sim r^3$$

To znamená, že ak zväčšíme polomer dvojnásobne, tak prúd musíme zväčšiť $\sqrt{2^3}$-násobne aby sa nezmenila teplota vlákna. (Nezabudnite, že C je závislé od teploty!)

$\boxed{34.}$ Pokladajme Zem a Venušu za bodové objekty vzhľadom na vzdialenosti od Slnka a priemer Slnka. Nech vzdialenosť Zeme od Slnka je R a vzdialenosť Venuše od Slnka $\dfrac{R}{k}$. Slnko vidíme zo Zeme pod malým zorným uhlom. To znamená, že Venuša prechádza popred Slnko na relatívne krátkej dráhe v porovnaní s dĺžkou jej celej obežnej dráhy. To ale znamená, že môžeme trajektóriu Venuše na danom úseku aproximovať priamkou. Z podobnosti trojuholníkov dostávame $\dfrac{2r}{R} = \dfrac{s}{R - R/k}$, odkiaľ $s = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)2r$.



Obr. 33

Za predpokladu, že dráhu s vidíme zo Slnka pod dostatočne malým uhlom (do cca 5°), nevidíme prakticky rozdiel medzi úsečkou a kružnicovým oblúkom. Teda dostaneme, že zo Slnka vidíme dráhu pod uhlom $\varphi = \frac{s}{R/k} = \frac{(k-1)\,2r}{R}$.

Uhlovú rýchlosť Zeme určíme z rovnosti dostredivej a gravitačnej sily

$$m\omega_Z^2 R = G\frac{mM}{R^2}\,.$$

Odtiaľ

$$\omega_Z = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,.$$

Uhlová rýchlosť Zeme je $\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z}$. Pomocou tretieho Keplerovho zákona vypočítame obežnú dobu Venuše a následne aj uhlovú rýchlosť Venuše. Platí

$$\frac{T_Z^2}{R^3} = \frac{T_V^2}{\left(\frac{R}{k}\right)^3}\,,$$

odkiaľ

$$T_V = \frac{T_Z}{\sqrt{k^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GMk^3}}\,.$$

Potom

$$\omega_V = \frac{2\pi}{T_V} = \sqrt{\frac{GMk^3}{R^3}}\,.$$

Nech prechod Venuše popred Slnko trvá τ. Za tento čas musí Venuša opísať o φ väčší uhol než Zem, preto $\omega_V\tau = \omega_Z\tau + \varphi$. Odtiaľ

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega_V - \omega_Z}$$

a po dosadení výrazov pre uhol a uhlové rýchlosti a následnej úprave dostávame dobu prechodu

$$\tau = \frac{2\,(k-1)\,r\sqrt{R}}{\sqrt{GM}\left(\sqrt{k^3}-1\right)}\,.$$

Už len zostáva dosadiť hodnoty zo zadania a dostaneme čas prechodu

$$\tau \approx 28\,440\,\mathrm{s} \approx 7{,}9\,\mathrm{h} \approx 7\,\mathrm{h}54\,\mathrm{min}\,.$$

Na záver by sa zišlo ešte overiť, či naša aproximácia trajektórie Venuše úsečkou bola oprávnená. Nie je sa však ťažké presvedčiť, že celý prechod popred Slnko prebehol na uhle $\alpha = \omega_V \tau \approx 0{,}54°$, čo je dostatočne málo.

$\boxed{35.}$ V ustálenom stave musí byť dopadajúci výkon žiarenia od hviezdy v rovnováhe s vyžiareným výkonom planéty.[16] Materská hviezda má konštantný výkon, označíme si ho P. Intenzita žiarenia[17] klesá ako $\frac{1}{d^2}$, kde d je vzdialenosť od hviezdy. To preto, lebo cez ľubovoľne veľkú guľovú plochu polomeru d[18] musí prechádzať rovnaký výkon, keďže sa nemá kam stratiť.

Žiarenie hviezdy dopadá iba na prierez planéty plochy πR_c^2, [19] ale planéta vyžaruje z celej svojej plochy $4\pi R_c^2$. Porovnaním dopadajúceho a vyžiareného výkonu dostaneme

$$\frac{P}{4\pi D_c^2}\pi R_c^2 = 4\pi R_c^2 \sigma T_c^4 \implies T_c^4 = \frac{P}{16\pi D_c^2} \implies T_c^4 D_c^2 = \text{konšt.}$$

Vidíme, že teplota planéty závisí iba na jej vzdialenosti a nie od jej veľkosti. Keďže novoobjavená planéta obieha okolo tej istej hviezdy ako planéta *Cimermanos*, tak môžeme využiť tretí Keplerov zákon.

$$\frac{\tau^2}{D^3} = \text{konšt.} \implies \frac{\tau_c^2}{D_c^3} = \frac{\tau_n^2}{D_n^3} \implies D_n = D_c\left(\frac{\tau_n}{\tau_c}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Využitím nami objaveného vzťahu $T^4D^2 = $ konšt. a tretieho Keplerovho zákona získame teplotu novoobjavenej hviezdy T_n.

$$T_n = T_c\sqrt{\frac{D_c}{D_n}} = T_c\sqrt{\left(\frac{\tau_c}{\tau_n}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$T_n = T_c\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{T_c}{2}$$

[16] Celkový výkon žiarenia je opísaný Stefan-Boltzmanovým zákonom.
[17] výkon na jednotkovú plochu
[18] V skutočnosti cez ľubovoľnú uzavretú plochu obsahujúcu hviezdu!
[19] Predpokladáme, že lúče sú rovnobežné.

$\boxed{36.}$ V prvom rade si treba ujasniť, prečo by sme v lietadle mali pozorovať inú hmotnosť na váhe, než reálnu. Dôvody sú dva: Po prvé, sme vyššie od Zeme, takže nám kleslo g-čko. Po druhé, rýchlosťou $u = 600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sa hýbeme vzhľadom na Zem, ktorá sa točí proti nám nejakou svojou obvodovou rýchlosťou. Teda vzhľadom na stred Zeme [20] sa hýbeme rýchlejšie, čo znamená väčšiu odstredivú silu. V tejto vzťažnej sústave bude rýchlosť lietadla

$$v = u + \omega_{Zem} R_Z \doteq 1063{,}82\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

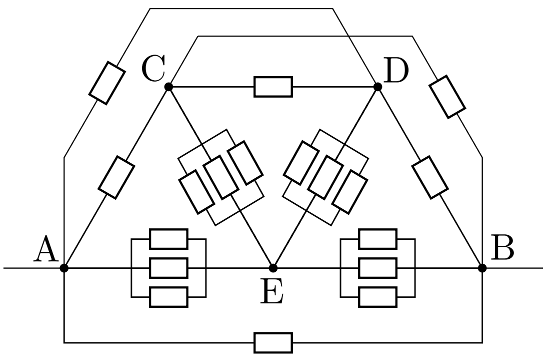
Na Kvíka v lietadle pôsobí okrem gravitačnej aj spomínaná odstredivá sila. A preto by mal Kvík spozorovať na váhe hmotnosť o kúsok menšiu ($m^* = 90\,\mathrm{kg}$) než je tá reálna . To, čo bude ukazovať váha v lietadle je konkrétne

$$m^* = \frac{F_G - F_o}{g} = \frac{G\dfrac{M_z m}{(R_z + h)^2} - \dfrac{mv^2}{R_z + h}}{g}$$

Odkiaľ už len vyjadríme Kvíkovu skutočnú hmotnosť:

$$m = \frac{m^* g(R_z + h)}{G\dfrac{M_z}{(R_z + h)} - v^2} \doteq 91{,}91\,\mathrm{kg}$$

$\boxed{37.}$ Prvá vec, ktorú si musíme uvedomiť je to, že ak máme ľubovoľné body spojené dokonalým vodičom, tak tieto body majú rovnaký potenciál, netečie medzi nimi prúd a správajú sa ako jeden a ten istý bod. To nám umožňuje prekresliť si schému, a pozrieť sa, ako sa zjednoduší.



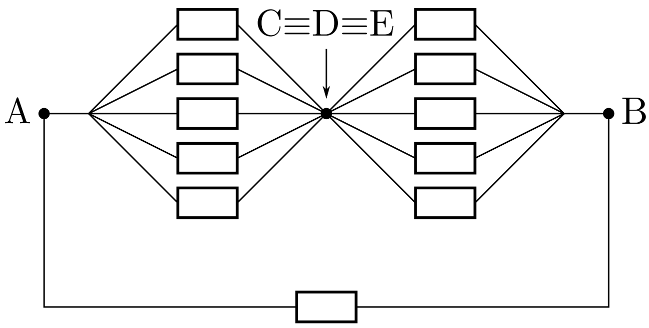
Obr. 34: Prvé zjednodušenie štvorstenu

Teraz môžeme pekne vidieť, že body C, D, a E sa nachádzajú na osi symetrie odporovej schémy. To znamená, že majú rovnaký potenciál a môžeme ich opäť spojiť. [21] Obohatení touto

[20] Samozrejme môžeme zvoliť iné vzťažné sústavy, z ktorých by sme sa na problém pozerali. Avšak tam by sme museli zarátať pôsobenie neinerciálnej Coriolisovej sily, čo by značne skomplikovalo výpočet.

[21] Viac o tom, ako a prečo môžeme spájať a rozpájať uzly s rovnakým potenciálom nájdete v 4. kapitole tohto dokumentu `http://fks.sk/~juro/docs/odpory.pdf`

vedomosťou by sme už nemali mať problém prekresliť odporovú schému iba na kombináciu sériových a paralelných zapojení rezistorov.



Obr. 35: Druhé zjednodušenie štvorstenu

Bez väčšieho počítania už ľahko dostaneme odpor piatich paralelne zapojených rezistorov ($R/5$) a následne celého odporného štvorstenu

$$R_0 = \frac{\frac{2R^2}{5}}{\frac{2R}{5} + R} = \frac{2}{7}R$$

$\boxed{38.}$ Bzdušo vyrazil v nadmorskej výške h_1, kde bol atmosférický tlak $p_1 = p_0 e^{-(c/p_A)h_1}$. V obale croissantu bol vzduch s objemom $V_1 - V_0$. Treba si uvedomiť, že obal môže ľubovoľne meniť svoj objem až do maximálneho možného objemu V_2 a vzduch vo vnútri obalu má vždy teplotu okolitého vzduchu. To znamená, že v prvej fáze výstupu vo vnútri obalu dochádza k izotermickému deju až do momentu, kým sa obal plne nafúkne na objem V_2. Stane sa tak vo výške h_2 a popisuje to rovnica

$$p_0 e^{-(c/p_0)h_1} (V_1 - V_0) = p_0 e^{-(c/p_0)h_2} (V_2 - V_0) .$$

Odtiaľ postupnými úpravami dostaneme

$$h_2 = \frac{p_0}{c} \left(\ln \frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0} \right) + h_1 .$$

Od tohto momentu sa objem obalu ďalej meniť nemôže. Navyše pri konštantnej teplote sa ani tlak vzduchu vo vnútri obalu nemôže meniť. To znamená, že pri ďalšom výstupe vzniká medzi tlakom v obale a tlakom okolitého vzduchu rozdiel. Nech svo výške h_3 dosiahne pretlak kritickú hodnotu Δp_k. V tomto momente obal praskne. Vo vnútri obalu je v momente prasknutia stále tlak zodpovedajúci výške h_2, teda možno pre tlak písať rovnosť

$$p_0 e^{-(c/p_0)h_3} + \Delta p_k = p_0 e^{-(c/p_0)h_2} .$$

Odtiaľ dostávame

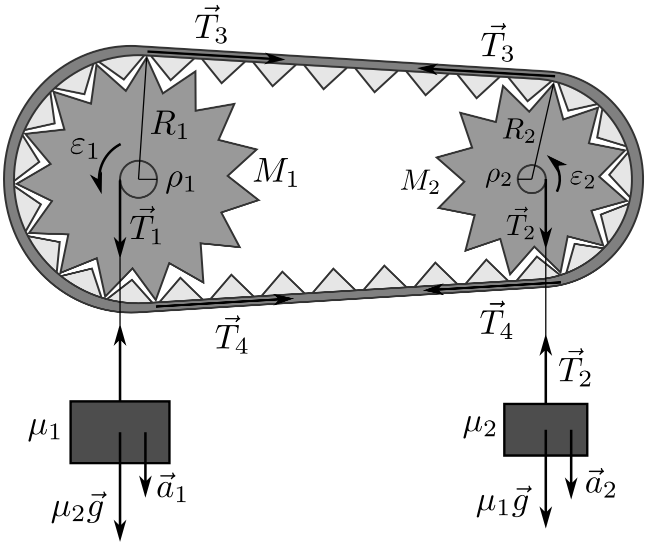
$$h_3 = -\frac{p_0}{c} \ln \left(e^{-(c/p_0)h_2} - \frac{\Delta p_k}{p_0} \right) .$$

Po dosadení za výšku h_2 a jednoduchej úprave získame

$$h_3 = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} e^{-(c/p_0)h_1} - \frac{\Delta p_k}{p_0}\right) .$$

Teraz už môžeme do posledne odvodeného výrazu dosadiť hodnoty zo zadania a dostaneme, že croissant Bzdušovi praskne vo výške 4267 metrov nad morom.

$\boxed{39.}$ Naším cieľom je vypočítať zrýchlenie a_1 závažia μ_1. Celá mechanická sústava je vzájomne prepojená lanami a reťazami, takže všetky jej súčasti sa navzájom ovplyvňujú. To ale znamená, že si musíme rozanalyzovať pôsobenie medzi všetkými prvkami sústavy.



Obr. 36

Predpokladajme, že závažie μ_1 sa bude pohybovať nadol so zrýchlením a_1. Z toho vyplýva, že ľavé koleso bude roztáčané v kladnom smere s uhlovým zrýchlením $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{\rho_1}$. Následne reťaz zabezpečí previazanie pohybu kolies. Reťaz je napnutá a nemôže prešmykovať cez ozubené kolesá. To implikuje, že obvodová rýchlosť oboch kolies je rovnaká. Aby to platilo v ľubovoľnom čase, tak aj obvodové zrýchlenie kolies musí byť rovnaké, teda $\varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$. Na základe tejto rovnice máme jednoznačne určené uhlové zrýchlenie $\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1$ druhého kolesa tiež v kladnom smere. No a na záver toto uhlové zrýchlenie jednoznačne determinuje zrýchlenie závažia μ_2, ktoré je rovné $a_2 = \varepsilon_2 \rho_2$.

Rozanalyzujme si aj silové pôsobenie medzi jednotlivými súčiastkami. Na závažie μ_1 pôsobí nadol tiažová sila veľkosti $\mu_1 g$ a ťahová sila lanka T_1 nahor. Podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobí aj závažie na lanko rovnako veľkou silou opačného smeru. Lanko sa nijako nedeformuje a navyše je nehmotné. To znamená, že výslednica síl pôsobiaca na lanko musí byť nulová[22],

[22] Ak by na ľubovoľný element nehmotného lanka pôsobila nenulová výslednica síl, musel by mať podľa druhého Newtonovho zákona nekonečne veľké zrýchlenie.

teda na druhý koniec lanka musí pôsobiť tyč silou T_1. No a opäť, podľa tretieho Newtonovho zákona, lanko pôsobí na tyč, a teda na ozubené koleso, silou veľkosti T_1 nadol. Pre pohyb závažia môžeme písať pohybovú rovnicu

$$\mu_1 a_1 = \mu_1 g - T_1$$

. Úplne analogickou úvahou dostaneme pohybovú rovnicu pre závažie μ_2 v tvare

$$\mu_2 a_2 = T_2 - \mu_2 g$$

.

Ešte zostáva popísať sily determinujúce pohyb kolies. Už vieme, že na jednotlivé kolesá pôsobia reakčné sily na ťahové sily od lán T_1, resp. T_2, ktoré pôsobia na kolesá krútiacimi momentmi $T_1\rho_1$, resp. $T_2\rho_2$. Navyše reťaz je napnutá a ovplyvňuje vzájomnú obvodovú rýchlosť kolies, teda musí aj silovo pôsobiť na kolesá. Ďalej si treba uvedomiť, že sila od spodnej časti reťaze môže byť vo všeobecnosti rôzna než sila od vrchnej časti reťaze.[23] Čo však musí platiť je, že sila pôsobiaca na konce voľnej časti reťaze (medzi dvomi bodmi upnutia na kolesá) je rovnaká[24]. Označme si ťahové sily v reťazi T_3, T_4. Podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobí reťaz na kolesá rovnako veľkými silami. Teraz už môžeme napísať pohybové rovnice pre pohyb kolies. Uveďme ešte, že moment zotrvačnosti kolesa je $J = \frac{1}{2}MR^2$. Pohybové rovnice pre kolesá sú teda

$$\frac{1}{2}M_1R_1^2\varepsilon_1 = T_1\rho_1 + T_4R_1 - T_3R_1$$
$$\frac{1}{2}M_2R_2^2\varepsilon_2 = T_3R_1 - T_2\rho_2 - T_4R_1$$

Teraz máme 4 pohybové rovnice a 3 prevodosvé vzťahy medzi zrýchleniami samotnými a uhlovými zrýchleniami. Máme síce až 8 neznámych, ale sily T_3 a T_4 nás nezaujímajú. V rovniciach vystupuje iba ich rozdiel, takže sústava má až na túto dvojicu síl jednoznačné riešenie. Nás však zaujíma len zrýchlenie a_1, ktoré už nie je veľmi náročné zo sústavy rovníc vyjadriť. Riešenie sústavy prenecháme ako cvičenie čitateľovi. Výsledné zrýchlenie závažia μ_1 je

$$a_1 = \frac{\mu_1\rho_1R_2 - \mu_2\rho_2R_1}{\mu_1R_2\rho_1^2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2\right)R_1^2R_2 + \mu_1\frac{R_1^2\rho_2^2}{R_2}}\rho_1 g\ .$$

Pri výpočte sme mohli zvoliť aj druhý prístup. V ideálnom prípade nedochádza v sústave k stratám mechanickej energie (napr. trením, deformáciou, zrážkami). To znamená, že celková mechanická energia sa zachováva. Problémom tohto prístupu je, že si vo všeobecnosti vyžaduje znalosť derivovať. Uvedomme si však, že jediná sila, ktorá na sústavu zvonku pôsobí, je tiažová sila. Tiažová sila je konštantná v homogénnom poli, teda môžeme očakávať, že aj zrýchlenie bude konštantné. To naznačuje, že by sme si mohli vystačiť aj so znalosťou rovnomerne zrýchleného pohybu.

[23] Pretože reťaz je pevne upnutá na kolesá, a teda sa v nej ťahová sila neprenáša po celom obvode, ale len medzi bodmi upnutia na kolesá.

[24] Z rovnakého dôvodu, ako v prípade lán.

Zamyslime sa nad tým, ako sa budú jednotlivé časti sústavy hýbať. Jedno zo závaží poklesne (jeho potenciálna energia sa zmenší), druhé vystúpa vyššie (jeho potenciálna energia porastie). Okrem toho všetky súčiastky sa uvedú z pokoja do pohybu, takže ich kinetická energia narastie. Zoberme si nejaký časový okamih τ od momentu uvoľnenia sústavy. Podľa zákona zachovania mechanickej energia dostávame

$$\Delta E_{p1} = \Delta E_{p2} + E_{k1} + E_{k2} + E_{r1} + E_{r2}\ .$$

Za čas τ poklesne závažie μ_1 o $\frac{1}{2}\varepsilon_1\rho_1\tau^2$, takže zmena jeho potenciálnej energie je $\Delta E_{p1} = \mu_1 g\frac{1}{2}\varepsilon_1\rho_1\tau^2$. Analogicky sa zvýši potenciálna energia závažia μ_2 o $\Delta E_{p2} = \mu_2 g\frac{1}{2}\varepsilon_2\rho_2\tau^2$. Rýchlosť závažia μ_1 v čase τ je $v = \varepsilon_1\rho_1\tau$, takže jeho kinetická energia je $E_{k1} = \frac{1}{2}\mu_1\left(\varepsilon_1\rho_1\tau\right)^2$. Podobne kinetická energia závažia μ_2 je $E_{k2} = \frac{1}{2}\mu_2\left(\varepsilon_2\rho_2\tau\right)^2$. Nakoniec ešte rotačné energie kolies v čase τ sú $E_{r1} = \frac{1}{2}J_1\left(\varepsilon_1\tau\right)^2$, resp. $E_{r2} = \frac{1}{2}J_2\left(\varepsilon_2\tau\right)^2$, kde $J = \frac{1}{2}MR^2$ je moment zotrvačnosti kolies. No a na záver ešte potrebujeme prepojiť pohyb kolies rovnicou $\varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$. Na základe týchto vzťahov sme schopní vypočítať uhlové zrýchlenie ε_1, a teda aj zrýchlenie závažia $a_1 = \rho_1\varepsilon_1$. Stačí dosadiť všetky vzťahy do rovnosti pre energie. Čas je vo všetkých výrazoch v druhej mocnine, takže úplne vypadne, a tak postupnými úpravami dostaneme vzťah pre uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_1\rho_1 R_2 - \mu_2\rho_2 R_1}{\mu_1 R_2\rho_1^2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2\right)R_1^2 R_2 + \mu_1\frac{R_1^2\rho_2^2}{R_2}}g\ ,$$

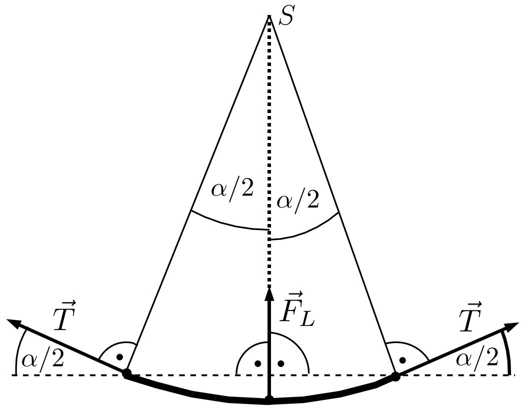
čo nám dáva rovnaký výsledok ako postup cez sily.

$\boxed{40.}$ Lano má zrejme nejaké maximálne pnutie, kedy sa roztrhne. Ak sa lano roztrhlo voľne visiac pri dĺžke L, tak maximálne pnutie, ktoré výdrží má veľkosť:

$$T = mg\,,$$

kde m je hmotnosť lana, ktorú síce nepoznáme, ale neskôr zistíme, že to vôbec nevadí.

Poďme na otáčanie: máme otáčajúcu sa kruhovú slučku s polomerom $R = \frac{L}{2\pi}$ vo vodorovnej rovine. Príklad vykazuje symetriu - to využijeme - môžeme skúmať ľubovoľný kúsok lana s hmotnosťou $m^* = m\frac{\alpha}{2\pi}$. Uhol α vytýka v slučke spomínaný kúsok (viz. obr. nižšie):



Obr. 37

Keď slučkou točíme uhlovou rýchlosťou ω, pôsobí na náš kúsok m^* odstredivá sila o veľkosti:

$$F_o = \frac{m^* v^2}{R} = m^* \omega^2 R = m \frac{\alpha}{2\pi} \omega^2 \frac{L}{2\pi} = \frac{m\omega^2 L}{4\pi^2} \alpha$$

V hraničnej situácii je náš kúsok lana napínaný maximálnym pnutím T (viz. obr. vyššie) z dvoch strán. Výslednica týchto dvoch síl smeruje proti odstredivej a má veľkosť:

$$F_l = 2T \sin(\alpha/2) \approx T\alpha = mg\alpha$$

kde sme použili priblíženie $\sin\alpha \approx \alpha$, pretože náš uhol α môže byť malý!

Porovnajme sily F_l a F_o a nachádzame výsledok, ktorý, ako sme čakali, nezávisí na hmotnosti lana:

$$\frac{m\omega^2 L}{4\pi^2} \alpha = mg\alpha \qquad \longrightarrow \qquad \omega = 2\pi \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$\boxed{41.}$ V prvom rade si potrebujeme ujasniť, kedy je rýchlosť pri zrážke maximálna. Určite by sme mali využiť to, že Zem sa po svojej obežnej dráhe pohybuje pomerne veľkou rýchlosťou. Zrnká prachu by potom mali obiehať okolo Slnka opačným smerom a čo najväčšou rýchlosťou.

Obežná rýchlosť Zeme je jednoznačne určená polomerom jej dráhy a hmotnosťou Slnka. Vieme, že dostredivou silou, ktorá ju drží na orbite, je gravitačná sila:

$$\frac{M_z v_z^2}{R} = G \frac{M_z M_\odot}{R^2}$$

odkiaľ

$$v_z = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

Aká najvyššia môže byť rýchlosť zrniek? Ich dráha je parabolická, takže sa pohybujú po únikovej dráhe s nulovou celkovou energiou. Potom ich rýchlosť vzhľadom na Slnko musí byť rovná únikovej rýchlosti zo vzdialenosti, v ktorej sa práve nachádzajú.

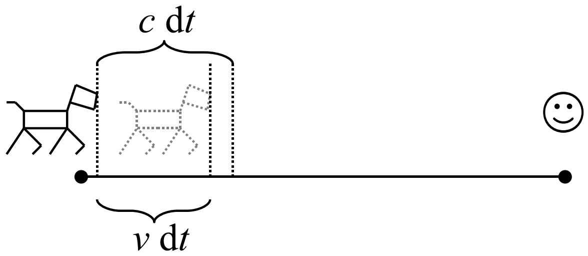
My chceme poznať ich rýchlosť v okamihu zrážky, keď je ich vzdialenosť od Slnka rovná polomeru dráhy Zeme. Vedeli by sme ju spočítať cez potenciály, ale radšej využijeme známy fakt, že kinetická energia telesa na kruhovej dráhe je rovná polovici kinetickej energie telesa na únikovej dráhe v tom istom mieste.[25] A ak je energia dvojnásobná, rýchlosť musí byť väčšia $\sqrt{2}$–krát, označíme $v_E = \sqrt{2}v_z$. Aj veľkosť rýchlosti zrniek je teda jednoznačne daná, nám ostáva obe rýchlosti sčítať, keďže v optimálnom prípade sa pohybujú v opačných smeroch.

Okrem tejto priamej zrážkovej rýchlosti však ešte nesmieme zabudnúť, že pri páde do gravitačnej potenciálovej jamy Zeme sa rýchlosť padajúceho telieska ešte zvýši. O koľko? Nuž, celková kinetická energia sa musí zväčšiť ešte o rozdiel potenciálnych energií zrnka v nekonečne a na povrchu.

Tu už si dáme pozor iba na to, že nesčítame rýchlosti, ale energie, ktoré závisia od štvorcov rýchlostí. Výsledná rýchlosť teda bude odmocninou zo súčtu druhých mocnín oboch medzivýsledkov:

$$\sqrt{(v_z + v_E)^2 + v_e^2} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + \frac{2GM_z}{r}} = 72\,879\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$\boxed{42.}$ Kubo a Maťo si síce neuvedomili mnohé súvislosti, no aj zo zdanlivej rýchlosti vedia zistiť aká je skutočná rýchlosť vesmírneho objektu $v_{\text{skutočná}}$.



Obr. 38: Fotóny vyslané z Veľkého psa [Obrázok zo Zbierky FX]

Predstavme si, že smerom do nášho ďalekohľadu vyrazí fotón z neznámeho vesmírneho objektu, napr. z Veľkého psa. Za čas Δt sa fotón dostane do vzdialenosti $c\Delta t$, zároveň sa však neznámy objekt posunie o vzdialenosť $v\Delta t$. Ak po tomto čase vyrazí smerom do nášho oka ďalší fotón, tak tieto fotóny budú v priestore od seba vzdialené o $(c - v)\Delta t$. Keďže však mi nemáme informáciu o tom, že "fotóny sa nepohybovali stále rýchlosťou svetla"[26], tak interpretujeme túto informáciu tak, že fotóny boli vyslané s časovým rozostupom $\Delta t' = \frac{(c-v)}{c}\Delta t$. T.j. naše zmysly a prístroje predpokladajú, že fotóny "sa pohybovali stále rýchlosťou svetla". To znamená, že sa nám zdá, že dráhu $v\Delta t$ prešli v skutočnosti za kratší čas $\Delta t'$, a tento jav sa prejaví v nami nameranej zdanlivej rýchlosti,

$$v_{\text{zdanlivá}} = \frac{v_{\text{skutočná}}\Delta t}{\Delta t'} = \frac{c v_{\text{skutočná}}}{c - v_{\text{skutočná}}}$$

[25] Kto neverí, nech si overí výpočtom :).

[26] T.j., že jeden z nich sa časť pohybu iba viezol s neznámym vesmírnym objektom a čakal na ňom, aby bol vyslaný.

Pre údaje zo zadanie dostaneme, že skutočná rýchlosť neznámeho objektu je $\frac{3}{4}c$.

Ak sa naopak bude od nás objekt vzďaľovať, tak fotóny vyslané o Δt budú od seba vzdialené o $(c+v)\Delta t$, t.j. nám sa bude zdať, že loď sa pohybuje pomalšie ako v skutočnosti.

$$v_{\text{zdanlivá}} = \frac{c v_{\text{skutočná}}}{c + v_{\text{skutočná}}}$$

V tomto prípade nameriame zdanlivú rýchlosť $v_{\text{zdanlivá}} = \frac{3}{7}c$.

Pozn. autora: Koho tento príklad zaujal, môže si nájsť ťažšiu verziu tohoto príkladu v Zbierke FX na str. 198.

$\boxed{43.}$ Naivným porovnaním dopadajúceho a vyžiareného výkonu od čiernej doštičky by sme sa dopracovali k teplote $T_d = 5334\,\mathrm{K}$.

$$S\sigma T^4 = S/10\sigma T_d^4 \implies T_d = \sqrt[4]{10}T = 5334\,\mathrm{K}$$

. Je to však správne? Nie!

V ustálenom stave, t.j. v stave termodynamickej rovnováhy, musí platiť, že teploty telies, ktoré sú v rovnováhe, sú rovnaké bez ohľadu na to, ako dochádza k prenosu tepla (žiarením, vedením, konvekciou, ...). Ak by totiž v rovnovážnom stave neboli teploty telies rovnaké, tak by sme k nim v rovnovážnom stave vedeli pripojiť vratný tepelný stroj, ktorý by vykonal prácu vďaka tomu, že časť tepla by prešla z teplejšieho telesa na chladnejšie. Teploty by sa vyrovnali. Teraz by sme tepelný stroj odpojili. Keďže stav s rovnakými teplotami nie je rovnovážny, tak by sa teploty znovu ustálili na rôznych hodnotách. Znovu by sme zapojili náš vratný tepelný stroj... Asi tušíte, kde je problém. Podobným postupom by sme totiž vedeli konať prácu, len ochladzovaním celej našej sústavy. Keďže sa nám ešte nepodarilo nájsť žiadne *perpetuum mobile*, veríme, že to naozaj nejde.

Jediným riešením je teda $T = T_d = 3000\,\mathrm{K}$.

$\boxed{44.}$ Planéta obieha okolo hviezdy po kružnicovej trajektórii, teda na ňu musí pôsobiť dostredivá sila $F_d = \frac{mv^2}{r}$, kde m je hmotnosť planéty. Je zrejmé, že planéta je k hviezde gravitačne priťahovaná silou $F_g = G\frac{mM}{r^2}$. Okrem toho na ňu naráža aj prúd častíc z hviezdy, ktoré ju odtláčajú.

Hviezda žiari rovnomerne do celého priestoru, a teda intenzita žiarenia[27] je vo vzdialenosti R práve $\frac{P}{4\pi R^2}$. Prierez planéty je πR^2, teda za čas τ pohltí planéta energiu $E = \frac{P\pi R^2 \tau}{4\pi r^2}$. Energia jedného fotónu je $E_0 = hf = \frac{h}{\lambda}$. Z toho vyjadríme hybnosť jedného fotónu ako $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_0}{c}$. Planéta absorbuje všetky fotóny, teda sa zvýši jej hybnosť o hybnosť dopadajúcich fotónov. Celková hybnosť fotónov, ktoré planéta pohltí za čas τ je teda $\frac{E}{c}$. Takže podľa druhého Newtonovho zákona $F = \frac{\Delta p}{\tau}$, na planétu pôsobí sila $F = \frac{PR^2}{4cr^2}$.

[27]Výkon na jednotku plochy

Teraz už môžeme napísať rovnosť síl v sústave spojenej s planétou

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} - \frac{PR^2}{4cr^2}$$

. Ešte zostáva vyjadriť obežnú rýchlosť planéty cez periódu $v = \frac{2\pi r}{T}$. Drobnými úpravami dostaneme

$$\frac{4\pi^2 m}{T^2} r^3 = GmM - \frac{PR^2}{4c}\,,$$

odkiaľ

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2 m}\left(GmM - \frac{PR^2}{4c}\right)}$$

. Na záver ešte vyjadríme hmotnosť planéty cez polomer a dostávame

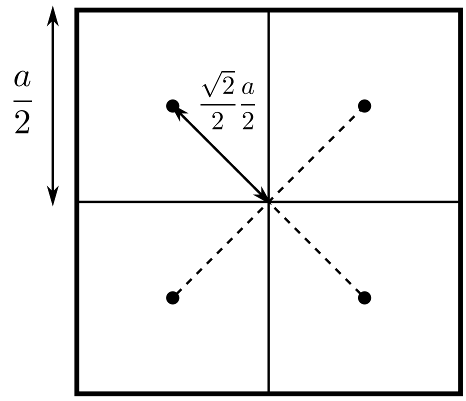
$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}\left(GM - \frac{3P}{16\pi c\varrho R}\right)}$$

.

$\boxed{45.}$ Riešenie úlohy si rozdelíme na dve časti, pri oboch však využijeme rovnaký trik. Je ním *škálovanie*!

Predtým, než sa pustíme do výpočtu zotrvačnosti Mišovho štvorca, si vypočítame moment zotrvačnosti obyčajného štvorca $I(a)$ s hranou a a hmotnosťou M okolo jeho stredu. Tu využijeme škálovanie, hneď si ukážeme čo to je. Celý trik je založený na tom, že moment zotrvačnosti štvorca sa dá vyjadriť ako $I = kMa^2$, kde k je nejaká číselná konštanta. Od iného rozmeru ako a moment zotrvačnosti nemôže závisieť, keďže je to jediný parameter, ktorý charakterizuje štvorec.

Ako zistíme moment zotrvačnosti štvorca? Uvedomíme si, že jeden veľký štvorec s hranou a sú predsa štyri menšie štvorce s hranou $a/2$ a využijeme Steinerovu vetu! My, ale taktiež vieme, že moment zotrvačnosti $I(a/2)$ štvorca s hranou $a/2$ je 16-krát menší ako moment zotrvačnosti I_a štvorca s hranou a. To preto, lebo ak zmenším hranu na polovicu, plocha sa zmenší na štvrtinu a rovnako aj hmotnosť. Navyše sa aj vzdialenosť každých dvoch bodov zmenší na polovicu, teda aj všetkých bodov od jeho stredu. V momente zotrvačnosti však vystupuje štvorec vzdialenosti elementov, takže nám to prinesie ďalšie štvornásobné zmenšenie. Po započítaní oboch efektov teda vieme, že moment zotrvačnosti menšieho štvorca je 16-krát menší.



Obr. 39: Škálovanie a Steinerova veta pri výpočte momentu zotrvačnosti štvorca

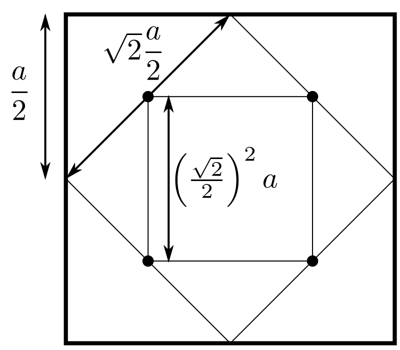
$$I(a) = 4I(a/2) + 4\,(M/4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I(a) = 4\frac{I(a)}{16} + 4\,(M/4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I(a) = \frac{I(a)}{4} + \frac{1}{8}Ma^2$$

$$I(a) = \frac{1}{6}Ma^2$$

Teraz sa pustíme do výpočtu momentu zotrvačnosti samotného Mišovho štvorca, čo je fraktál. Fraktály majú takú peknú vlastnosť, že pri ľubovoľnom zväčšení vyzerajú úplne rovnako. To využijeme znovu v rovnakom triku. Celý moment zotrvačnosti Mišovho štvorca $I_{\text{MŠ}}$ spočítame ako moment zotrvačnosti štvorca s hranou a, potom odpočítame moment zotrvačnosti štvorca s o niečo menšou stranou (výrez) a následne pripočítame moment zotrvačnosti Mišovho štvorca znovu s o niečo menšou stranou. Zostáva nám teda už iba zistiť dĺžky strán jednotlivých štvorcov.



Obr. 40: Škálovanie v Mišovom fraktálnom štvorci

$$I_{\text{MŠ}}(a) = I_{\text{štvorec}}(a) - I_{\text{štvorec}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + I_{\text{MŠ}}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right)$$

$$I_{\text{MŠ}}(a) = I_{\text{štvorec}}(a) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 I_{\text{štvorec}}(a) + \frac{1}{16}I_{\text{MŠ}}(a)$$

$$I_{\text{MŠ}}(a) = \frac{4}{5}I_{\text{štvorec}}(a) = \frac{2}{15}Ma^2$$

$\boxed{46.}$ Začneme tým, že si povieme ako vzniklo Máriovo pokazené koleso. Pôvodné koleso malo hmotnosť M_0 a bola do neho urobená diera, čím koleso prišlo o hmotnosť m. Plošnú hustotu uvažujeme samozrejme rovnakú pre každú časť kolesa, takže hľadané hmotnosti dostaneme jednoduchým porovnaním obsahov útvarov. $M_0 = M\frac{R^2}{R^2 - r^2} = \frac{9}{8}M$ a $m = M\frac{r^2}{R^2 - r^2} = \frac{1}{8}M$.

S týmito informáciami už dokážeme vypočítať polohu ťažiska rozbitého kolesa. Samozrejme sa bude nachádzať na osi symetrie, avšak to čo nás zaujíma je vzdialenosť od stredu. Dostávame teda

$$y = \frac{\frac{9}{8}M \cdot 0 + \frac{-1}{8}M \cdot \frac{2}{3}R}{\frac{9}{8}M - \frac{1}{8}M} = -\frac{R}{12}\,.$$

Toho znamienka sa netreba báť. Hovorí iba o tom, že ťažisko je na opačnej strane ako diera, takže si označíme $t = -y = \frac{R}{12}$ ako vzdialenosť ťažiska a stredu kolesa.

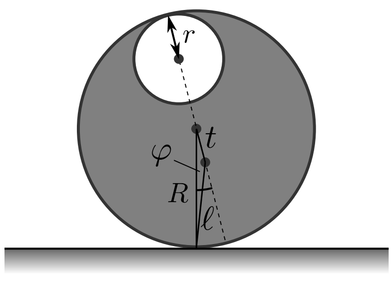
Teraz sa už bez väčších problémov vrhneme na pohyb kolesa. Pri vychýlení o uhol φ stúpne potenciálna energia kolesa o

$$E_p = Mgt(1 - \cos\varphi)\,.$$

Kinetickú energiu vyjadríme ako kinetickú energiu otáčania okolo okamžitej osi otáčania, avšak tá sa bude neustále meniť. Preto

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2,$$

kde I_A je moment zotrvačnosti okolo aktuálnej osi otáčania. Ťažisko bude od tejto osi vzdialené l, pričom platí kosínusová veta $l^2 = R^2 + t^2 - 2Rt\cos\varphi$.



Obr. 41: Geometria kmitajúceho Máriovho kolesa

Jediná neznáma, ktorá nám zostala, je moment zotrvačnosti Máriovho kolesa okolo bodu otáčania. My si však najprv vypočítame moment zotrvačnosti okolo ťažiska. Za použitia Steinerovej vety a faktu, že keď sčítame momenty zotrvačnosti rozbitého kolesa a toho čo mu chýba okolo stredu, dostaneme moment zotrvačnosti plného, nepokazeného kolesa. [28] Platí teda

$$\frac{1}{2}\frac{9}{8}MR^2 = \left(I_T + Mt^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{8}Mr^2 + \frac{1}{8}M\left(\frac{2}{3}R\right)^2\right) .$$

Túto čarovnú rovnicu upravíme a dostaneme $I_T = \frac{71}{144}MR^2$. Opäť použijeme Steinerovu vetu a dostávame pre moment zotrvačnosti okolo bodu otáčania

$$I_A = I_T + Ml^2 = \frac{71}{144}MR^2 + M\left(R^2 + t^2 - 2Rt\cos\varphi\right) .$$

Nás však zaujímajú malé kmity, čiže najprv môžeme spraviť zanedbanie $\cos\varphi \approx 1$ [29], čím sa nám zjednoduší moment zotrvačnosti na $I_A = \frac{4}{3}MR^2$.

Ešte si vyjadríme celkovú energiu kolesa, pričom člen $(1 - \cos\varphi)$ v potenciálnej energii položíme rovný prvému nenulovému členu z rozvoja. Teda

$$(1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}) .$$

Pre celkovú energiu teda dostávame

$$E = \frac{1}{2}Mg\frac{R}{12}\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}MR^2\omega^2 = kont. ,$$

čo nie je nič iné, ako energia harmonického oscilátora s periódou, ktorá je určená konštantami pri φ^2 a ω^2. Takže Máriovo rozbité koleso bude kmitať s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}MR^2}{Mg\frac{R}{12}}} = 8\pi\sqrt{R}g .$$

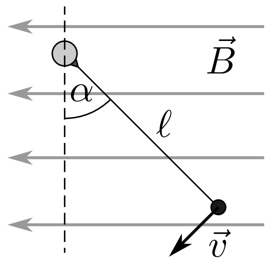
$\boxed{47.}$ Vodič po vychýlení začne kmitať, ako hojdačka. Podľa Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie sa medzi koncami vodiča naindukuje napätie, ktoré je závislé na dĺžke vodiča l, rýchlosti pohybu vodiča $\mathbf{v}$ a indukcii magnetického poľa $\mathbf{B}$. Jeho veľkosť je:

$$U = lvB\sin\alpha ,$$

[28] Moment zotrvačnosti plného disku okolo stredu je vo všeobecnosti $\frac{1}{2}mr^2$.

[29] Dostaneme to z Taylorovho rozvoja

kde uhol α je odklon rámčeka od zvislej polohy.[30] Kedy získame najväčšiu hodnotu tohto napätia? Jedno vieme určite, nie je to ani na začiatku pohybu (lebo nulová rýchlosť), ani v najnižšej polohe (nulový sínus). Je to teda niekde medzi.



Obr. 42

Rýchlosť v a uhol α sú medzi sebou previazané zákonom zachovania energie:

$$mgl\cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{2lg\cos\alpha}$$

Keď uvedené zistenie dosadíme do vzťahu pre napätie, dostávame: $U = Bl\sqrt{2lg}\sqrt{\cos\alpha}\sin\alpha$. Chceme zistiť, pri akom uhle α nadobúda napätie U maximum. Tož, derivujme:

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha} = Bl\sqrt{2lg}\left(\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}\right) \overset{!}{=} 0$$
$$2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,$$

čomu zodpovedá uhol $\alpha = 54.74°$. Maximálne napätie U_{max} teda získame dosadením tohto uhla:

$$U_{max} = Bl\sqrt{2lg}\sqrt{\cos\alpha}\sin\alpha = Bl\sqrt{2lg}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\frac{16}{27}}\sqrt{gB^2l^3}$$

[30] Formálnejšie je to uhol medzi vektorom rýchlosti **v** a vektorom magnetickej indukcie **B**.