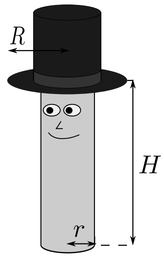
Zadání

1. Jimmi má nepromakavý klobouk s poloměrem R. Samotný Jimmi je štíhlý, podobá se svislému válci s poloměrem $r < R$ a výškou H. Jak rychle může Jimmi chodit v dešti, aby nezmoknul? Prší svisle, rychlostí u.

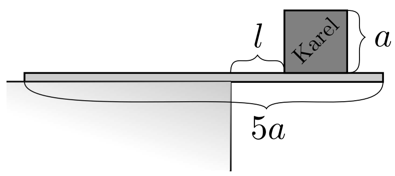


Obr. 1

2. Tlak vody ve vodorovném potrubí na přízemí budovy je 20 atmosfér. Jaká nejvyšší může být budova, aby i na jejím vrchu tekla voda z vodovodu?

3. Kolikrát musíme přehnout papír, abychom jeho tloušťkou zaplnili vzdálenost Země-Slunce? Tloušťka papíru je 100 µm.

4. Karel je taková kostka, až je to nepříjemné. Proto si z něho ostatní FYKOSáci udělali srandu a ve spánku ho přenesli na desku, která ležela na okreji útesu. Do jaké největší vzdálenosti l od okraje útesu ho mohli umístit, aby nespadnul? Karel má hmotnost m a hranu délky a, deska má hmotnost $\frac{m}{2}$ a délku $5a$.



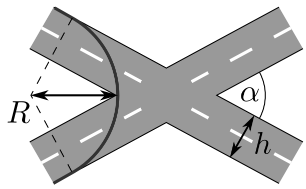
Obr. 2: Kubický Karel na okraji útesu

5. Kiki se chce sprchovat vodou o teplotě $T_{hot} = 30\,°\mathrm{C}$ s průtokem $Q = 0{,}1\,\mathrm{l\,s^{-1}}$, ale k dispozici má jen vodu s teplotou $T_{cold} = 25\,°\mathrm{C}$. Řešením pro ni může být průtokový ohřívač. Jaký příkon (odběr elektrické energie) musí ohřívač mít, aby splnil Kikiiny nároky? Hustota vody je $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, tepelná kapacita $c = 4180\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ a účinnost ohřívače je blízká 100 %.

6. Ponorka používá na měření hloubky vodorovného dna ultrazvuk. Vysílá signál do všech směrů. Následně zaznamenává, kdy se k ní vrátí signál odražený ode dna. Uvažujte ponorku pohybující se vodorovně rychlostí v. Jak vysoko nade dnem se ponorka nachází, jestliže se signál vrátil po čase T? Rychlost zvuku ve vodě je c.

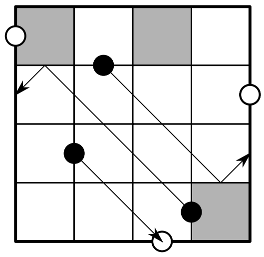
7. Ivo si v horký letní den zalil ledový čaj hustoty ϱ_c a vhodil do něj kostku ledu s hranou délky a a hustotou ϱ_l. Před tím, než si ho naplno vychutnal, položil ho na váhu a změřil jeho hmotnost. Nelíbilo se mu však, že kostka ledu plavala na hladině, a tak na ni zatlačil tak, aby byla celá pod hladinou. K jeho velkému překvapení váha začala ukazovat jiné číslo. O kolik se změnila hmotnost zobrazená na váze?

8. Dvě cesty šířky h se protínají pod ostrým úhlem α. Traktorista Pepa chce na křižovatce odbočit, nesmí však přitom sjet z cesty. Jaký největší poloměr může mít jeho dráha? Rozměry Pepova traktoru zanedbejte.



Obr. 3

9. „Chce se jim řešit? Asi ne… tak ať si radši hrají!" Tři laserové paprsky vycházejí z černých zdrojů ve vyznačeném směru. Na šedých zrcadlových kostkách se odrážejí, jinak se šíří přímo. Jak musíme přemístit zrcadlové kostky, aby paprsky trefily všechny zakroužkované terče? Zrcadla můžeme umisťovat jen do čtverců sítě 4×4. Paprsky se na vnějších okrajích sítě neodrážejí, ale pohlcují.



Obr. 4: Lasery a zrcadla

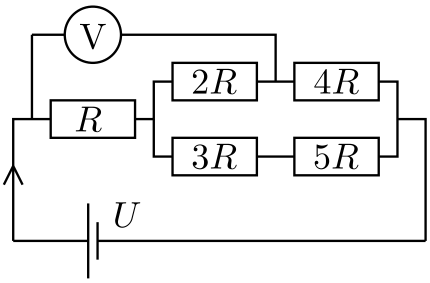
10. Karel si pořídil nový obrovský teplovzdušný balón. Aby nikdo netvrdil, že má malé ambice, hned prvním letem plánuje obletět nad rovníkem celou Zemi. Potřebuje však vědět, na kolik dní si musí vzít zásoby. Výsledek zaokrouhlete nahoru na celé dny.
Hmotnost Karlova balónu je 3000 kg, průměr kulového pláště je 30 m, koeficient aerodynamického odporu balónu je 0,16, teplota vzduchu uvnitř balónu je 350 K. Atmosféra se chová adiabaticky, běžné podmínky na mořské hladině jsou 100 kPa a 15 °C. Deformaci pláště zanedbejte. Vítr nad rovníkem fouká ze západu na východ konstantní rychlostí. $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

11. Olda není hokejista, ale hraje si na ledě se dvěma kvádry. Větší kvádr s hmotností $M = 4\,\mathrm{kg}$ položil na led a na něj umístil menší s hmotností $m = 1\,\mathrm{kg}$. Spodní kvádr vodorovně

táhl silou $F = 2\,\mathrm{N}$. Jaké zrychlení získal vrchní kvádr? Mezi ledem a kvádrem je zanedbatelné tření, ale mezi dvěma kvádry je koeficient tření $f = 0{,}32$.

12. „Verčo, vstávej! Je škola!“ „Mami, nech mě. Víš, jak náročné je tam dojít?“ „Ne, a ty?“ Pomozte jí. Zjistěte, jaké množství energie E je vynaloženo při uražení vzdálenosti s, pokud je délka kroku l. Předpokládejte, že energie se spotřebovává jen při opakovaném zvedání těžiště při každém kroku. Dále předpokládejte, že hmotnost těla je m a délka noh h.

13. Jirka dostal od Julie k narozeninám voltmetr. A protože mezi nimi není žádné napětí, rozhodl se, že ho radši vyzkouší na elektrickém obvodu, který si postavil. Jaké napětí mu ukáže voltmetr, pokud ho zapojí tak, jak je znázorněno na obrázku?

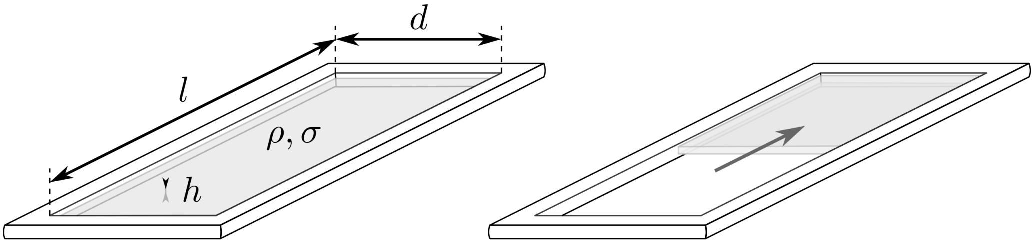


Obr. 5: Jurov elektrický obvod

14. Žába o hmotnosti 100 g skočila na okraj sklenice, ale bojí se, že spadne. Sklenice má tvar komolého kuželu s horním poloměrem 5 cm, dolním poloměrem 3 cm a hmotností 50 g. Jaký objem vody o hustotě $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ musíme nalít do sklenice, aby se pod žábou nepřevrátila?

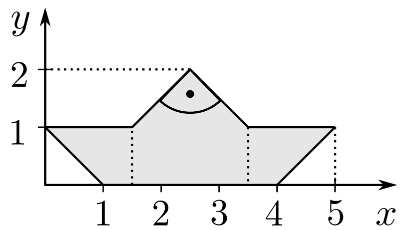
15. Máme dokonale izolovaný generátor na pevné palivo, který funguje následovně. Do generátoru vložíme palivo s hmotností m_0 a výhřevností H. Účinnost generátoru je η. Přebytečná energie se přemění na teplo. Na odvedení tepla se používá vodní chlazení. Máme tepelně izolovanou nádrž s vodou o hmotnosti M. Vždy po dohoření paliva přivedeme z nádrže ke generátoru vodu s hmotností $m < M$, čímž ho ochladíme. Ohřátou vodu přivedeme zpět do nádrže, kde se smísí se zbylou vodou. Tento cyklus opakujeme. Jaká je teplota vody v nádrži po N cyklech, když na začátku měla teplotu t_0 a měrná tepelná kapacita vody je c?

16. Lukáš si hrál s mýdlovou blánou tloušťky $h = 1\,\mathrm{\mu m}$ v obdélníkovém rámečku s rozměry $l = 10\,\mathrm{cm}$ a $d = 5\,\mathrm{cm}$, jak je ukázáno na obrázku níže. Najednou však mýdlová blána praskla podél kratší strany a smrštila se k delší straně. Lukáše by nyní zajímalo, kolik času uběhlo od prasknutí po úplné zmizení bubliny.
Mýdlový roztok, ze kterého je mýdlová blána vyrobena, má hustotu $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a povrchové napětí $\sigma = 0{,}03\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Výsledek uveďte v milisekundách.



Obr. 6: Prasknutí mýdlové blány

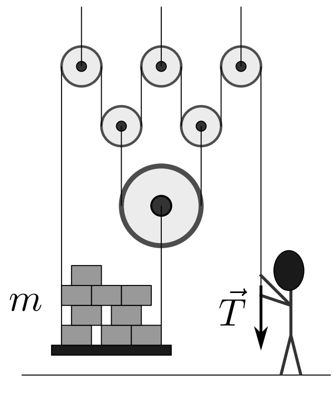
$\boxed{17.}$ Pirát Mirek si konečně našetřil na novou loď. Zašel do papírnictví a koupil si jeden list papíru. Vystřihl si z něho loďku jako na obrázku a bylo. Teď mu však vrtá v hlavě otázka: jaké jsou souřadnice jejího těžiště?



Obr. 7: Předražená loďka

$\boxed{18.}$ Pistolník Petr sedí na dně velké jeskyně. Nudí se, a tak vystřelí z pistole směrem nahoru rychlostí $200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Za pět sekund uslyší, že kulka narazila do stropu. Jak vysoká je jeskyně, když se zvuk v jeskyni šíří rychlostí $330\,\mathrm{m\,s^{-1}}$?

$\boxed{19.}$ „To mám ty cihly nosit sám? Ani mě nehne! Radši si postaví kladkostroj z ultralehkých lan a kladek.“ Jakou silou musíme tahat za konec lana, když potřebujeme zvednout cihly s hmotností m? Všechny lana a kladky můžete uvažovat jako nehmotné.



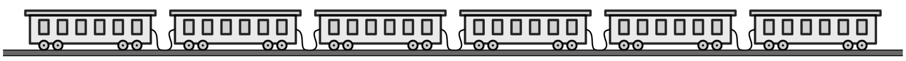
Obr. 8: Velkolepý kladkostroj

20. Homeopati využívají při výrobě léčiv tzv. centisimální ředění. To funguje následovně: vezmou 1 kapku účinné látky (též vodný roztok) a přidají k ní 99 kapek čisté vody. Produkt označí stupněm ředění 1 C. Chtějí-li vyrobit ředění se stupněm 2 C, vezmou 1 kapku z roztoku 1 C a přidají k ní 99 kapek čisté vody. Stejným způsobem vytvářejí ředění vyšších stupňů. Kolikrát musí postup zopakovat, tedy jak velký stupeň ředění musí použít, aby se ve výsledném vodném roztoku (léčivu), který se vejde na jednu čajovou lžičku (5 ml) už nenacházela (průměrně) žádná molekula účinné látky?

21. Toaletní papír délky L a hmotnosti m je namotaný na vodorovné ruličce zanedbatelné hmotnosti s poloměrem r. Rulička se podle očekávání nachází na držáku toaletního papíru. Na konec papíru se zavěsí kočka hmotnosti M a celý ho vlastní vahou odroluje. Jakou úhlovou rychlostí se bude rulička točit ve chvíli, kdy se odmotá všechen papír a kočka na něm bude stále zavěšená? Uvažujte $L \gg r$ a nulové tření mezi ruličkou a držákem.

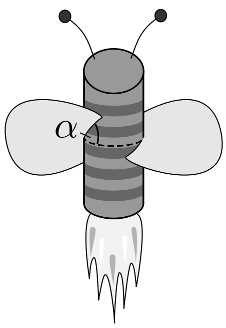
22. Lydka pouští vodu z kohoutku, který má poloměr $R = 2\,\mathrm{cm}$. Průtok trubice je $Q = 0{,}2\,\mathrm{dm^3\,s^{-1}}$. Je obecně známo, že čím níže se proud vody dostane, tím je užší. Jaký poloměr má vodní proud v místě dopadu na umyvadlo, které je $H = 33\,\mathrm{cm}$ pod kohoutkem? Povrchové jevy neuvažujte.

23. Domča si jako malá ráda hrála s vláčky. Na rovné kolejnici postavila vedle sebe N stejně těžkých vozíků, pospojovaných ideálně nepružnými lanky délky l. Postavila je tak těsně vedle sebe, že žádné lanko nebylo napnuté. Potom prvnímu vozíku v řadě udělila rychlost v_1. Za jakou dobu se začal pohybovat celý vláček?



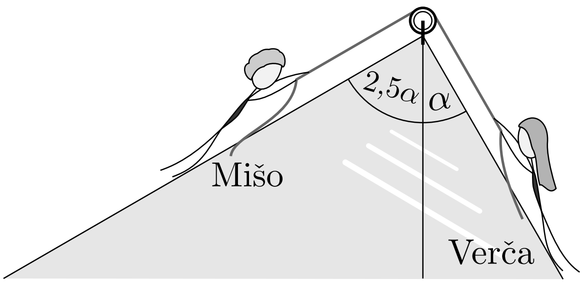
Obr. 9

24. Zuzka si na Silvestra koupila malý ohňostroj – včelku. Včelka sestává z raketového motorku a dvou křidélek délky r, zahnutých proti sobě pod úhlem α vůči vodorovné rovině. Když se motor zapálí, včelka se prudce roztočí s úhlovým zrychlením ε a zavrtá se do vzduchu jako vrtule rychlostí úměrnou úhlové rychlosti. Když motorek po čase t dohoří, ohňostroj ve včelce vybuchne. Jakou dráhu opíše konec křidélka?



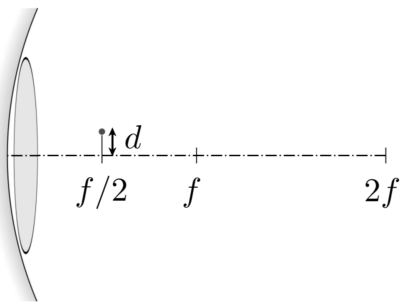
Obr. 10

25. Po ledovém kopci lezou na protilehlých svazích 70-kilový Mišo a Verča vážící 56 kilogramů. Jelikož je kopec dost kluzký, jsou navzájem jištěni lanem, které je na vrcholu kopce provlečené skrze dokonalou kladku. Jaký musí byť sklon svahu α (měřeno od svislice) na Verčině straně, jestliže kopec na Mišově straně má úhel od svislice $2{,}5\alpha$, aby Verča a Mišo byli na kopci v klidu? Tření zanedbejte. Odevzdávejte výsledek v stupních s přesností na jedno desetinné místo. Při hledání správného výsledku se nebojte použít kalkulačku nebo papír a pero :) *Úloha nemá analytické řešení.*



Obr. 11

26. Optická soustava sestává ze spojky s ohniskovou vzdáleností f a dutého zrcadla s ohniskovou vzdáleností $2f$. Spojka i zrcadlo jsou zanedbatelně tenké, umístěné zanedbatelně blízko sebe na optické ose (viz obrázek). Ve vzdálenosti $f/2$ od nich se nachází špendlík délky d. Při pohledu do čočky můžeme vidět i jeho obraz. Jak je velký? Je přímý nebo převrácený?



Obr. 12

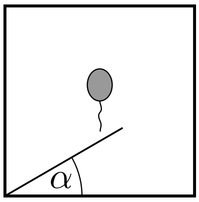
27. Karel si hrál s velmi těžkou a elektricky vodivou homogenní kulovou skořepinou poloměru R a hmotnosti M. Jak velkým nábojem Q musí Kvík rovnoměrně skořepinu nabít, aby neměla tendenci se smršťovat ani zvětšovat?

28. Letadlo stojí na začátku přistávací dráhy. Když pilot zapne motory, začne zrychlovat s konstantním zrychlením $a = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Aby letadlo vzlétlo, musí dosáhnout vůči vzduchu rychlosti $v = 80\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Když vzlétá proti větru, potřebujeme na to dráhu délky $L = 1200\,\mathrm{m}$. Jak dlouhou dráhu by potřebovalo během vzletu v opačném směre, pokud se vítr nezmění?

29. Jaro si vyrobil prak. Použil pružnou gumičku s nulovou klidovou délkou, tuhostí k a klacek tvaru Y s rozpětím d. Jaká je *tuhost* takovéhoto praku, pokud taháme za střed gumičky ve směru kolmém na rovinu praku? Tuhost je poměr síly, kterou taháme, a dosažené výchylky.

30. Ocelové lano, které odmotáváme z kotouče, má takovou pevnost, že se volně visící roztrhne až při délce L. Kolik nejvíce lana si můžeme odmotat, aby se neroztrhlo, pokud ho chytíme za konec a roztočíme ho vodorovně velkou úhlovou rychlostí ω? Gravitační sílu můžete zanedbat.

31. Lukáš stojí v rohu místnosti ve tvaru čtverce se stranou dlouhou 10 m. Místnost má všechny čtyři vnitřní stěny pokryté zrcadly a v jejím středu je upevněn malý balón. Lukáš by na něj hrozně rád zasvítil laserem, bojí se však, že balón praskne.
Naštěstí je ve vzduchu spousta prachu a zrcadla jsou dosti špinavá. Při průchodu jedním metrem vzduchu klesne intenzita laserového paprsku o 1 %, při odrazu od zrcadla dokonce o 10 %. Intenzita světla z Lukášova laseru na výstupu je přesně dvakrát větší, než je potřeba k prasknutí balónu. Pod jakým úhlem ke stěně má Lukáš namířit laser, aby balón osvítil co nejsilněji, ale bez toho, aby balón praskl?



Obr. 13

Laser musí směřovat dovnitř místnosti ($0° < \alpha < 90°$).

32. Ekologické vozidlo PetroMichal sestává z vany s vodou (plocha hladiny A), která je položená na kolejnicích bez tření. V zadní části je výpust, z níž stříká vodorovný proud vody s plochou průřezu S a vozidlo tak reaktivně pohání dopředu. Výhodou oproti konkurenci je, že během deště se voda průběžně doplňuje.
Je-li intenzita deště rovna w (měřena například v napršených $\mathrm{mm\,h^{-1}}$), výška hladiny i rychlost vozidla se po čase ustálí. Jaká bude ustálená rychlost PetroMichala? Předpokládejte, že kapky deště padají svisle dolů.

33. Kuba zjistil, že když vodičem s poloměrem r prochází proud I, tak se vodič díky Jouleovu teplu ohřeje na teplotu T. Kuba ho začne využívat jako zdroj tepla a je mu fajn. Jednoho dne mu Tom daruje stejně dlouhý vodič ze stejného materiálu, ale s dvojnásobným poloměrem. Kolikanásobně musí Kuba změnit procházející proud, aby se vodič ohřál na stejnou teplotu T jako předtím? Předpokládejte, že teplo uniká pouze z válcového pláště vodiče.

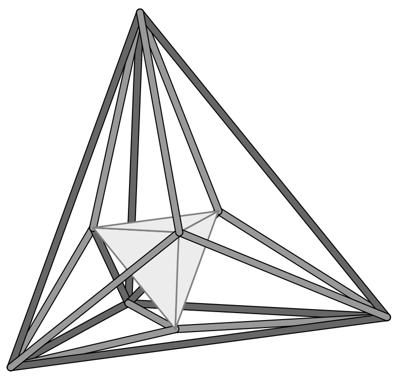
34. Předpokládejme, že planety obíhají okolo Slunce po kruhových orbitách v jedné rovině. Jak dlouho bude pozorovatelný přechod Venuše přes Slunce z místa těsně nad povrchem Země

na spojnici Země–Slunce? Vzdálenost Venuše od Slunce je 1,4–krát menší než vzdálenost Země od Slunce. Pozorovatel na Zemi vidí Slunce v malém zorném úhlu a Venuši považuje za bodový objekt. *Udejte číselný výsledek*

35. Exoplaneta *Cimermanos* poloměru R_c má teplotu T_c a obíhá ve vzdálenosti D_c od své mateřské hvězdy. Mladý astronom Lukáš objevil další planetu obíhající okolo té samé hvězdy. Nově objevená planeta má osmkrát větší periodu oběhu τ_n a třikrát větší poloměr než planeta *Cimermanos*. Lukáše by však zajímalo, jaká je teplota T_n nově objevené planety. Planetu a její mateřskou hvězdu můžete považovat za dokonale černá tělesa.

36. Těžký frajer Tomáš letí nadzvukový letadlem společnosti FYKOS přímo nad rovníkem ve výšce 18 000 m směrem na východ. Káťa ho sleduje z povrchu Země a zdá se jí, že letadlo letí rychlostí $600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Když se Tomáš v letadle postavil na váhu, ukázala mu, že je velmi těžký. Přesně 90 kg. Jaká je však Tomášova skutečná hmotnost m, pokud váha ukazuje správné hodnoty v tíhovém poli $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$?

37. Víte, jak odporný by byl Trojsten v jiné dimenzi? Ne? Tak tedy vypočítejte odpor mezi dvěma vrcholy konstrukce čtyřstěnu, která vypadá tak, jako na obrázku. Vnější konstrukci tvoří odporový drát, který spojuje všechny vrcholy pravidelného čtyřstěnu a tytéž vrcholy jednotlivých stran s příslušnými středy. Uvažujte, že každý drát má odpor R. Středy stěn jsou navíc spojené menším čtyřstěnem, který je vyrobený z dokonale vodivého plechu.

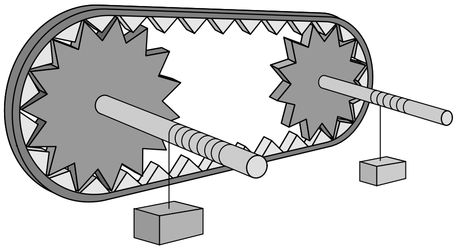


Obr. 14: Odporný štvorsten

38. Jimmy se rozhodl, že zdolá Mont Blanc. Vyrazil z vesnice Chamonix ležící v nadmořské výšce 1000 m, kde si koupil croissant v obale s objemem 280 ml. Při výstupu se obal nafoukl na maximální objem 300 ml. V jaké nadmořské výšce se croissant sám otevřel, jestliže víme, že obal snese přetlak 10 kPa? Po prasknutí obalu Jimmy zjistil, že objem croissantu je 180 ml. Předpokládejte izotermickou atmosféru a exponenciální pokles tlaku s výškou podle vztahu $p = p_0 e^{-\frac{ch}{p_A}}$, kde p_A je atmosférický tlak na hladině moře a $c = 10\,\mathrm{Pa\,m^{-1}}$.

39. Máme dvě těžká ozubená kola s hmotnostmi M_1, M_2 a poloměry R_1, R_2 spojená řetězem. Na každé z nich připevníme tyč s namotaným lankem tak, že visí z vnějších stran soustavy (viz

obrázek). Poloměry tyčí jsou ρ_1, ρ_2 a na lanka připevníme závaží s hmotnostmi μ_1, μ_2. Závaží nejprve držíme, následně je pustíme. Jaké je zrychlení závaží s hmotností μ_1, když obě závaží pustíme? Pro výpočet momentů setrvačnosti uvažujte, že kola jsou disky, moment setrvačnosti tyčí zanedbejte.



Obr. 15: Ozubená kola spojená řetězem

40. Ocelové lano, které odmotáváme z kotouče, má takovou pevnost, že pokud volně visí, roztrhne se při délce L. Kubo si vzal tuto odtrženou část a vyrobil z ní na zemi kruhovou smyčku s obvodem L. Následně ji začal roztáčet ve vodorovné rovině kolem středu smyčky. Při jaké úhlové rychlosti se roztrhne?

41. Když byl Erik v létě stanovat, všiml si na obloze velmi jasného a rychlého meteoru. Na kiwipedii zjistil, že meteorem muselo být zrnko prachu pocházející z komety 31462 *Brch*. O kometě se však dočetl jen tolik, že její dráha kolem Slunce má tvar paraboly. Umíte říct, jakou největší rychlostí můžou zrnka prachu z komety 31462 dopadnout na Zemi?
Uvažujte, že oběžná dráha Země je kruhová a tloušťku atmosféry zanedbejte.

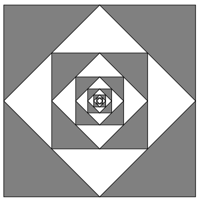
42. Lydka s Markem ze Země pozorují objekty ve vesmíru. Nejprve uviděli rychle se pohybující neznámý objekt přibližující se k Zemi a rozhodli se změřit jeho rychlost. Jelikož si neuvědomili mnohé souvislosti, nepřišlo jim divné, že neznámému objektu naměřili (zdánlivou) rychlost $3c$. Jakou zdánlivou rychlostí se od nich bude objekt vzdalovat potom, co proletí Zemí? (Zdánlivá rychlost $3c$ znamená, že za čas Δt se nám zdá, že se objekt přiblížil o $3c\Delta t$, i když má samozřejmě podsvětelnou rychlost.)

43. Zuzka si nedávno hrála se zajímavou fyzikální soustavou. Do tepelně izolované krabice s dokonale odrazivým vnitřním povrchem vložila zářič s teplotou $T = 3000\,\mathrm{K}$, plochou S a obrovskou tepelnou kapacitou. Ve středu krabice se nachází složitá optická soustava, která celý výkon zářiče zaostří na malou černou destičku s desetkrát menší plochou ležící na opačné straně krabice. Jaká je teplota T_d destičky po ustálení?

44. Ve vzdálené galaxii se nachází hvězda o hmotnosti M s celkovým výkonem záření P. Okolo ní obíhá planeta na kruhové orbitě s periodou T. Hustota planety je ϱ a poloměr R. V jaké vzdálenosti r obíhá planeta kolem hvězdy?

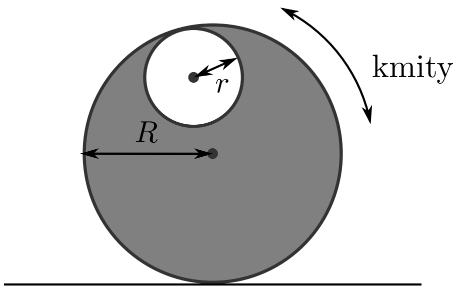
45. Mišo vběhl do fykosárny se svým novým objevem – Mišovým čtvercem. Mišův čtverec má hranu délky a a hmotnost M. Vyrobíme ho tak, že vezmeme čtverec s hranou a, vyřízneme

z něho menší čtverec s vrcholy ve středech stran původního čtverce a následně do vyřezaného čtverce přidáme další čtverec s vrcholy ve středech stran vyřezaného čtverce Následně celý postup opakujeme až do nekonečna. Pokud jsme neudělali chybu, získáme útvar jako na obrázku. Lukášovi se Mišův čtverec velmi líbí. Radost mu však kazí to, že nezná jeho moment setrvačnosti vůči ose procházející kolmo středem čtverce. Pomůžete mu?



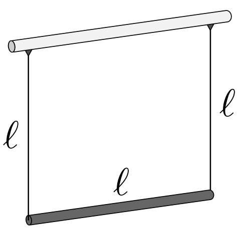
Obr. 16: Mišův čtverec.

46. Oldovi se pokazilo kolo. Zůstalo sice kulaté, ale udělala se mu do něj díra. Jakou bude mít periodu malých kmitů, když ho položí na vodorovný povrch a nechá převalovat okolo rovnovážné polohy? Pokažené kolo má teď už jen hmotnost M, poloměr R a díra má poloměr $r = \frac{R}{3}$.



Obr. 17

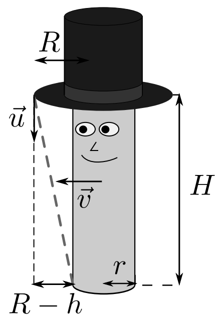
47. Pravoúhlý rámeček je složen ze čtyřech tyčí zanedbatelného průměru o délce l. Spodní je vodivá, boční jsou nevodivé a se zanedbatelnou hmotností, vrchní je vodorovně upevněná tak, že zbylé tři se mohou okolo ní otáčet. Celý tento systém je vložen do horizontálního magnetického pole s indukcí $\vec{\mathbf{B}}$, které je kolmé na zavěšený rámeček. Potom přišla Verča, vychýlila tento rámeček do horizontální polohy a pustila. Jaké největší napětí U_{max} se může indukovat na spodním vodiči?



Obr. 18

Autorská řešení

$\boxed{1.}$ Dešťová kapka padající těsně vedle klobouku překoná výšku H za čas $t = \frac{H}{u}$. Aby kapka nedopadla na Jimmiho, může se ze tento čas Jimmi posunout o vzdálenost $R - r$. Platí tedy $R - r = vt$. Po dosazení výrazu pro čas dostáváme maximální možnou rychlost pohybu Jimmiho $v = \frac{R-r}{H}u$.



Obr. 19

$\boxed{2.}$ Voda bude vytékat z potrubí jen za předpokladu, že bude vytlačená větším tlakem, než je venku, tedy 1 atmosférou. To však znamená, že ve vodovodním potrubí může tlak poklesout až o 19 atmosfér a stále z něho bude vytékat voda. Důvodem proč bude klesat tlak v potrubí je právě hydrostatický „proti" tlak způsobený vodním sloupcem nad přízemím. Pro maximální výšku budovy tedy dostaneme

$$h = \frac{19\,\mathrm{atm}}{\rho g} = \frac{1\,925\,175\,\mathrm{Pa}}{1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \approx 196\,\mathrm{m}$$

$\boxed{3.}$ Každým přeložením papíru zvětšíme dvakrát jeho tloušťku. Na začátku je tloušťka $d = 10 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$, a po n přeloženích je $d \cdot 2^n$.

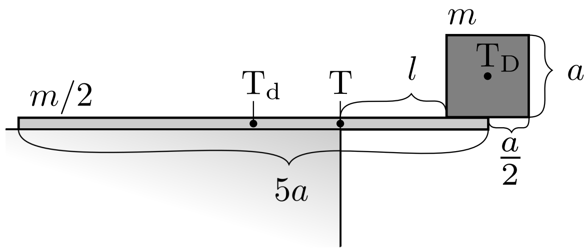
Potřebujeme dosáhnout tloušťky alespoň $1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^9\,\mathrm{m}$, hledáme tedy takové N, aby $1\,\mathrm{AU} = d \cdot 2^n$. To je ale jednoduché, stačí to zlogaritmovat [1]

$$\log_2\left(\frac{1\,\mathrm{AU}}{d}\right) = \log_2(2^N) = N \qquad \longrightarrow \qquad N = \log_2\left(\frac{1\,\mathrm{AU}}{d}\right) \doteq 50.4$$

Výsledek zaokrouhlíme nahoru, dostáváme tedy, že papír musíme 51-krát přeložit, abychom s ním dosáhli ze Země na Slunce!

$\boxed{4.}$ Aby Karel nespadnul, musí se jeho těžiště T_D nacházet nejdále nad okrajem desky. Aby deska s Karlem nepřepadla přes okraj útesu, musí být jejich společné těžiště nejdále nad okrajem útesu. Na vyřešení úlohy musíme tedy najít pouze polohu společného těžiště.

[1] A můžeme použít logaritmus s libovolným základem. Já volím dvojkový (číslem „2")!

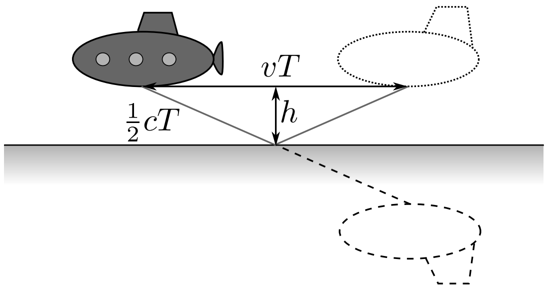


Obr. 20

Měříme vzdálenosti od začátku desky. Poloha těžiště desky T_d je ve vzdálenosti $\frac{5}{2}a$ a poloha Karlova těžiště T_K ve vzdálenosti $5a$. Spoločné těžiště najdeme jako vážený průměr jednotlivých těžišť $\frac{\frac{m}{2}\cdot\frac{5}{2}a+m\cdot 5a}{\frac{m}{2}+m} = \frac{25}{6}a$. Karla je tedy možné položit maximálně do vzdálenosti $l = 5a - \frac{25}{6}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$. [2]

$\boxed{5.}$ Uvažujme časový interval τ. Za tento čas proteče ohřívačem voda o objemu $V = Q\tau$ a hmotnosti $m = \varrho Q\tau$. Na její ohřátí z teploty T_{cold} na teplotu T_{hot} je potřeba energie $E = mc\,(T_{hot} - T_{cold})$. Výkon ohřívače je tedy $P = \frac{E}{\tau} = \varrho cQ\,(T_{hot} - T_{cold})$. Po dosazení číselných hodnot dostáváme, že průtokový ohřívač musí mít příkon 2,09 kW.

$\boxed{6.}$ Jelikož ponorka ani ultrazvuk nemění svoji rychlost, existuje jen jediný úhel α, pod kterým mohl ultrazvuk z ponorky vyjít, aby ho za T sekund zaznamenala [3]. Samozřejmě, signál se musel odrazit od dna (viz obrázek):



Obr. 21

Pro tento úhel platí $\cos\alpha = \frac{vT}{cT} = \frac{v}{c}$. Když si všimneme pravoúhlého trojúhelníku obsahujícího úhel α, tak můžeme na základě Pythagorovy věty přímo vypočítat hloubku vodorovného dna

$$h = \frac{cT}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

[2] Nesmíme zapomenout, že Karel zabírá na desce délku $\frac{a}{2}$

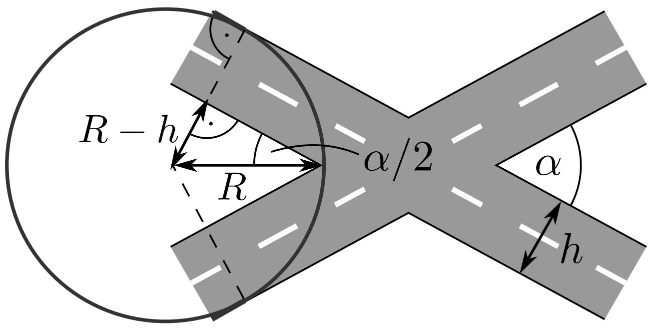
[3] Tento úhel je takový, že kdybychom si promítli ponorku pomocí dna jako přes zrcadlo, tak by dráha zvuku byla rovná čára.

7. Podívejme se nejprve na situaci, když led plave volně na hladině. Soustava sklenice-čaj-led tvoří jeden objekt s hmotností $m_p + m_c + m_l$. Tato hmotnost se zobrazí na váze. Když však Ivo zatlačí kostku ledu pod hladinu, musí působit silou F, která je rozdílem vztlakové síly ledu a tíhové síly působící na led $F = F_{vz} - F_G$. A tedy jediným rozdílem oproti předcházejícímu případu je existence síly F působící na soustavu, která se projeví i na hmotnosti zobrazené váhou. Nově ukazovaná hmotnost bude $m_p + m_c + m_l + \frac{F}{g}$, takže změna hmotnosti, kterou hledáme je

$$\Delta m = \frac{F_{vz} - F_G}{g} = a^3 \left(\varrho_c - \varrho_l\right)$$

.

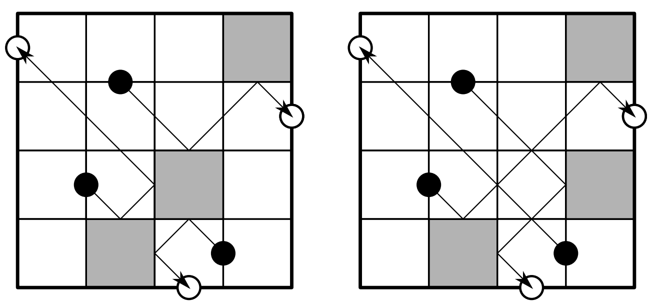
8. Pokud traktor nemůže vyjet z cesty, musí být vnější okraj cesty tečnou ke kružnici, po které se traktor pohybuje. Naší úlohou je tedy najít co největší kružnici, která se dotýká vnějšího okraje cesty, přičemž kružnicový oblouk vytyčený body dotyku leží celý na cestě. Tomu evidentně odpovídá kružnice procházející body, v nichž se protínají vnitřní okraje. Nyní už stačí pouze najít její poloměr.



Obr. 22

Z obrázku vidíme, že s využitím jednoduché trigonometrie dostáváme $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-h}{R}$, odkud $R = \frac{h}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

9. Úloha má dvě řešení:



Obr. 23: Správné rozmístění zrcadel

10. Když se trochu zamyslíme, jak takový balón letí, měli bychom si všimnout, že striktně vzato neletí... Pouze se vznáší v určité výšce a nechává se unášet větrem. Takže můžeme zanedbat nejen deformaci, ale také všechno ostatní. Jedinou podstatnou informací zůstává konstantní rychlost větru a obvod Země.

Ten je přibližně $2\pi \cdot 6378\,\mathrm{km} \doteq 40\,074\,\mathrm{km}$, což po vydělení konstantní rychlostí větru dává výsledek 1002 hodin, po zaokrouhlení nahoru 42 dní.

Zrychlování balónu po vypuštění trvá sice nenulový, ale určitě zanedbatelný čas, řádově několik sekund. Přesný výpočet ponecháme na čtenáři :-)

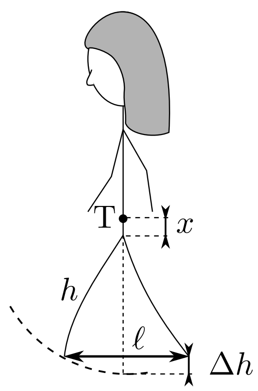
11. Na začátku uvažujme dvě možnosti - horní kvádr se bude pohybovat dopředu spolu se spodním, nebo půjde proti směru jeho pohybu (tudíž se bude pohybovat dozadu). Odpověď nám dá poměr síly F ze zadání a poměr třecí síly F_t, která působí mezi kvádry. Třecí síla je sílou reakční, takže vždy působí proti síle aktivní. Její maximální hodnota je:

$$F_t = mgf = 3{,}14\,\mathrm{N}\,,$$

což je víc než aktivní síla $F = 2\,\mathrm{N}$, kterou je tahána spodní kostka. Z toho vyplývá, že se síly navzájem vyrovnají a kvádry se budou pohybovat spolu. Zrychlení celé soustavy je potom rovno

$$a = \frac{F}{M+m} = 0{,}4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

12. Nejdříve si vypočítáme energii, kterou je třeba vynaložit při jednom kroku.



Obr. 24

Krok probíhá následovně. Nejdříve stojíme svisle, takže těžiště je ve výšce $x + h$, kde x je vzdálenost těžiště od beder. Poté se pohneme trochu dopředu a nohy rozkročíme na vzdálenost l. Naše těžiště klesne do výšky $x + \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}}$, takže změna výšky těžiště je $\Delta h = h - \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}}$. V této chvíli jsme zatím ale žádnou práci nevykonali, práci konala tíhová síla. Po dokončení kroku jsou nohy vedle sebe, takže naše těžiště se vrátí do původní výšky $x + h$. To znamená, že jsme překonali výškový rozdíl Δh. Tentokrát konáme práci, která působí proti tíhové síle. Velikost vynaložené energie při jednom kroku je $E_0 = mg\Delta h$. Pokud chceme urazit vzdálenost

s, musíme ujít $n = \frac{s}{l}$ kroků. Celková vynaložená energie je $E = nE_0 = \frac{s}{l}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4h^2}}\right) mgh$.

13. Jirkův voltmetr ukáže podle zapojení napětí, které je mezi rezistory s odpory R a $2R$. Nejdříve si vypočítáme proud protékající jednotlivými rezistory.

Proud protékající prvním rezistorem je zároveň roven i celkovému proudu v obvodu. Rezistory jsou zapojené sériově i paralelně. Celkový odpor spočítáme jako

$$R_0 = R + \frac{(2R+4R)(3R+5R)}{2R+4R+3R+5R} = \frac{31}{7}R.$$

Z toho můžeme vypočítat proud $I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{7}{31}\frac{U}{R}$.

Proud procházející druhým rezistorem spočítáme z 2. Kirchhoffova zákona pro uzavřenou smyčku; případně taky víme, že proud se v paralelním zapojení dělí v poměru opačném, než je poměr odporů jednotlivých větví.

$$I' = \frac{3R+5R}{2R+4R+3R+5R} I_0 = \frac{4}{31}\frac{U}{R}$$

Všechny potřebné informace o obvodu už jsme zjistili. Celkové napětí obvodu vypočítáme jako součet napětí na jednotlivých rezistorech.

$$U_{Volt} = RI_0 + 2RI' = \frac{15}{31}U$$

14. Namísto těžiště budeme uvažovat moment síly $\vec{M}$, který se počítá jako vektorový součin ramena síly $\vec{r}$ a působící síly $\vec{F}$: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Na zjištění velikosti momentu síly nám stačí znát délku kolmé složky ramena síly. Stačí, když vyvážíme všechny momenty sil vztažené ke dnu sklenice a dopočítáme objem. Označme si hmotnost žáby M, hmotnost sklenice m, horní poloměr sklenice R a spodní poloměr r. Dostáváme

$$mgr + V\rho gr = Mg(R-r) \implies V = \frac{M}{\rho}\frac{(R-r)}{r} - \frac{m}{\rho} = \frac{50}{3}\,\mathrm{ml} \doteq 16{,}67\,\mathrm{ml}.$$

Pro jiné číselné hodnoty by se mohlo stát, že žába bude příliš těžká a do sklenice už nebudeme moct nalít tolik vody, aby se nepřevrhla.

15. V generátoru při jednom cyklu spálíme palivo s hmotností m_0 a výhřevností H. Uvolní se při tom energie $E0 = Hm_0$. Účinnost generátoru je η. To znamená, že se efektivně využije energie $E = \eta E_0$ a zbytek se uvolní v podobě tepla $Q = E_0 - E = Hm_0(1-\eta)$. Generátor následně ochladíme vodou z nádrže o hmotnosti m, která absorbuje všechno teplo Q a odvede ho do nádrže. Samozřejmě bychom mohli vyřešit, jak se ohřeje voda m a potom jaké teploty dosáhne po smísení v nádrži a takto pokračovat, ale je to úplně zbytečné. Celý systém je dokonale izolovaný, teplo tedy nemůže unikat, a tak se bude hromadit v nádrži. Po n cyklech

se uvolní teplo nQ, které absorbuje voda o hmotnosti M a počáteční teplotě t_0. Platí $nQ = Mc\,(t - t_0)$, odkud $t = \frac{nQ}{Mc} + t_0 = \frac{n(1-\eta)Hm_0}{Mc} + t_0$.

$\boxed{16.}$ Na kratší stranu mýdlové blány působí síla povrchového napětí $F_p = 2\sigma d$. (Dvojka proto, že mýdlová blána má dvě rozhraní se vzduchem.) Potom, co mýdlová blána praskne u kratší strany, rámeček už nemá jak tuto sílu kompenzovat, a proto začne urychlovat celou mýdlovou blánu o hmotnosti $m = ldh\rho$. Zrychlení mýdlové blány je $a = F/m = \frac{2\sigma}{lh\rho} \approx 600\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ Proto i kdybychom blánu natočili ve směru tíhové síly, výsledek by to příliš neovlivnilo

Jde tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb, přičemž těžiště blány musí přejít z jejího střenu na okraj, tedy musí urazit vzdálenost $l/2$. Pro čas smršťování tedy dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{2\frac{l}{2}}{a}} = \sqrt{\frac{l^2 h\rho}{2\sigma}} = 13\,\mathrm{ms}.$$

Kdybychom se dívali na pohyb okraje blány, tj. uvažovali, že musí projít celou délku delší strany l, dopracovali bychom se k výsledku 18 ms Tento čas je horním odhadem. Čas 13 ms je naopak dolním odhadem. Rozdíl vyplývá z toho, zda se díváme na pohyb okraje blány, nebo těžiště.[4]

$\boxed{17.}$ x-ovou souřadnici těžiště určíme snadno – ze symetrie loďky je zjevné, že těžiště se bude nacházet na její ose, tedy $x = 2{,}5$. Ve svislém směru to už bude komplikovanější. Použijeme momentovou větu – když totiž loďku podepřeme v těžišti, výslednice momentových sil v něm bude nulová. Navíc předpokládáme konstantní plošnou hustotu papíru, tedy hmotnost libovolného kousku papíru bude přímo úměrná jeho ploše.

Rozdělíme si tedy loďku na čtyři části. První část je horní stříška ve tvaru trojúhelníku. Její těžiště se nachází ve výšce $y_1 = \dfrac{4}{3}$, přičemž má plochu $S_1 = \dfrac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$. Dále máme dva trojúhelníky po okrajích s plochou $S_2 = \dfrac{1}{2}$ a těžištěm ve výšce $y_2 = \dfrac{2}{3}$.[5] Zůstal nám už jen obdélník s plochou $S_3 = 3$ a těžištěm ve výšce $y_3 = \dfrac{1}{2}$.

Teď když známe polohy všech částí, dostaneme pro výšku těžiště (jakožto vážený průměr):

$$y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{7}{10}$$

Těžiště má tedy souřadnice $[2{,}5; 0{,}7]$.

$\boxed{18.}$ Problém si můžeme rozdělit na dvě části. V první letí náboj rovnoměrně zpomaleným pohybem směrem nahoru s počáteční rychlostí v, což potrvá čas t_1. V druhé části po nárazu

[4] Kdybychom chtěli přesnější výsledek, tak bychom museli započítat i fakt, že se mění i hmotnost pohybující se blány.

[5] Těžiště míří k přeponě a má délku $\dfrac{1}{sqrt2}$ a těžiště leží ve třetině této vzdálenosti od přepony. Když vypočítáme kolmou vzdálenost od odvěsny, dostaneme délku $\dfrac{1}{3}$.

se už pouze šíří zvuková vlna konstantní rychlostí c směrem k nám a trvá jí to čas $t - t_1$, kde $t = 5\,\mathrm{s}$. V obou případech bude uražená vzdálenost h, což je přesně výška, kterou hledáme. Dostáváme tedy rovnice

$$h = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$h = c(t - t_1)$$

Ty dokážeme dále upravit na kvadratické rovnice, z nichž už snadno získáme řešení pro výšku jeskyně.

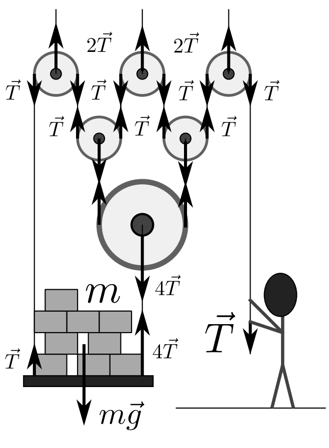
$$h = \frac{\frac{gt}{c} - 1 - \frac{v}{c} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c} - \frac{gt}{c}\right)^2 + 4\frac{g}{2c^2}\left(vt - \frac{1}{2}gt^2\right)}}{\frac{g}{c^2}}$$

V tomto bodě se musíme zastavit a zamyslet, které řešení je to naše. Fyzikální smysl dává pouze to s kladnou výškou a tedy řešení s "plusem". Po několika úpravách konečně dostaneme výšku jeskyně, ve které střílí Petr.

$$h = c\left(t - \frac{c+v}{g} + \sqrt{\left(\frac{c+v}{g}\right)^2 - \frac{2ct}{g}}\right) \approx 591{,}20\,\mathrm{m}$$

19. Jak nám říká zadání, hmotnosti lan a kladek můžeme zanedbat a budeme je považovat za ideální. To však znamená, že výslednice sil a momentů sil působících na každou kladku musí být nulová a lana přenášejí sílu, kterou jsou napínána, podél celé svojí délky.

Teď, když to víme, představme si, že zatáhneme za lano silou T. Lanem, za které taháme, budou cihly vytahovány silou T. Kladky v horní řadě budou taženy silou T směrem dolů z obou stran a závěsy z vrchu je budou kompenzovat silou $2T$. Tím bude dosažena rovnováha sil na těchto třech kladkách. Dvě prostřední kladky budou taženy silou T z obou stran směrem nahoru a lano z nich visící musí být tedy napínané silou $2T$ z každé strany. Z této úvahy logicky dostáváme, že lano visící z poslední kladky bude působit silou $4T$ na cihly.



Obr. 25: Sily v kladkostroji

Na cihly by tedy měla působit celková síla $5T$, která musí být větší, než mg. Pokud tedy chceme zvednout cihly, musíme působit silou alespoň $\frac{mg}{5}$.

$\boxed{20.}$ Při každém ředění klesne průměrně počet molekul účinné látky ve vodném roztoku na jednu setinu. Označíme-li počet molekul v roztoku N, tak potřebujeme zjistit, pro jaký nejmenší stupeň ředění n (přirozené číslo) bude už v průměrném případě počet molekul menší než 1, tedy $N\left(\frac{1}{100}\right)^n < 1$. Na to využijeme logaritmus.

$$n = \lceil \log_{100} N \rceil$$

[6] Zbývá nám tedy zjistit, kolik molekul je v objemu $V = 5\,\mathrm{ml}$ vody. To zjistíme za použití Avogadrovy konstanty ($N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$) a molární hmotnosti vody ($M_m = 18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) jako

$$N = \frac{V\rho}{M_m} N_A .$$

V průměrném případě tedy potřebujeme

$$n = \left\lceil \log_{100}\left(\frac{V\rho N_A}{M_m}\right)\right\rceil = \left\lceil \log_{100}\left(\frac{5\times 10^{-6}\,\mathrm{m^3}\cdot 1\times 10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\cdot 6{,}022\times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{18\times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}\right)\right\rceil = 12$$

ředění.

$\boxed{21.}$ Otázka úlohy směřuje na úhlovou rychlost ruličky, takže bychom měli intuitivně cítit, že je potřeba použít zákon zachování energie. V naší situaci se potenciální energie papíru a kočky přemění na kinetickou energii papíru a kočky. Rulička žádnou energii neukládá, jelikož její hmotnost je zanedbatelná.

Jazykem rovnic:

$$-\Delta E_p = \Delta E_k ,$$
$$MgL + mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 .$$

Je zřejmé, že rychlost papíru, rychlost kočky a obvodová rychlost ruličky v čase úplného odmotání jsou všechny stejné a rovné $v = \sqrt{\frac{2M+m}{M+m}Lg}$. Tedy úhlová rychlost ruličky v čase odmotání je

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2M+m}{M+m}Lg} .$$

$\boxed{22.}$ Důvodem, proč se proud vody se vzdáleností ztenčuje, je to, že platí rovnice kontinuity – zachování průtoku Q. Tuto skutečnost jsme zvyklí zapisovat jako

$$Q = \text{konst.} \qquad \longrightarrow \qquad Q = \pi R^2 v_0 = \pi r^2 v_r \,,$$

[6] Výraz $\lceil x \rceil$ označuje horní celou část z x, tj. nejbližší celé číslo rovné nebo větší než x.

kde $v_0 = \frac{Q}{\pi R^2} \doteq 16\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ je rychlost vody vycházející z kohoutku a v_r je rychlost vody v momentě, kdy má vodní proud poloměr r. Potřebujeme tedy zjistit rychlost vody v místě dopadu na umyvadlo. Napíšeme si zákon zachování energie pro kousek vody, který se dostal od kohoutku až na umyvadlo a dostáváme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_r^2 \qquad \longrightarrow \qquad v_r = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}.$$

Toto zjištění dosadíme do rovnice kontinuity[7] a máme:

$$Q = \pi r^2 \sqrt{v_0^2 + 2Hg} \qquad \longrightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sqrt{v_0^2 + 2Hg}}} = \doteq 0{,}50\,\mathrm{cm}.$$

$\boxed{23.}$ Zkusme na to jít postupně. První vozík se začal pohybovat okamžitě. Druhý se rozpohyboval až po čase l/v_1, když se napnulo první lano. Rychlost dvou pohybujících se vozíků v_2 zjistíme ze zákona zachování hybnosti[8]

$$mv_1 = (m+m)v_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \frac{v_1}{2}$$

Vidíme, že rychlost je poloviční. Postupujme dále. Třetí vozík se rozjel po napnutí druhého lana, tedy po čase $l/v_1 + l/v_2 = 3l/v_1$. Rychlost tří pohybujících se vozíků zjistíme opět ze zákona zachování hybnosti:

$$mv_1 = (m+m+m)v_3 \qquad \longrightarrow \qquad v_3 = \frac{v_1}{3}$$

Je asi jasné, jak posloupnost pokračovala. Vláček s n vozy by se pohyboval rychlostí v_1/n a nastalo by to po napnutí $(n-1)$-ého lanka. Tedy Domčin vláček se celý rozjede až po čase:

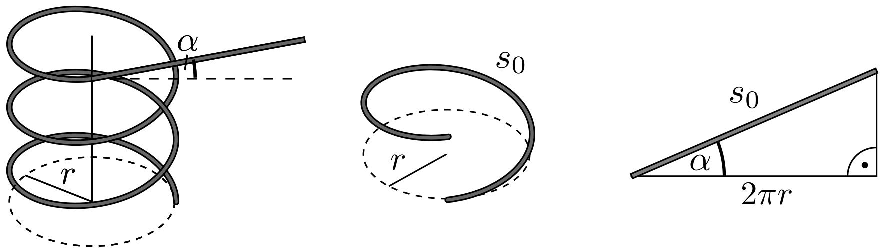
$$T = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} + \cdots + \frac{l}{v_{N-1}} = \frac{l}{v_1}\Big(1 + 2 + \cdots + (N-1)\Big) = \frac{l}{v_1}\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{l}{v_1}\frac{N(N-1)}{2}$$

$\boxed{24.}$ Včelka se pohybuje s úhlovým zrychlením ε. Za čas t opíše úhel $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, to znamená, že vykoná $n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}$ otáček.

Jak praví zadání, rychlost pohybu včelky vzhůru je úměrná úhlové rychlosti. Po krátkém zamyšlení zjistíme, že konec křidélka se tedy pohybuje po spirále, přičemž rozestupy mezi závity jsou konstantní. Sklon závitů je dán sklonem křidélek, takže je rovný α. Označme délku závitu s_0. Proveďme průmět závitu do roviny. Tak dostaneme kružnici délky $2\pi r$. Následně rozviňme závit a jeho průmět do roviny. Dostaneme pravoúhlý trojúhelník znázorněný na obrázku.

[7] Hned první rovnice v tomto vzorovém řešení

[8] Při řešení této úlohy nemůžeme využít zákon zachování energie, protože rozpohybování stojícího vozíku je ve své podstatě nepružnou srážkou.



Obr. 26

Z trigonometrie dostaneme, že $\cos\alpha = \frac{2\pi r}{s_0}$, odkud $s_0 = \frac{2\pi r}{\cos\alpha}$. Dráhu opsanou koncem křidélka získáme tak, že délku závitu už jen vynásobíme počtem závitů.

$$s = ns_0 = \frac{\varepsilon r t^2}{2\cos\alpha}\,.$$

$\boxed{25.}$ Mišovu hmotnost označíme M, Verčinu m. Když si rozložíme složky tíhové síly působící na Verču a na Miša, není těžké přijít na to, že složky tíhových sil působících ve směru kopce musí byť v rovnováze.

$$mg\cos(\alpha) = Mg\cos(2.5\alpha)$$

Po dosazení hmotností nám už jen stačí vyřešit následující rovnici,

$$cos(\alpha) = 1.25\cos(2.5\alpha)$$

Problém však je, že když se budeme snažit použít goniometrické vztahy na přepsání $cos(2.5\alpha)$ pomocí $cos(\alpha)$ a $sin(\alpha)$, dopracujeme se k polynomu vysokého stupně, pro který už neexistuje obecný vzorec, který by nám prozradil, jaké jsou kořeny dané rovnice.

Jelikož hledáme řešení rovnice pro konkrétní hodnoty hmotností a opravovatelé po nás chtějí jen číselný výsledek, nebojme se použít kalkulačku. Chceme přece co nejrychleji úspěšně vypočítat příklad. Ve fyzice se totiž často dopracujeme k rovnicím, které už neumíme řešit obecně, ale jen pro konkrétní hodnoty parametrů.

Asi nejjednodušší metoda, jakou můžeme použít, je *metoda půlení intervalu.* Nemusíte se bát, není to nic strašného. Nejprve si však z rovnice vytvoříme funkci $f(\alpha) = \cos(\alpha) - 1.25\cos(2.5\alpha)$. Nyní se budeme dívat, jak se mění znaménko této funkce na nějakém intervalu. Pokud se totiž změní znaménko na zvoleném intervalu, tak tam bude určitě ležet kořen.[9] Celá myšlenka je založená na rozumném zmenšení tohoto intervalu, např. aby se levý ani pravý koncový bod nelišily ve stupních na druhém desetinném místě.

1. Na začátku si tipneme, v jakém intervalu $< x, y >$ bude ležet řešení. V našem případě to je lehké – pokud řešení existuje, tak musí ležet mezi 0 a $\frac{1}{2.5}(\frac{\pi}{2})$.[10]

[9] Toto tvrzení ve skutečnosti platí jen pro spojité funkce – takové, jejichž graf se dá „nakreslit jedním tahem."

[10] Úhel α určitě nemůže být větší než $\frac{1}{2.5}(\frac{\pi}{2})$ (36°), neboť potom by rovnovážná situace nenastala, protože by Verča stáhla Miša do rokliny pod kopcem. Rozmyslete si to!

2. Dále se podívejme na hodnotu funkce $f(\alpha)$ v bodě $\alpha = \frac{x+y}{2}$. Podle toho, jaké je znaménko funkce v tomto bodě, si v dalším kroku vezmeme znovu takový interval, v němž se mění znaménko funkce. Takže zaměníme buď x nebo y za současný střed.

3. Postup opakujeme, dokud interval není dostatečně malý, v našem případě dokud se konce intervalu nepřestanou lišit na prvém desetinném místě.

Vyžaduje to jen trošku šikovnosti a kousek trpělivosti. Po třinácti opakováních se dopracujeme ke kýženému výsledku 15,9°. Počítače využívají postupy vyžadující menší počet kroků, avšak započítali bychom si při nich víc. Na Náboji nám jde přece o rychlost!

Další možností, jak se dopracovat k výsledku, je využít Taylorův rozvoj[11], tj. $\cos(\alpha)$ i $\cos(2.5\alpha)$ aproximujeme polynomy např. v okolí nuly. Protože nyní máme na obou stranách kosiny, tak v Taylorově rozvoji se budou vyskytovat pouze sudé mocniny α. Pokud bychom však měli rovnici, která by obsahovala siny i kosiny, tak bychom podobný trik nemohli použít, protože bychom se dopracovali znovu ke kubické rovnici.

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

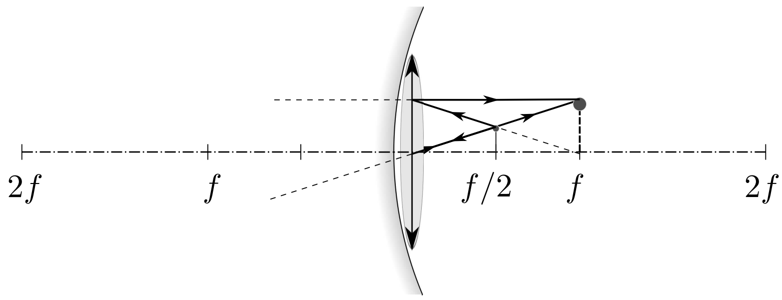
$$\cos(2.5\alpha) \approx 1 - 3.125x^2 + 1.6276x^4 + \dots$$

Dosazením do rovnice získáme bikvadratickou rovnici

$$\cos(\alpha) - 1.25\cos(2.5\alpha) = 0 \implies x^4 - 1.70925x^2 + 0.12545 = 0\,,$$

z níž vezmeme řešení $\alpha = 0.277218$ (v radiánech) ležící v našem intervalu. Po převodu na stupně dostaneme 15,9°, což je vzhledem k požadované přesnosti správný výsledek :). [12]

$\boxed{26.}$ Obrazy budeme postupně zobrazovat spojkou a zrcadlem, dokud nedostaneme skutečný obraz na naší straně. Paprsky jsou vyznačené na obrázku. Nejprve zobrazíme špendlík spojkou s ohniskovou vzdáleností f. Tím se nám špendlík zobrazí do ohniska spojky na té samé straně. Dostane se do dvojnásobné vzdálenosti a obraz se dvakrát zvětší.

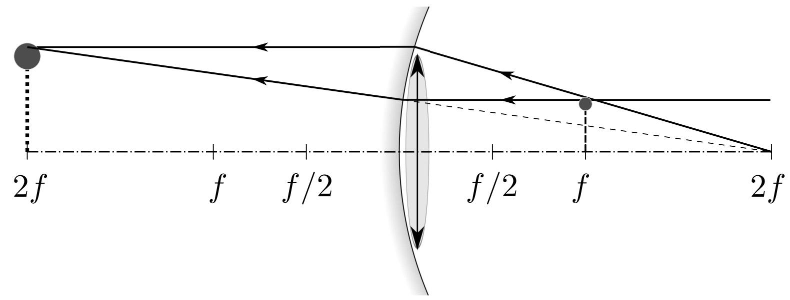


Obr. 27: Zobrazení špendlíku spojkou s ohniskovou vzdáleností f

[11] Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 je $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)'}{1!}(x - x_0) + \frac{f(x_0)''}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$, kde čárky značí derivace funkce v daném bodě.

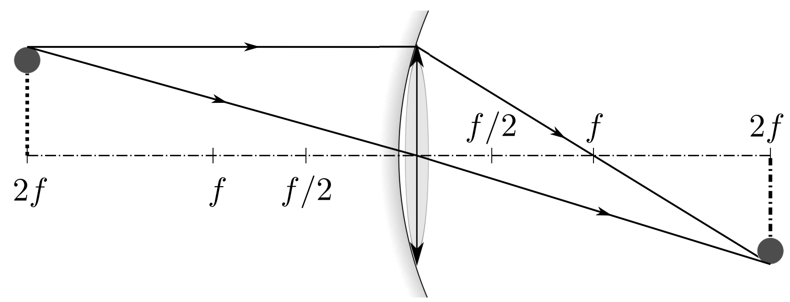
[12] Rozdíl začne být patrný až na třetím desetinném místě :).

Poté obraz špendlíku zobrazený spojkou zobrazíme pomocí dutého zrcadla s ohniskovou vzdáleností $2f$. Tím se obraz stane zdánlivým, dostane se do dvakrát větší vzdálenosti a opět se dvakrát zvětší.



Obr. 28: Zobrazení špendlíku zobrazeného spojkou pomocí dutého kulového zrcadla

Nakonec opět zobrazíme zdánlivý obraz špendlíku spojkou, čímž se obraz stane skutečným a jeho vzdálenost od středu spojky se nezmění; to se týká i jeho velikosti.



Obr. 29: Zobrazení zdánlivého obrazu špendlíku pomocí spojky

Celkem tedy dostaneme obraz špendlíku ve vzdálenosti $2f$ od čočky, který je převrácený a čtyřikrát zvětšený.

$\boxed{27.}$ Úloha není těžká, vyžaduje však poměrně hluboké fyzikální porozumění.

Nejprve se však zamyslíme, proč by se měla skořepina smršťovat. Protože má gravitační síla přitažlivý charakter a ve skořepině je hmota rozdělená rovnoměrně, tak na každý malý dílek skořepiny působí gravitační síla od zbylých dílků na povrchu skořepiny. Ta má tendenci skořepinu smršťovat. Když bychom si teď představili nehmotnou skořepinu rovnoměrně nabitou nábojem Q, tak by měli jednotlivé kousky skořepiny tendenci ji roztahovat. Plošnou hustotu náboje označíme $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ a plošnou hustotu hmoty $\lambda = \frac{M}{4\pi R^2}$.

Jak to tedy bude, pokud je skořepina hmotná a zároveň nabitá? Klíčové pozorování je, že velikost gravitační i elektrické síly je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti a obě působí ve stejném směru, jen jejich orientace je různá. V tomto případě jde tedy o „stejná“ silová pole, která se liší jen orientací a konstantami, které nám zaručují správný fyzikální rozměr.[13] Pokud

[13] Je ale potřeba poznamenat, že tyto analogie mají pouze omezenou platnost, protože v pojmu gravitace se nevyskytuje nic jako polarita náboje a také tam nemáme tak různorodé typy látek jako v elektromagnetismu. Například izolanty a vodiče, které jsou zodpovědné za mnohé zajímavé jevy v elektrostatice :).

si tedy představíme dva libovolné dílky, jejichž plocha je S_1 a S_2, tak skořepina musí být nabitá takovým nábojem Q, aby se gravitační a tíhová síla navzájem kompenzovaly.

$$F_{\text{gravitační}} = F_{\text{elektrická}} \implies G\frac{\lambda^2 S_1 S_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma^2 S_1 S_2}{r^2} \implies GM^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2$$

$$Q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}M$$

$\boxed{28.}$ Na letadlo se vlastně díváme ve dvou různých soustavách – první je spojená se zemí a druhá se vzduchem, přičemž se vůči sobě pohybují jistou, nám zatím neznámou rychlostí větru u.

Nejprve se podívejme na vzlet proti větru v obou soustavách. V soustavě země letadlo během startu zrychlí z klidu na rychlost $v-u$ a v soustavě spojené se vzduchem z rychlosti u na rychlost v. Ihned dokážeme vyjádřit čas, který na to potřebovalo – ten musí být samozřejmě v obou soustavách stejný, $t = \frac{v-u}{a}$. A jakmile známe čas a zrychlení, umíme snadno vyjádřit celkovou uraženou dráhu v soustavě země, která navíc musí být rovna L.

$$L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{(v-u)^2}{a}$$

odkud vyjádříme $u = v - \sqrt{2aL}$.

Teď se podíváme na vzlet v opačném směru. Jediným rozdílem bude změna znaménka u, poněvadž naše letadlo má teď vítr v zádech. Zrychlování bude trvat samozřejmě déle, neboť vůči zemi nyní zrychlujeme z klidu až na rychlost $v + u$. Proto i uražená dráha L' bude muset být větší.

$$L' = \frac{1}{2}at'^2 = \frac{1}{2}\frac{(v+u)^2}{a}$$

a odtud $u = \sqrt{2aL'} - v$.

Nakonec obě rovnice pro u spojíme, a po úpravách dostaneme

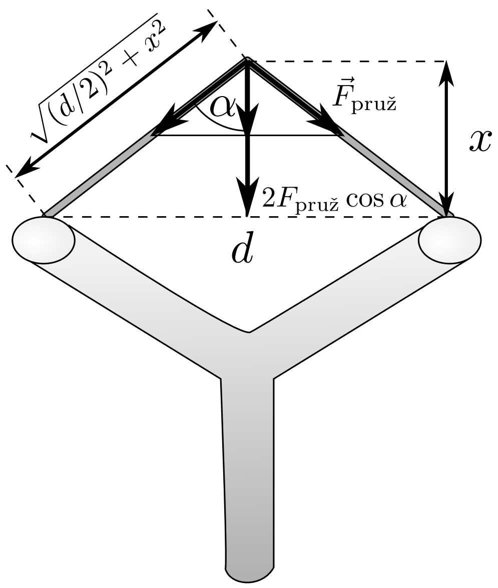
$$L' = L + \frac{2v^2}{a} - 2v\sqrt{\frac{2L}{a}}$$

Dosadíme do vzorce číselné hodnoty, čímž dostaneme $L' \doteq 2057\,\mathrm{m}$

$\boxed{29.}$ Jak nám zadání napovídá, musíme zjistit jak mezi sebou souvisí síla, kterou musíme působit na střed gumičky, a dosažená výchylka gumičky. Nejprve si sestrojíme prak, tím gumičku natáhneme na d. Tuhost gumičky je k. Pak si gumičku uprostřed pomyslně rozdělíme na polovinu. Potom má každá polovina gumičky dvojnásobnou tuhost $2k$.[14] Když střed gumičky vychýlíme o x, tak se každá polovina gumičky natáhne na délku $\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}$ (Pythagorova věta).

[14]Představme si dlouhou rovnou gumičku s tuhostí k. Když ji rozdělíme na polovinu, každá část bude mít dvojnásobnou tuhost. Pokud totiž na gumičku působíme silou F, a ona se natáhne o Δx, tak na každou z částí působí stejná síla a obě se natáhnou jen o $\Delta x/2$. Musí mít tedy dvojnásobnou tuhost, aby se tak stalo.

Zpětná síla od gumičky ale působí ve směru natažených gumiček, takže musíme udělat ještě jejich průmět. Díky tomu nám přibude ve vztahu ještě $cos\alpha$, kde α je úhel mezi gumičkou a směrem vychýlení. Kosinus úhlu určíme z pravoúhlého trojúhelníku.



Obr. 30: Rozklad sil působících při natahování praku

$$F(x) = 2(2k)\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + x^2}}$$

Ošklivé odmocniny se nám zkrátí a vidíme, že tuhost praku (poměr sily F a výchylky x) je $4k$.

$$F(x) = 4kx.$$

$\boxed{30.}$ Volně visící lano se odtrhne tehdy, když tlak tíhové síly překoná mez pevnosti. Jazykem rovnic

$$\sigma = \frac{mg}{S} = \frac{\rho L g}{S}\,,$$

kde L je hraniční délka volně visícího lana, S jeho průřez a ρ délková hustota.
Nyní přichází otázka, kolik lana si musíme z kotouče odmotat (označme tuto délku L^*), aby se roztrhlo díky odstředivé síle působící při otáčení velkou úhlovou rychlostí ω. Pokud je ω podle zadání velká, můžeme gravitační působení v porovnání s odstředivou silou s klidem zanedbat. Opět, tlak odstředivé síly musí překonat mez pevnosti.

Odstředivou sílu působící na celé lano vypočítáme jako odstředivou sílu působící na hmotný bod s hmotností celého lana, který se nachází v místě těžiště lana[15]:

$$F_o = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = \rho L^* \omega^2 \frac{L^*}{2} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}$$

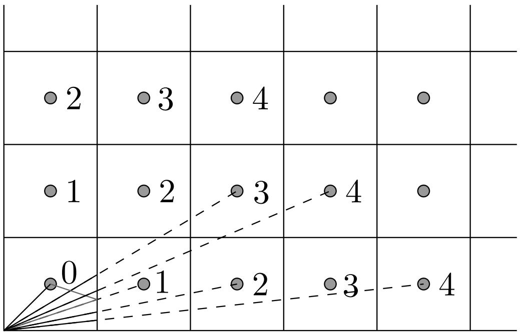
Už můžeme napsat rovnost tlaku odstředivé síly a meze pevnosti:

$$\sigma = \frac{F_o}{S} = \frac{\frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}}{S} \qquad \longrightarrow \qquad L^* = \sqrt{\frac{2\sigma S}{\rho\omega^2}}$$

Hodnotu výrazu $\frac{\sigma S}{\rho}$ známe z první rovnice v tomto vzorovém řešení. Je jí $\frac{\sigma S}{\rho} = Lg$. Takže konečný výsledek pro L^* je:

$$L^* = \sqrt{\frac{2Lg}{\omega^2}}$$

$\boxed{31.}$ Příklad vyřešíme pomocí zdánlivých obrazů. Místnost si rozšíříme na nekonečnou čtvercovou mříž a zavedeme si souřadnicovou soustavu. Roh, v němž stojí Lukáš, bude v jejím počátku, a balón bude uprostřed skutečné místnosti na souřadnicích $[5, 5]$. Pak do středu každého vzniklého čtverce přidáme nový pomyslný balón a pokusíme se ho přímo zasáhnout laserem.



Obr. 31

Počet odrazů si označíme k. Bude rovný počtu přímek v mříži, které protneme. Vzdálenost, kterou paprsek urazí, označíme l, a bude odpovídat vzdálenosti pomyslného balónu od počátku. Nakonec si uvědomíme, že situace je symetrická okolo osy propojující Lukáše s balónem.

[15]Formálnějším přístupem k vypočítání odstředivé síly by bylo použít integrál:

$$F_o = \int_0^{L^*} \omega^2 r \mathrm{d}m = \int_0^{L^*} \omega^2 \rho r \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2} \,,$$

což ale dělat nemusíme. Pokud odstředivá síla závisí lineárně na vzdálenosti ($F_o = m\omega^2 r$), tak vlastně integrálem počítáme stejnou plochu pod grafem, jako když hledáme dráhu zrychleného pohybu – jde o trojúhelník. No a plocha takového trojúhelníku v grafu závislosti odstředivé síly F_o na vzdálenosti od osy r je (rozmyslet!!) přesně $\frac{1}{2}\rho\omega^2 L^{*2}$. Všimněte si, že stejným způsobem počítáme například moment tíhové síly v mechanice.

Ze zadání nyní můžeme říct, že intenzita světla u balónu bude $(0.9)^k \cdot (0.99)^l$-krát menší, než na začátku paprsku. Pak stačí, aby $(0.9)^k \cdot (0.99)^l < 0.5$, a zároveň aby neexistovala dvojice k a l, pro které bude intenzita větší.

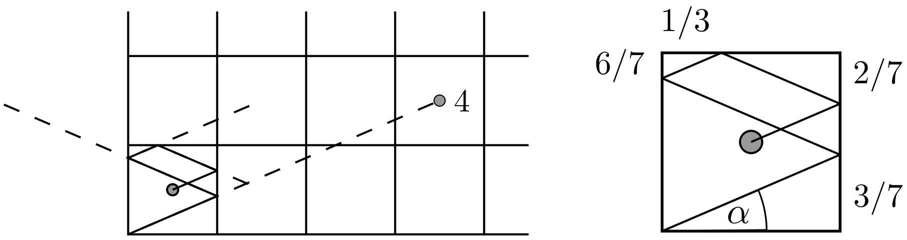
Správné řešení na první pohled asi neuvidíme, takže budeme muset zkoušet. Například když posvítíme přímo na balón ($\alpha = 45°$), $k = 0$ a $l = \sqrt{5^2 + 5^2} \doteq 7.07$. Intenzita je potom přibližně $(0.9)^0 \cdot (0.99)^{7.07} = 93{,}1\,\%$ z původní. To je samozřejmě příliš mnoho, a balón nám praskne. Takže se pokusíme trefit ho po jednom odraze. Potom musíme mířit na myšlený balón na souřadnicích $[5, 15]$. Zde platí $k = 1$ a $l = \sqrt{15^2 + 5^2} \doteq 15.8$. Po dosazení do vzorce zjistíme, že laser je stále příliš silný.

Když takto vyzkoušíme několik možností, zjistíme, že ani po třech odrazech se světlo nikdy dostatečně neztlumí, ale na čtyři to už lze. Jako nejlepší možnost se jeví zdánlivý obraz ve čtverci „dvě vpravo, dvě nahoru“ na souřadnicích $[25, 25]$. Tento obraz však zasáhnout nemůžeme, protože nám překáží skutečný balón na souřadnicích $[5, 5]$.

Jako druhý zkusíme čtverec „jedna vpravo, tři nahoru“ s balónem na souřadnicích $[15, 35]$. Intenzita paprsku při dopadu bude $(0.9)^4 \cdot (0.99)^{\sqrt{1450}} \doteq 44{,}7\,\%$ původní intenzity.

Poslední možností je čtverec $[0, 4]$. Zdánlivý balón v jeho středu má souřadnice $[5, 45]$. Intenzita v tomto případě vyjde $(0.9)^4 \cdot (0.99)^{\sqrt{2050}} \doteq 41{,}6\,\%$ původní. To je ale méně, než v předcházejících případech.

Při větším počtu odrazů nám už balón určitě nepraskne, protože s každým dalším odrazem se paprsek tlumí ještě víc a i uražená vzdálenost nám narůstá[16] My ale hledáme největší možnou intenzitu, takže jsme našli správné řešení. Zbývá nám vyjádřit úhel: svítíme na zdánlivý obraz na souřadnicích $[15, 35]$, takže $\alpha = \arctan(15/35) = \arctan(3/7) \doteq 23{,}2°$ a intenzita bude přibližně $44{,}7\,\%$ původní. A ze symetrie je správným řešením také $\alpha = \arctan(7/3)$.



Obr. 32

$\boxed{32.}$ K řešení se dostaneme téměř bez výpočtů – je potřeba si ale pořádně uvědomit, jak PetroMichal funguje. Funguje takto: sbírá padající dešťovou vodu, která má nulovou hybnost ve vodorovném směru a stříká ji do strany výtokovou rychlostí. Udělí jí tedy hybnost a (díky zákonu zachování hybnosti) vozidlo samotné tak získá stejnou hybnost v opačném směru.

Co se děje v ustáleném stavu? Nemění se výška hladiny a ani hybnost vozidla s vodou. Z toho vyplývá, že

[16] Pozor, toto neplatí univerzálně. Pokud by hodnoty útlumu byly menší, než v zadaní, mohlo by se stať, že řešení s kratší vzdáleností a vícero odrazy bude lepší. Umíme ale snadno ověřit, že pro zadané hodnoty to nenastane.

1. Přítok dešťové vody se musí rovnat odtoku vytékající vody: $wA = v_{vtok}S$.
2. Stejnou horizontální hybnost, kterou si přináší dešťová voda, si musí odnášet i vystřikovaná. Když déšť padá svisle (nulová vodorovná složka rychlosti), vystřikovaná voda musí *vzhledem k zemi stát.* To se stane právě tehdy, když bude voda vystřikována tak rychle, jak se vozidlo pohybuje (akorát opačným směrem): $v_{vozidlo} = v_{vtok}$.

Nyní už snadno vidíme výsledek $v_{vozidlo} = v_{vtok} = w\frac{A}{S}$.

$\boxed{33.}$ V ustáleném stavu, kdy se už teplota vodiče nemění, je výkon Jouleova tepla ($P_{\text{elektrický}} = I^2R$) nutně shodný s výkonem tepelných ztrát. Jelikož v obou dvou případech chceme dosáhnout stejné teploty, nemusíme se zamýšlet nad tím, zda převažují ztráty tepla zářením $\sim T^4$, nebo jenom vedením $\sim \Delta T$. Je to úplně jedno, protože členy vzorce obsahující teplotu vlákna a případně teplotu okolí budou v obou případech číselně shodné. Důležité je si jen uvědomit, že výkon tepelných ztrát je úměrný ploše válcového pláště vodiče.

$$P_{\text{straty}} \sim 2\pi rl \implies P_{\text{straty}} = C2\pi rl$$

Nesmíme ještě zapomenut na to, že i odpor vodiče závisí na jeho poloměru, jelikož se mění jeho průřez, a tedy plocha, skrze kterou teče elektrický proud. Odpor vodiče určíme na základě Ohmova zákona, kde ρ je měrná elektrická rezistivita vodiče a l jeho délka.

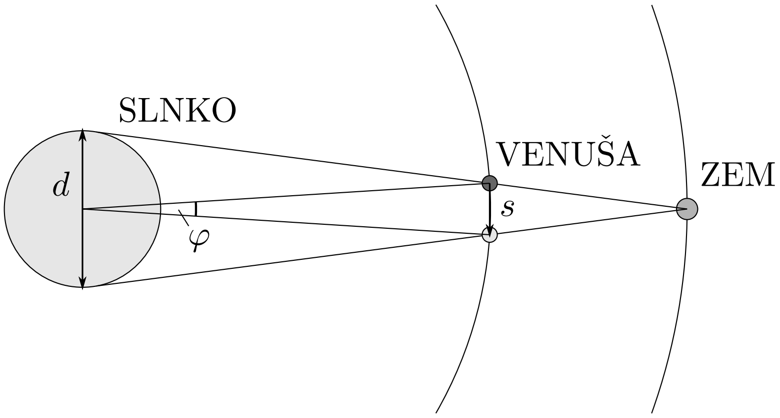
$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{l}{\pi r^2}$$

V ustáleném stavu musí platit rovnost výkonu Jouleova tepla a výkonu tepelných ztrát,

$$P_{\text{elektrický}} = P_{\text{straty}} \implies I^2\rho\frac{l}{\pi r^2} = C2\pi rl \implies I^2 \sim r^3$$

To znamená, že když zvětšíme poloměr dvojnásobně, tak proud musíme zvětšit $\sqrt{2^3}$-násobně, aby se nezměnila teplota vlákna. (Nezapomeňte, že C závisí na teplotě!)

$\boxed{34.}$ Pokládejme Zemi a Venuši za bodové objekty vzhledem ke vzdálenosti od Slunce a průměru Slunce. Nechť vzdálenost Země od Slunce je R a vzdálenost Venuše od Slunce $\frac{R}{k}$. Slunce vidíme ze Země pod malým zorným úhlem. To znamená, že Venuše přechází přes Slunce na relativně krátké dráze v porovnání s délkou její celé oběžné dráhy. To ale znamená, že můžeme trajektorii Venuše na daném úseku aproximovat úsečkou. Z podobnosti trojúhelníků dostáváme $\frac{2r}{R} = \frac{s}{R-\frac{R}{k}}$, odkud $s = \left(1 - \frac{1}{k}\right) 2r$.



Obr. 33

Za předpokladu, že dráhu s vidíme ze Slunce pod dostatečně malým úhlem (do cca 5°), nevidíme prakticky rozdíl mezi úsečkou a kružnicovým obloukem. Tedy dostaneme, že ze Slunce vidíme dráhu pod úhlem $\varphi = \frac{s}{\frac{R}{k}} = \frac{(k-1)2r}{R}$.

Uhlovou rychlost Země určíme z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$m\omega_Z^2 R = G\frac{mM}{R^2}\,.$$

Odtud

$$\omega_Z = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,.$$

Úhlová rychlost Země je $\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z}$. Pomocí třetího Keplerova zákona vypočítáme oběžnou dobu Venuše a následně i uhlovou rychlost Venuše. Platí

$$\frac{T_Z^2}{R^3} = \frac{T_V^2}{\left(\frac{R}{k}\right)^3}\,,$$

odkud

$$T_V = \frac{T_Z}{\sqrt{k^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GMk^3}}\,.$$

Potom

$$\omega_V = \frac{2\pi}{T_V} = \sqrt{\frac{GMk^3}{R^3}}\,.$$

Nechť přechod Venuše přes Slunce trvá τ. Za tento čas musí Venuše opsat o φ větší úhel než Země, proto $\omega_V\tau = \omega_Z\tau + \varphi$. Odtud

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega_V - \omega_Z}$$

a po dosazení výrazů pro úhel a úhlové rychlosti a následně úpravě dostáváme dobu přechodu

$$\tau = \frac{2\,(k-1)\,r\sqrt{R}}{\sqrt{GM}\left(\sqrt{k^3}-1\right)}\,.$$

Už jen zbývá dosadit hodnoty ze zadání a dostaneme čas přechodu

$$\tau \approx 28\,440\,\mathrm{s} \approx 7{,}9\,\mathrm{h} \approx 7\,\mathrm{h}54\,\mathrm{min}\,.$$

Na závěr by se hodilo ještě ověřit, zda naše aproximace trajektorie Venuše úsečkou byla oprávněná. Není se však těžké přesvědčit, že celý přechod přes Slunce proběhl na úhlu $\alpha = \omega_V \tau \approx 0{,}54°$.

35. V ustáleném stavu musí být dopadající výkon záření od hvězdy v rovnováze s vyzářeným výkonem planety.[17] Mateřská hvězda má konstantní výkon, označme si ho P. Intenzita záření[18] klesá jako $\frac{1}{d^2}$, kde d je vzdálenost od hvězdy. To proto, neboť skrz libovolně velkou kulovou plochu poloměru d[19] musí procházet stejný výkon, když se nemá kde ztratit.

Záření hvězdy dopadá jen na průřez planety plochy πR_c^2, ale planeta vyzařuje z celé jeho plochy $4\pi R_c^2$. Porovnáním dopadajícího a vyzářeného výkonu dostaneme

$$\frac{P}{4\pi D_c^2}\pi R_c^2 = 4\pi R_c^2 \sigma T_c^4 \implies T_c^4 = \frac{P}{16\pi D_c^2} \implies T_c^4 D_c^2 = \text{konšt.}$$

Vidíme, že teplota planety závisí jen na její vzdálenosti a ne na její velikosti. Jestliže nově objevená planeta obíhá okolo té samé hvězdy jako planeta *Cimermanos*, tak můžeme využít třetí Keplerův zákon.

$$\frac{\tau^2}{D^3} = \text{konšt.} \implies \frac{\tau_c^2}{D_c^3} = \frac{\tau_n^2}{D_n^3} \implies D_n = D_c \left(\frac{\tau_n}{\tau_c}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Využitím námi objeveného vztahu $T^4 D^2 = \text{konšt.}$ a třetího Keplerova zákona získáme teplotu nově objevené hvězdy T_n.

$$T_n = T_c \sqrt{\frac{D_c}{D_n}} = T_c \sqrt{\left(\frac{\tau_c}{\tau_n}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$T_n = T_c \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{T_c}{2}$$

36. V první řadě je třeba si ujasnit, proč bychom v letadle měli naměřit na váze jinou hmotnost. Důvody jsou dva: Jsme dále od Země, takže kleslo gravitační zrychlení g. Za druhé se hýbeme rychlostí $u = 600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ vzhledem k Zemi, která se vůči nám točí nějakou obvodovou rychlostí. Tedy vzhledem ke středu Země [20] se hýbeme rychleji, což znamená větší odstředivou sílu. V této vztažné soustavě bude rychlost letadla

$$v = u + \omega_{Zem} R_Z \doteq 1063{,}82\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

[17] Celkový výkon záření je popsaný Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

[18] výkon na jednotkovou plochu

[19] Ve skutečnosti přes libovolnou uzavřenou plochu obsahující hvězdu!

[20] Samozřejmě můžeme zvolit jiné vztažné soustavy, ze kterých bychom se na problém dívali. Ale tam bychom museli řešit působení neinerciální Coriolisovy síly, což by značně zkomplikovalo výpočet.

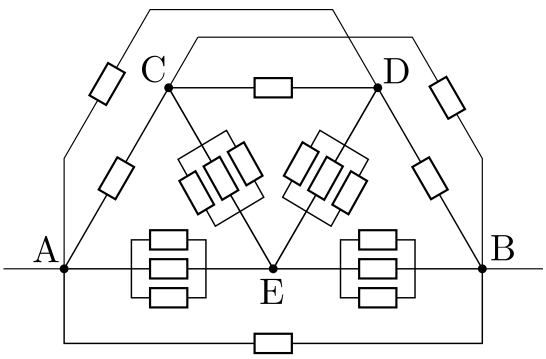
Na Tomáše v letadle tedy působí kromě gravitační síly také odstředivá. A proto by měl Tomáš zpozorovat na váze hmotnost o kousek menší ($m^* = 90\,\mathrm{kg}$). To, co bude ukazovat váha v letadle je konkrétně

$$m^* = \frac{F_G - F_o}{g} = \frac{G\dfrac{M_z m}{(R_z+h)^2} - \dfrac{mv^2}{R_z+h}}{g}$$

Odtud už jen vyjádříme Tomášovu klidovou hmotnost:

$$m = \frac{m^* g(R_z+h)}{G\dfrac{M_z}{(R_z+h)} - v^2} \doteq 91{,}91\,\mathrm{kg}$$

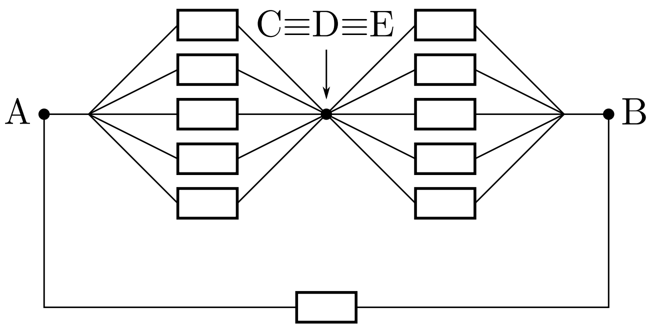
$\boxed{37.}$ První věc, kterou si musíme uvědomit je to, že když máme libovolné body spojené dokonalým vodičem, taky tyto body mají stejný potenciál, neteče mezi nimi proud a chovají se jako jeden a ten samý body. To nám umožňuje překreslit si schéma a podívat se, jak se zjednoduší.



Obr. 34: První zjednodušení čtyřstěnu

Nyní dobře vidíme, že body C, D, a E se nacházejí na ose symetrie odporového schématu. To znamená, že mají stejný potenciál a můžeme je opět spojit. [21] Obohaceni touto znalostí bychom už neměli mít problém překreslit odporové schéma jen na kombinaci sériových a paralelních zapojení rezistorů.

[21]Více o tom, jak a proč můžeme spojit a rozpojit uzly se stejným potenciálem najdete ve 4. kapitole tohoto dokumentu `http://fks.sk/~juro/docs/odpory.pdf`



Obr. 35: Druhé zjednodušení čtyřstěnu

Bez většího počítání už snadno dostaneme odpor pěti paralelně zapojených rezistorů ($\frac{R}{5}$) a následně celého odporného čtyřstěnu

$$R_0 = \frac{\frac{2R^2}{5}}{\frac{2R}{5} + R} = \frac{2}{7}R$$

$\boxed{38.}$ Jimmy vyrazil z nadmořské výšky h_1, kde byl atmosférický tlak $p_1 = p_0 e^{-\frac{c}{p_A} h_1}$. V obalu croissantu byl vzduch s objemem $V_1 - V_0$. Je třeba si uvědomit, že obal může libovolně měnit svůj objem až do maximálního možného objemu V_2 a vzduch uvnitř obalu má vždy teplotu okolního vzduchu. To znamená, že v první fázi výstupu dochází uvnitř obalu k izotermickému ději až do momentu, kdy se obal plně nafoukne na objem V_2. Dojde k tomu ve výšce h_2 a popisuje to rovnice

$$p_0 e^{-\frac{c}{p_0} h_1} \left(V_1 - V_0\right) = p_0 e^{-\frac{c}{p_0} h_2} \left(V_2 - V_0\right) .$$

Odtud postupnými úpravami dostaneme

$$h_2 = \frac{p_0}{c} \left(\ln \frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0} \right) + h_1 .$$

Od této chvíle se objem obalu dále měnit nemůže. Navíc při konstantní teplotě se ani tlak vzduchu uvnitř obalu nemůže měnit. To znamená, že při dalším výstupu vzniká mezi tlakem v obalu a tlakem okolního vzduchu rozdíl. Nechť ve výšce h_3 dosáhne přetlak kritickou hodnotu Δp_k. V této chvíli obal praskne. Uvnitř obalu je v okamžiku prasknutí stálý tlak odpovídající výšce h_2, je tedy možné pro tlak napsat rovnost

$$p_0 e^{-\frac{c}{p_0} h_3} + \Delta p_k = p_0 e^{-\frac{c}{p_0} h_2} .$$

Odtud dostáváme

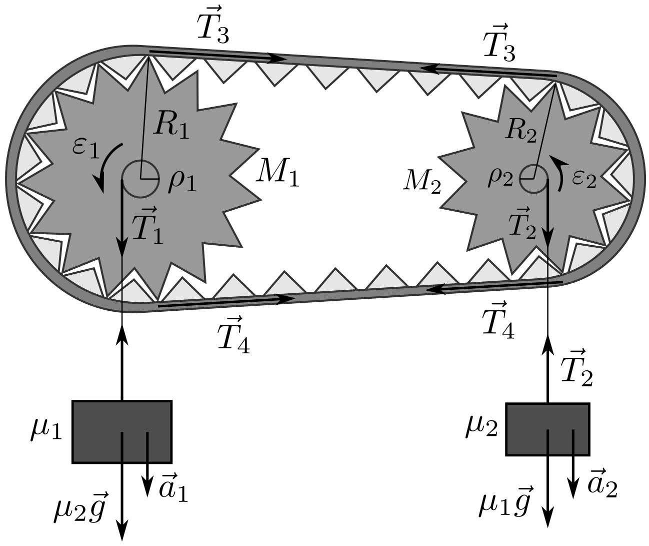
$$h_3 = -\frac{p_0}{c} \ln \left(e^{-\frac{c}{p_0} h_2} - \frac{\Delta p_k}{p_0} \right) .$$

Po dosazení za výšku h_2 a jednoduché úpravě získáme

$$h_3 = -\frac{p_0}{c} \ln \left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} e^{-\frac{c}{p_0} h_1} - \frac{\Delta p_k}{p_0} \right) .$$

Nyní už můžeme do posledního odvozeného výrazu dosadit hodnoty ze zadání a dostaneme, že croissant Jimmymu praskne ve výšce 4267 metrů nad mořem.

$\boxed{39.}$ Naším cílem je vypočítat zrychlení a_1 závaží μ_1. Celá mechanická soustava je vzájemně propojená lany a řetězy, takže všechny její součásti se navzájem ovlivňují. To ale znamená, že musíme analyzovat působení mezi všemi prvky soustavy.



Obr. 36

Předpokládejme, že závaží μ_1 se bude pohybovat dolů se zrychlením a_1. Z toho vyplývá, že levé kolo bude roztáčeno v kladném směru s úhlovým zrychlením $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{\rho_1}$. Řetěz pak zabezpečí provázání pohybu kol. Řetěz je napnutý a nemůže prokluzovat. Z toho plyne, že obvodová rychlost obou kol je stejná. Aby to platilo v libovolném čase, tak i obvodové zrychlení kol musí být stejné, tedy $\varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$. Na základe této rovnice máme jednoznačně určené úhlové zrychlení $\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1$ druhého kola též v kladném směru. A na závěr toto úhlové zrychlení jednoznačně určuje zrychlení závaží μ_2, jenž je rovno $a_2 = \varepsilon_2 \rho_2$.

Proveďme analýzu silového působení mezi jednotlivými součástkami. Na závaží μ_1 působí dolů tíhová síla velikosti $\mu_1 g$ a tažná síla lanka T_1 vzhůru. Podle třetího Newtonova zákona působí i závaží na lanko stejně velkou silou opačného směru. Lanko se nijak nedeformuje a navíc je nehmotné. To znamená, že výslednice sil působících na lanko musí být nulová[22], tedy na druhý konec lanka musí působit tyč silou T_1. A opět, podle třetího Newtonova zákona, lanko působí na tyč, a tedy na ozubené kolo, silou velikosti T_1 dolů. Pro pohyb závaží můžeme napsat pohybovou rovnici

$$\mu_1 a_1 = \mu_1 g - T_1$$

. Zcela analogicky dostaneme pohybovou rovnici pro závaží μ_2 ve tvaru

$$\mu_2 a_2 = T_2 - \mu_2 g$$

[22]Pokud by na libovolnou část nehmotného lanka působila nenulová výslednice sil, musela by mít podle druhého Newtonova zákona nekonečně velké zrychlení.

.

Ještě zbývá popsat síly určující pohyb kol. Už víme, že na jednotlivá kola působí reakční síly na tažné síly od lan T_1, resp. T_2, které působí na kola kroutícími momenty $T_1\rho_1$, resp. $T_2\rho_2$. Navíc je nyní řetěz napnutý a ovlivňuje vzájemnou obvodovou rychlost kol, tedy musí také silově působit na kola. Dále je třeba si uvědomit, že síla od spodní části řetězu může být obecně jiná než síla od vrchní části řetězu.[23] Co však musí platit je, že síla působící na konce volné části řetězu (mezi dvěma body upnutí na kola) je stejná[24]. Označme si tažné síly v řetězu T_3, T_4. Podle třetího Newtonova zákona působí řetěz na kola stejně velkými silami. Nyní už můžeme napsat pohybové rovnice pro pohyb kol. Uveďme ještě, že moment setrvačnosti kola je $J = \frac{1}{2}MR^2$. Pohybové rovnice pro kola jsou tedy

$$\frac{1}{2}M_1R_1^2\varepsilon_1 = T_1\rho_1 + T_4R_1 - T_3R_1$$

$$\frac{1}{2}M_2R_2^2\varepsilon_2 = T_3R_1 - T_2\rho_2 - T_4R_1$$

Nyní máme čtyři pohybové rovnice a tři převodní vztahy mezi zrychleními samotnými a úhlovými zrychleními. Máme sice až osm neznámých, ale síly T_3 a T_4 nás nezajímají. V rovnicích vystupuje jen jejich rozdíl, takže soustava má až na tuto dvojici sil jednoznačné řešení. Nás však zajímá jen zrychlení a_1, které už není příliš náročné ze soustavy rovnic vyjádřit. Řešení soustavy přenecháme jako cvičení čtenáři. Výsledné zrychlení závaží μ_1 je

$$a_1 = \frac{\mu_1\rho_1R_2 - \mu_2\rho_2R_1}{\mu_1R_2\rho_1^2 + \frac{1}{2}\left(M_1+M_2\right)R_1^2R_2 + \mu_1\frac{R_1^2\rho_2^2}{R_2}}\rho_1 g\ .$$

Při výpočtu jsme mohli zvolit i jiný přístup. V ideálním případě nedochází v soustavě ke ztrátám mechanické energie (např. třením, deformací, srážkami). To znamená, že celková mechanická energie se zachovává. Problémem tohoto přístupu je, že obecně vyžaduje znalost derivací. Uvědomme si však, že jediná sila, která na soustavu zvenku působí, je tíhová sila. Tíhová síla je konstantní v homogenním poli, tedy můžeme očekávat, že i zrychlení bude konstantní. To naznačuje, že bychom si mohli vystačit i se znalostí rovnoměrně zrychleného pohybu.

Zamysleme se nad tím, jak se budou jednotlivé části soustavy pohybovat. Jedno ze závaží poklesne (jeho potenciální energie se zmenší), druhé vystoupá výše (jeho potenciální energie poroste). Kromě toho se všechny součásti uvedou z klidu do pohybu, takže jejich kinetická energie naroste. Vezmeme si nějaký časový okamžik τ od momentu uvolnění soustavy. Podle zákona zachování mechanické energie dostáváme

$$\Delta E_{p1} = \Delta E_{p2} + E_{k1} + E_{k2} + E_{r1} + E_{r2}\ .$$

Za čas τ poklesne závaží μ_1 o $\frac{1}{2}\varepsilon_1\rho_1\tau^2$, takže změna jeho potenciální energie je $\Delta E_{p1} = \mu_1 g\frac{1}{2}\varepsilon_1\rho_1\tau^2$. Analogicky se zvýší potenciální energie závaží μ_2 o $\Delta E_{p2} = \mu_2 g\frac{1}{2}\varepsilon_2\rho_2\tau^2$. Rychlost závaží μ_1 v čase τ je $v = \varepsilon_1\rho_1\tau$, takže jeho kinetická energie je $E_{k1} = \frac{1}{2}\mu_1\left(\varepsilon_1\rho_1\tau\right)^2$. Podobně

[23] Protože řetěz je pevně upnutý na kola, a tedy se v něm tažná síla nepřenáší po celém obvodu, ale jen mezi body upnutí na kola.

[24] Ze stejného důvodu, jako v případě lan.

kinetická energie závaží μ_2 je $E_{k2} = \frac{1}{2}\mu_2 \left(\varepsilon_2 \rho_2 \tau\right)^2$. Rotační energie kol v čase τ jsou $E_{r1} = \frac{1}{2} J_1 \left(\varepsilon_1 \tau\right)^2$, resp. $E_{r2} = \frac{1}{2} J_2 \left(\varepsilon_2 \tau\right)^2$, kde $J = \frac{1}{2} M R^2$ je moment setrvačnosti kol. A na závěr ještě potřebujeme propojit pohyb kol rovnicí $\varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$. Na základe těchto vztahů jsme schopni vypočítat úhlové zrychlení ε_1, a tedy i zrychlení závaží $a_1 = \rho_1 \varepsilon_1$. Stačí dosadit všechny vztahy do rovnosti energií. Čas je ve všech výrazech v druhé mocnině, takže zcela vypadne, a tak postupnými úpravami dostaneme vztah pro úhlové zrychlení

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_1 \rho_1 R_2 - \mu_2 \rho_2 R_1}{\mu_1 R_2 \rho_1^2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2\right) R_1^2 R_2 + \mu_1 \frac{R_1^2 \rho_2^2}{R_2}} g \,,$$

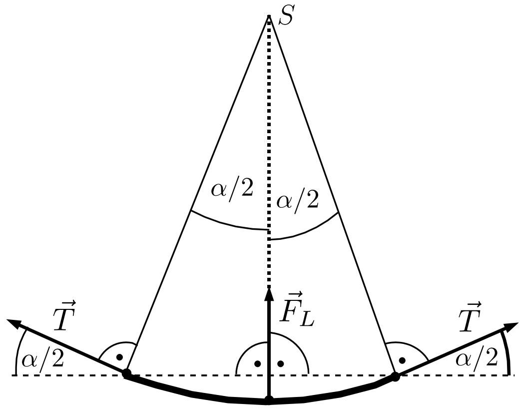
což nám dává stejný výsledek jako postup přes síly.

$\boxed{40.}$ Lano má zřejmě nějaké maximální pnutí, při kterém se roztrhne. Pokud se volně visící lano roztrhlo při délce L, tak maximální pnutí, které vydrží, má velikost:

$$T = mg \,,$$

kde m je hmotnost lana, kterou sice neznáme, ale brzy zjistíme, že to vůbec nevadí.

Pojďme na otáčení: máme otáčející se kruhovou smyčku s poloměrem $R = \frac{L}{2\pi}$ ve vodorovné rovině. Příklad vykazuje symetrii – toho využijeme, můžeme zkoumat libovolný kousek lana s hmotností $m^* = m\frac{\alpha}{2\pi}$. Úhel α vytýká ve smyčce zmiňovaný úsek (viz obr. níže):



Obr. 37

Když smyčkou točíme úhlovou rychlostí ω, působí na náš kousek m^* odstředivá síla o velikosti:

$$F_o = \frac{m^* v^2}{R} = m^* \omega^2 R = m \frac{\alpha}{2\pi} \omega^2 \frac{L}{2\pi} = \frac{m\omega^2 L}{4\pi^2} \alpha$$

V hraničním případě je náš kousek lana napínaný maximálním pnutím T (viz obr. výše) ze dvou stran. Výslednice těchto dvou sil směřuje proti odstředivé síle a má velikost:

$$F_l = 2T \sin(\alpha/2) \approx T\alpha = mg\alpha$$

kde jsme použili přiblížení $\sin\alpha \approx \alpha$, protože náš úhel α může být velmi malý!

Porovnáme síly F_l a F_o a najdeme výsledek, který, jak jsme očekávali, nezávisí na hmotnosti lana:

$$\frac{m\omega^2 L}{4\pi^2}\alpha = mg\alpha \qquad \longrightarrow \qquad \omega = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$\boxed{41.}$ V první řadě si potřebujeme ujasnit, kdy je rychlost při srážce maximální. Určitě bychom měli využít toho, že Země se po svojí oběžné dráze pohybuje poměrně velkou rychlostí. Zrnka prachu by potom měla obíhat okolo Slunce opačným směrem a co největší rychlostí.

Oběžná rychlost Země je jednoznačně určena poloměrem její dráhy a hmotností Slunce. Víme, že dostředivou silou, která je drží na oběžné dráze, je gravitační síla:

$$\frac{M_z v_z^2}{R} = G\frac{M_z M_\odot}{R^2}$$

odkud

$$v_z = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

Jaká nejvyšší může být rychlost zrnek? Jejich dráha je parabolická, takže se pohybují po únikové dráze s nulovou celkovou energií. Potom jejich rychlost vzhledem ke Slunci musí být rovna únikové rychlosti ze vzdálenosti, ve které se právě nachází.

My chceme zjistit jejich rychlost v okamžiku srážky, když je jejich vzdálenost od Slunce rovna poloměru dráhy Země. Mohli bychom ji spočítat přes potenciály, ale raději využijeme známý fakt, že kinetická energie tělesa na kruhové dráze je rovna polovině kinetické energie tělesa na únikové dráze v tom samém místě[25]. A když je energie dvojnásobná, rychlost musí být větší $\sqrt{2}$–krát, označíme $v_E = \sqrt{2}v_z$. I velikost rychlosti zrnek je tedy jednoznačně daná, nám zbývá pouze obě rychlosti sečíst pro optimální případ, kdy se pohybují v opačných směrech.

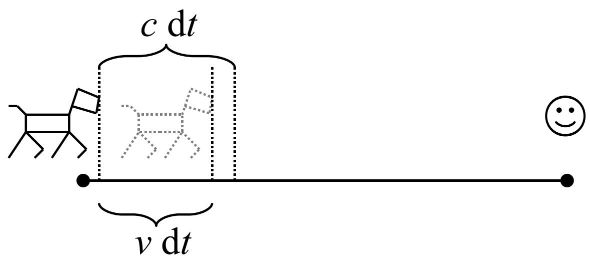
Kromě této přímé srážkové rychlosti však ještě nesmíme zapomenout, že při pádu do gravitační potenciálové jámy Země se rychlost padajícího tělesa ještě zvýší. O kolik? Inu, celková kinetická energie se musí zvětšit ještě o rozdíl potenciálních energií zrnka v nekonečnu a na povrchu.

Zde si dáme pozor již pouze na to, že nesčítáme rychlosti, ale energie, které závisí na čtvercích rychlostí. Výsledná rychlost tedy bude odmocninou ze součtu druhých mocnin obou mezivýsledků:

$$\sqrt{(v_z + v_E)^2 + v_e^2} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \frac{2GM_z}{r}} = 72\,879\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$\boxed{42.}$ Lydka s Markem si sice neuvědomili mnohé souvislosti, ale i ze zdánlivé rychlosti dokáží zjistit, jaká je skutečná rychlost vesmírného objektu $v_{\text{skutečná}}$.

[25] Kdo nevěří, nechť si to ověří výpočtem :).



Obr. 38: Fotony vyslané z Velkého psa [Obrázek ze Zbierky FX]

Představme si, že směrem do našeho dalekohledu vyrazí foton z neznámého vesmírného objektu, např. z Velkého psa. Za čas Δt se foton dostane do vzdálenosti $c\Delta t$, zároveň se však neznámý objekt posune o vzdálenost $v\Delta t$. Pokud po této době vyrazí směrem do našeho oka další foton, tak tyto fotony budou od sebe v prostoru vzdáleny $(c-v)\Delta t$. Pokud však nemáme informaci o tom, že se "fotony nepohybovaly stále rychlostí světla" [26], tak interpretujeme tuto informaci tak, že fotony byly vyslány s časovým rozestupem $\Delta t' = \frac{(c-v)}{c}\Delta t$. Tj. naše smysly a přístroje předpokládají, že fotony "se pohybovaly stále rychlostí světla". To znamená, že se nám zdá, že dráhu $v\Delta t$ urazily ve skutečnosti za kratší čas $\Delta t'$ a tento jev se projeví v námi naměřené zdánlivé rychlosti,

$$v_{\text{zdanlivá}} = \frac{v_{\text{skutočná}}\Delta t}{\Delta t'} = \frac{c v_{\text{skutočná}}}{c - v_{\text{skutočná}}}$$

Pro údaje ze zadání dostaneme, že skutečná rychlost neznámého objektu je $\frac{3}{4}c$.

Pokud se naopak bude od nás objekt vzdalovat, tak fotony vyslané v časovém rozestupu Δt budou od sebe vzdáleny $(c+v)\Delta t$, tj. nám se bude zdát, že loď se pohybuje pomaleji než ve skutečnosti.

$$v_{\text{zdanlivá}} = \frac{c v_{\text{skutočná}}}{c + v_{\text{skutočná}}}$$

V tomto případě naměříme zdánlivou rychlost $v_{\text{zdanlivá}} = \frac{3}{7}c$.

Pozn. autora: Koho tento příklad zaujal, může si najít těžší verzi tohoto příkladu ve Zbierke FX na str. 198.

$\boxed{43.}$ Naivním porovnáním dopadajícího a vyzářeného výkonu černé destičky bychom se dopracovali k teplotě $T_d = 5334\,\mathrm{K}$.

$$S\sigma T^4 = S/10\sigma T_d^4 \implies T_d = \sqrt[4]{10}T = 5334\,\mathrm{K}$$

. Je to však správně? Ne!

V ustáleném stavu, tj. ve stavu termodynamické rovnováhy musí platit, že teploty těles v rovnováze jsou stejné, bez ohledu na to, jak dochází k přenosu tepla (zářením, vedením, konvekcí,...). Pokud by totiž v rovnovážném stavu nebyly teploty těles stejné, tak bychom k nim v rovnovážném stavu mohli připojit vratný tepelný stroj, který by vykonal práci díky tomu, že by část tepla přešla z teplejšího tělesa na chladnější. Teploty by se vyrovnaly. Pak bychom

[26] T.j., že jeden z nich se část pohybu srazil s neznámým vesmírným objektem a čekal na něm, aby byl vyslaný.

tepelný stroj odpojili. Pokud stav se stejnými teplotami není rovnovážný, tak by se teploty znovu ustálily na různých hodnotách. Znovu bychom zapojili náš vratný tepelný stroj... Asi tušíte, kde je problém. Podobným postupem bychom totiž mohli konat práci pouze ochlazováním celé naší soustavy. Jelikož se nám ještě nepodařilo sestrojit žádné *perpetuum mobile*, věříme, že to nejde.

Jediným řešením je tedy $T = T_d = 3000\,\mathrm{K}$.

$\boxed{44.}$ Planeta obíhá kolem hvězdy po kruhové trajektorii, tedy na ni musí působit dostředivá síla $F_d = \frac{mv^2}{r}$, kde m je hmotnost planety. Je zřejmé, že planeta je k hvězdě gravitačně přitahována silou $F_g = G\frac{mM}{r^2}$. Kromě toho na ni naráží i proud částic z hvězdy, které ji odtlačují.

Hvězda září rovnoměrně do celého prostoru a intenzita záření[27] je tedy ve vzdálenosti R právě $\frac{P}{4\pi R^2}$. Průřez planety je πR^2, tedy za čas τ pohltí planeta energii $E = \frac{P\pi R^2\tau}{4\pi r^2}$. Energie jednoho fotonu je $E_0 = hf = \frac{h}{\lambda}$. Z toho vyjádříme hybnost jednoho fotonu jako $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_0}{c}$. Planeta absorbuje všechny fotony, její hybnost se tedy zvětší o hybnost dopadajících fotonů. Celková hybnost fotonů, které planeta pohltí za čas τ, je tedy $\frac{E}{c}$. Takže podle druhého Newtonova zákona $F = \frac{\Delta p}{\tau}$ na planetu působí síla $F = \frac{PR^2}{4cr^2}$.

Nyní již můžeme napsat rovnost sil v soustavě spojené s planetou

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} - \frac{PR^2}{4cr^2}$$

. Ještě zbývá vyjádřit oběžnou rychlost planety při periodě $v = \frac{2\pi r}{T}$. Drobnými úpravami dostaneme

$$\frac{4\pi^2 m}{T^2}r^3 = GmM - \frac{PR^2}{4c}\,,$$

odkud

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2 m}\left(GmM - \frac{PR^2}{4c}\right)}$$

. Na závěr ještě vyjádříme hmotnost planety přes poloměr a dostáváme

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{4\pi^2}\left(GM - \frac{3P}{16\pi c\varrho R}\right)}$$

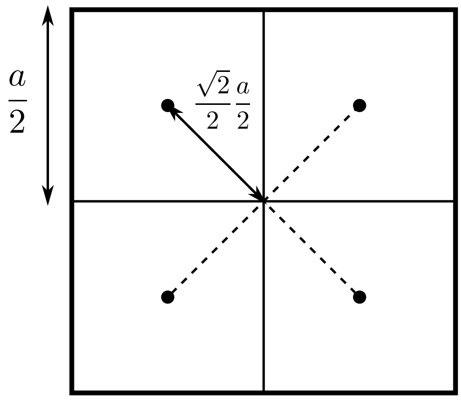
.

$\boxed{45.}$ Řešení úlohy si rozdělíme na dvě části. V obou částech ale využijeme stejný trik. Je to *škálování*!

Předtím, než se pustíme do výpočtu setrvačnosti Mišova čtverce, si vypočítáme moment setrvačnosti obyčejného čtverce $I(a)$ s hranou a a hmotností M okolo jeho středu. Zde využijeme škálování. Hned si ukážeme, co to je. Celý trik je založen na tom, že moment setrvačnosti čtverce se dá vyjádřit jako $I = kMa^2$, kde k je nějaká číselná konstanta. Na jiném parametru než a moment setrvačnosti nemůže záviset, jelikož je to jediný parametr, který charakterizuje čtverec.

[27] Výkon na jednotku plochy

Jak určíme moment setrvačnosti čtverce? Uvědomíme si, že jeden velký čtverec s hranou a jsou přeci čtyři menší čtverce s hranou $a/2$ a využijeme Steinerovu větu! My, ale také víme, že moment setrvačnosti $I(a/2)$ čtverce s hranou $a/2$ je 16-krát menší, než moment setrvačnosti I_a čtverce s hranou a. To proto, že když zmenšíme hranu na polovinu, plocha se zmenší na čtvrtinu a stejně tak i hmotnost. Navíc se i vzdálenost každých dvou bodů zmenší na polovinu, tedy i všech bodů od jeho středu. V momentu setrvačnosti ale vystupuje čtverec vzdálenosti elementů, takže nám to přinese další čtyřnásobné zmenšení. Po započítání obou efektů tedy víme, že moment setrvačnosti menšího čtverce je 16-krát menší.



Obr. 39: Škálování a Steinerova věta pro výpočet momentu setrvačnosti čtverce

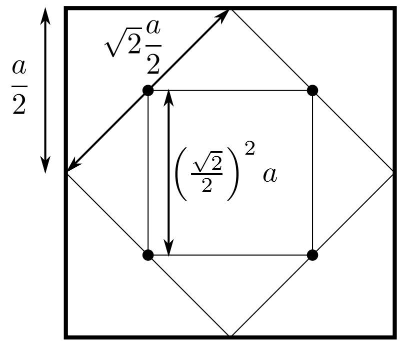
$$I(a) = 4I(a/2) + 4\,(M/4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I(a) = 4\frac{I(a)}{16} + 4\,(M/4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I(a) = \frac{I(a)}{4} + \frac{1}{8}Ma^2$$

$$I(a) = \frac{1}{6}Ma^2$$

Nyní se pustíme do výpočtu momentu setrvačnosti samotného Mišova čtverce, což je fraktál. Fraktály mají takovou pěknou vlastnost, že při libovolném zvětšení vypadají úplně stejně. To využijeme znovu ve stejném triku. Celý moment setrvačnosti Mišova čtverce $I_{\text{MŠ}}$ spočítáme jako moment setrvačnosti čtverce s hranou a, potom odpočítáme moment setrvačnosti čtverce s o něco menší stranou (výřez) a následně připočítáme moment setrvačnosti Mišova čtverce znovu s o něco menší stranou. Zbývá nám tedy už jen zjistit délky stran jednotlivých čtverců.



Obr. 40: Škálování v Mišově fraktálním čtverci

$$I_{\text{MŠ}}(a) = I_{\text{štvorec}}(a) - I_{\text{štvorec}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + I_{\text{MŠ}}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right)$$

$$I_{\text{MŠ}}(a) = I_{\text{štvorec}}(a) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 I_{\text{štvorec}}(a) + \frac{1}{16}I_{\text{MŠ}}(a)$$

$$I_{\text{MŠ}}(a) = \frac{4}{5}I_{\text{štvorec}}(a) = \frac{2}{15}Ma^2$$

$\boxed{46.}$ Začneme tím, že si povíme, jak vzniklo Oldovo pokažené kolo. Původně mělo kolo hmotnost M_0 a byla do něho vyrobena díra, čímž kolo přišlo o hmotnost m. Plošnou hustotu uvažujeme samozřejmě stejnou pro každou část kole, takže hledané hmotnosti dostaneme jednoduchým porovnání obsahů útvarů. $M_0 = M\frac{R^2}{R^2 - r^2} = \frac{9}{8}M$ a $m = M\frac{r^2}{R^2 - r^2} = \frac{1}{8}M$.

S těmito informacemi již dokážeme vypočítat polohu těžiště rozbitého kola. Samozřejmě se bude nacházet na ose symetrie, nás ale zajímá vzdálenost od středu. Dostáváme tedy

$$y = \frac{\frac{9}{8}M \cdot 0 + \frac{-1}{8}M \cdot \frac{2}{3}R}{\frac{9}{8}M - \frac{1}{8}M} = -\frac{R}{12}$$

Není třeba se bát toho znaménka. Hovoří pouze o tom, že těžiště je na opačné straně než díra, takže si označíme $t = -y = \frac{R}{12}$ jako vzdálenost těžiště a středu kola.

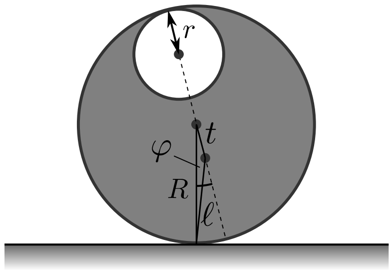
Nyní se již bez větších problémů vrhneme na pohyb kola. Při vychýlení o úhel φ vzroste potenciální energie kola o

$$E_p = Mgt(1 - \cos\varphi)$$

Kinetickou energii vyjádříme jako kinetickou energii otáčení okolo okamžité osy otáčení, ale ta se bude neustále měnit. Proto

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2,$$

kde I_A je moment setrvačnosti okolo aktuální osy otáčení. Těžiště bude od této osy vzdálené l, přičemž platí kosinová věta $l^2 = R^2 + t^2 - 2Rt\cos\varphi$.



Obr. 41: Geometrie kmitajícího Oldova kola

Obrázok

Jediná neznámá, která nám zůstala, je moment setrvačnosti Oldova kola kolem bodu otáčení. My si však nejprve vypočítáme moment setrvačnosti kolem těžiště. Využitím Steinerovy věty a faktu, že když sčítáme momenty setrvačnosti rozbitého kola a toho, co mu chybí, kolem středu, dostaneme moment setrvačnosti plného, nepokaženého kola. [28] Platí tedy

$$\frac{1}{2}\frac{9}{8}MR^2 = \left(I_T + Mt^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{8}Mr^2 + \frac{1}{8}M\left(\frac{2}{3}R\right)^2\right)$$

Tuto kouzelnou rovnici upravíme a dostaneme $I_T = \frac{71}{144}MR^2$. Opět použijeme Steinerovu větu a dostáváme pro moment setrvačnosti kolem bodu otáčení

$$I_A = I_T + Ml^2 = \frac{71}{144}MR^2 + M\left(R^2 + t^2 - 2Rt\cos\varphi\right)$$

Nás však zajímají malé kmity, tedy nejprve můžeme provést aproximaci $\cos\varphi \approx 1$ [29], čímž se nám zjednoduší moment setrvačnosti na $I_A = \frac{4}{3}MR^2$.

Ještě si vyjádříme celkovou energii kola, přičemž člen $(1 - \cos\varphi)$ v potenciální energii položíme roven prvnímu nenulovému členu z rozvoje. Teda

$$(1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2})$$

Pro celkovou energii tedy dostáváme

$$E = \frac{1}{2}Mg\frac{R}{12}\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}MR^2\omega^2 = kont.$$

[28] Moment setrvačnosti plného disku kolem středu je obecně $\frac{1}{2}mr^2$.

[29] Dostaneme ji z Taylorova rozvoje

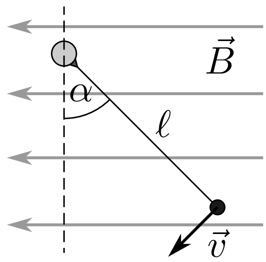
což není nic jiného, než energie harmonického oscilátoru s periodou, která je určená konstantami φ^2 a ω^2. Takže Oldovo rozbité kolo bude kmitat s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}MR^2}{Mg\frac{R}{12}}} = 8\pi\sqrt{R/g}$$

$\boxed{47.}$ Vodič po vychýlení začne kmitat jako houpačka. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se mezi konci vodiče naindukuje napětí, které je závislé na délce vodiče l, rychlosti pohybu vodiče $\mathbf{v}$ a magnetické indukci $\mathbf{B}$. Jeho velikost je:

$$U = lvB\sin\alpha\,,$$

kde úhel α je výchylka rámečku ze svislé polohy.[30] Kdy získáme největší hodnotu tohoto napětí? Jedno víme určitě, není to ani na začátku pohybu (kvůli nulové rychlosti), ani v nejnižší poloze (nulový sinus). Je to tedy někde mezi.



Obr. 42

Rychlost v a úhel α jsou vzájemně svázané zákonem zachování energie:

$$mgl\cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad \to \qquad v = \sqrt{2lg\cos\alpha}$$

Když uvedený výsledek dosadíme do vztahu pro napětí, dostáváme: $U = Bl\sqrt{2lg}\sqrt{\cos\alpha}\sin\alpha$. Chceme zjistit, při jakém úhlu α nabývá napětí U maxima. Derivujme:

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha} = Bl\sqrt{2lg}\left(\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \to \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,$$

čemuž odpovídá úhel $\alpha = 54.74°$. Maximální napětí U_{max} tedy získáme dosazením tohoto úhlu:

[30] Přesněji je to úhel mezi vektorem rychlosti $\mathbf{v}$ a vektorem magnetické indukce $\mathbf{B}$.

$$U_{max} = Bl\sqrt{2lg}\sqrt{\cos\alpha}\sin\alpha = Bl\sqrt{2lg}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\frac{16}{27}}\sqrt{gB^2l^3}$$