Zadania

1. Polik sa vybral na výlet z Bratislavy do 30 km vzdialeného Senca. Prvých 10 km išiel rýchlosťou 90 km/h. Druhých 10 km sa ale vliekol rýchlosťou 60 km/h. Ako rýchlo musí Polik prejsť posledných 10 km cesty, aby jeho priemerná rýchlosť bola 90 km/h?

2. Aký ťažký peračník musím hodiť do Miša, aby som mu energeticky vrátil to, že ma trafil nábojom zo vzduchovky s hmotnosťou 8 g a rýchlosťou 125 m/s? Hádzať peračníky viem rýchlosťou 3,5 m/s.

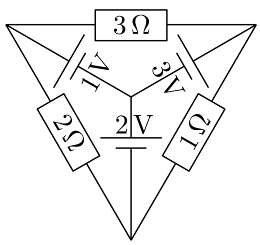
3. Teleso necháme z pokoja padať voľným pádom. Aká je jeho priemerná rýchlosť, ak padá čas t?

4. Malá Enka sa šmýka na šmykľavke dlhej 10 m so sklonom 30° voči horizontále a koeficientom dynamického trenia $f = \sqrt{3}/4$. Akou rýchlosťou vylietava zo šmykľavky?

5. FKSáci si povedali, že si vyzdobia svoju miestnosť rýchlo a jednoducho. Vzali papierove krúžky, rozstrihli ich na dve polovice a každú z nich zlepili do kužeľa. Aký vrcholový uhol bude zvierať takýto kužeľ?

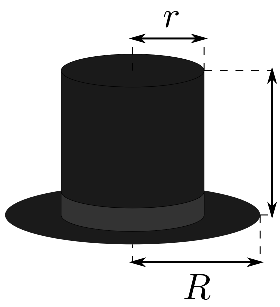
6. Andrej pomáhal doma presúvať kocky s hmotnosťou m a stranou dlhou a. Zistite, pre aký koeficient šmykového trenia f je výhodnejšie kocku dvakrát prevrátiť okolo jej hrany, než ju na rovnaké miesto posunúť. Neuvažujte rozdiel medzi statickým a dynamickým trením.

7. Staré logo Trojstenu je už síce na odpis, ale stále sa mu nechce ísť do starého železa. Preto urobilo zo seba elektrický obvod, viď obrázok. Aký prúd tečie vetvou, kde je zapojený odpor s hodnotou 2 Ω?



Obr. 1: Trojstenový obvod

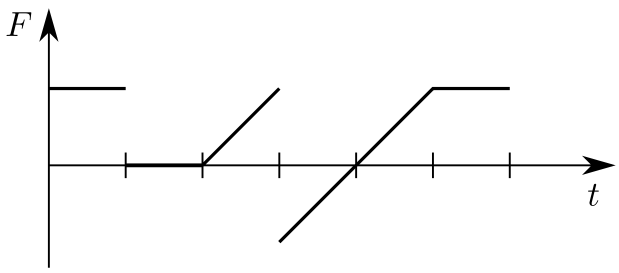
8. Jimmi je gentleman a vo voľnom čase nosí cylinder, pričom jeho výška je H, polomer valcovitej časti je r a polomer obvodu klobúka je R.



Obr. 2: Jimiho cylinder

Celý cylinder je z homogénnej látky. V akej výške od spodnej podstavy cylindra je jeho ťažisko?

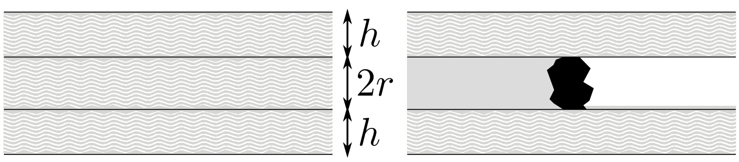
$\boxed{9.}$ Dušanovi sa pokazilo jeho naťahovacie autíčko. Sila motora, ktorý poháňa kolesá, už zrazu v čase nie je konštantná, ale mení sa podľa tohto grafu:



Obr. 3: Graf sily motora

Načrtnite graf, ktorý nám povie, akú veľkú drahú prešlo autíčko v závislosti od času, ak malo nulovú počiatočnú rýchlosť a dráhu sme merali z miesta, kde stálo na začiatku.

$\boxed{10.}$ Na Matfyze sa vrámci prerábky menilo vodovodné potrubie. To nové „experimentálne“ potrubie má na určitých miestach 2 vrstvy – voda môže tiecť stredom potrubia s polomerom r, ale aj v dutine s hrúbkou h, viď obrázok. Potrubie má však jednu chybu – stredná časť sa zvykne často upchávať. Aký je pomer rýchlosti vody v upchatom potrubí a v dokonale priechodnom potrubí, ak nimi musí prejsť rovnako veľa vody?



Obr. 4: Pozdĺžny prierez neupchatého a upchatého potrubia

$\boxed{11.}$ Tinka je strašná pipka a nevydrží bez svojich čačiek-mačiek. Najnovšie si objednala náhrdelník tvorený tenkým drôtom v tvare kružnice a do nej vpísaným rovnoramenným trojuholníkom (tvoria ho iba 3 drôtiky). V objednávkom liste bolo písané, že náhrdelník má ťažisko presne v strede kružnice. Aký uhol môžu zvierať ramená trojuholníka v náhrdelníku, ktorý si Tinka objednala? *Trojuholníky s nulovým obsahom neuvažujte.*

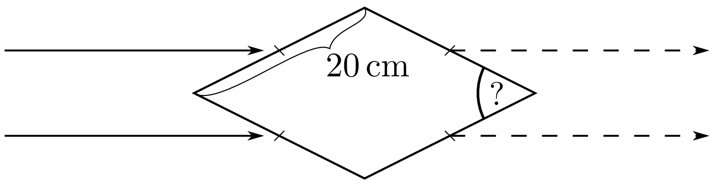
12. Marika si v akcii kúpila štyri rezistory s odpormi $1\,\Omega$, $2\,\Omega$, $2\,\Omega$ a $4\,\Omega$ a vo voľnom čase ich všelijako zapájala. Koľko rôznych celkových odporov mohla Marika vyrobiť, ak zapájala vždy všetky štyri rezistory tak, aby nimi tiekol prúd?

13. Obežná doba Merkúru okolo Slnka je T_1, obežná doba Venuše je T_2. S akou periódou t dochádza k maximálnemu vzájomnému priblíženiu týchto planét?

14. Andrej sa na rande nudil. Zobral preto svoj neohnuteľný občiansky a vodičský (každý s hmotnosťou m) a oprel ich o seba pod uhlom 2α. Zhora začal tlačiť, až zrazu zatlačil na karty silou F a ony sa zosypali. Aký je koeficient trenia medzi dokladmi a stolom, ak sú oba doklady z rovnakého materiálu?

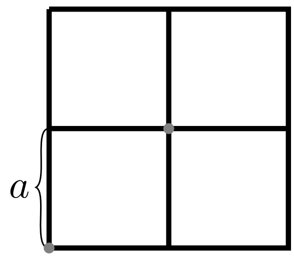
15. Na hranol s podstavou v tvare kosoštvorca so stranou dlhou 20 cm dopadajú rovnobežné lúče svetla, viď obrázok. Aký musí byť vrcholový uhol takejto spojky, ak chceme, aby sa lúče prechádzajúce stredmi strán preťali v kosoštvorci a vyšli z neho opačne, ako vošli? Index lomu materiálu, z ktorého je hranol vyrobený, je $\sqrt{3}$. Počas riešenia môžete využiť tieto goniometrické identity:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.$$



Obr. 5: Lúče prechádzajúce stredmi strán kosoštvorca

16. „VY ODPORNÉ OKNÁ! DO STARÉHO ŽELEZA S VAMI!“ A tak sa aj stalo. Čajka vzala do rúk sekeru a z rámu okien narobila nepotrebnú odporovú sieť. Aký je odpor medzi stredom a rohom takého okna, ak štvorcový rám má dĺžku $2a$ a dĺžkový odpor železa je λ?

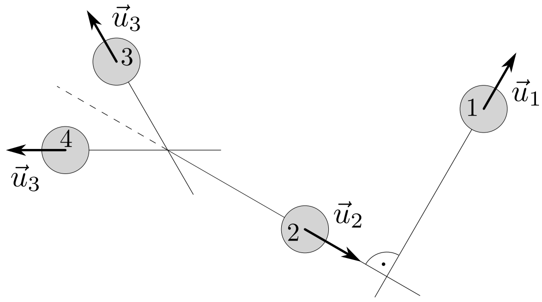


Obr. 6: Schéma okna

$\boxed{17.}$ Múdre knihy hovoria, že pľúca majú pri plnom nádychu objem asi 5ℓ a pri plnom výdychu len 1ℓ, a to najmä preto, že ľudské svaly sa nedokážu viac stiahnuť a kosti ohnúť. Tento fakt spôsobuje to, že sa pri potápaní bez výstroja dokážeme potopiť iba do obmedzených hĺbok. Vypočítajte, aká hĺbka je pre nás hraničná, ak nechceme, aby sa nám pľúca „prelomili". Uvažujte, že na hladine vody je atmosferický tlak 100 kPa.

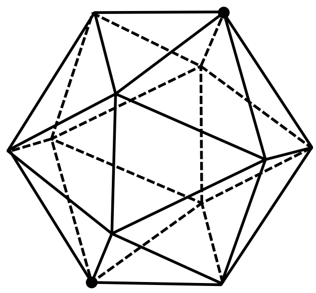
$\boxed{18.}$ Rotujúcu guľu položíme na drevenú podlahu s nezanedbateľným trením. Zistite, akú časť energie stratí rotujúca guľa počas doby, kým prešmykuje, ak vieme, že moment zotrvačnosti gule má hodnotu $I = 2mR^2/5$.

$\boxed{19.}$ Kaťa vyzvala Helboja na súboj v curlingu. Helboj mal už víťazstvo na dosah ruky, keď v tom Kaťa zázračne vyslala svoj kameň tak, že sa pozrážalo všetko, čo sa mohlo. Na obrázku vidíte ako vyzerala situácia po všetkých, dokonale pružných zrážkach. Katin kameň č.1 má rýchlosť $u_1 = 1\,\mathrm{m/s}$, kameň č.2 má rýchlosť $u_2 = \sqrt{3}/5\,\mathrm{m/s}$ a Helbojove kamene č.3 a 4 majú rýchlosť $u_3 = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$. Ako vyzeralo rozostavenie kameňov tesne po tom, čo Kaťa pustila svoj kameň č.1 z ruky, a akú mal rýchlosť?



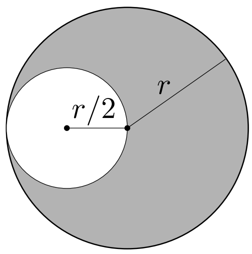
Obr. 7: Rozrazené kamene

$\boxed{20.}$ Vypočítajte odpor medzi protiľahlými vrcholmi pravidelného odporového dvadsaťstenu. Každá hrana má odpor R.



Obr. 8: Ikosaeder s vyznačenými protiľahlými vrcholmi

21. Dostali sme krásny homogénny disk s polomerom r, hmotnosťou M a momentom zotrvačnosti okolo osi prechádzajúcej stredom a kolmej na disk $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$. Červotoč nám doňho ale vysústružil dieru s polomerom $r/2$ (viď obrázok).

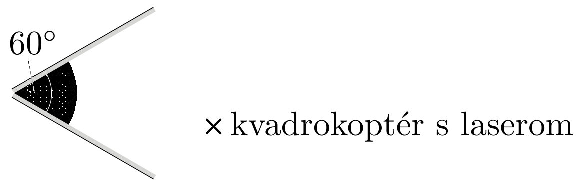


Obr. 9: Vyhryznutý disk

Teraz tento útvar váži m a jeho moment zotrvačnosti okolo pôvodného stredu disku je I. Aký je pomer I/mr^2 pre tento útvar?

22. Kaja si chcela ozvláštniť svoje akvárium na intráku, a preto na jeho dno upevnila nehmotnú tyč dĺžky $l = 20\,\mathrm{cm}$, na konci ktorej je gulička s hustotou $\rho_\mathrm{g} = 500\,\mathrm{kg/m^3}$ a hmotnosťou $m = 300\,\mathrm{g}$ tak, že sa v bode upevnenia mohla voľne otáčať. Kaja potom tyč vychýlila zo zvislej polohy o malý uhol a tá začala kmitať. Aká je perióda jej kmitov?

23. Maťo sa popri štúdiu na Cambridgei venuje aj stavaniu kvadrokoptér. Ich ovládanie si trénuje tak, že na ne pripevní laser a strieľa ním na terč v tvare šestinového výseku valca. Keď s tým začínal, uľahčoval si to tak, že pripevnil k terču dve rovinné zrkadlá. Nakreslite, kam všade môže Maťo mieriť, aby sa stále trafil do terča, pokiaľ sa nachádza na mieste, ktoré je vyznačené na obrázku.



Obr. 10: Terč, zrkadlá a kvadrokoptér

24. Tri planéty s hmotnosťou m a nábojom q rozmiestnime do vrcholov rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany a. Štvrtá planéta rovnakej hmotnosti sa nachádza v strede. Akým nábojom Q ju máme nabiť, ak chceme, aby planéty zotrvali v rovnovážnych polohách?

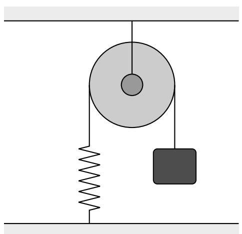
25. Detektorom SVANCI prelietava častica, ktorá nadobudla vďaka svojmu ultra-rýchlemu pohybu 3-násobok svojej pokojovej hmotnosti. O koľko ju môžu vedci z Patriklabs maximálne urýchliť, aby ju mohol ešte detekovať prístroj, ktorý je dlhý $L = 20\,\mathrm{m}$, pričom na to potrebuje aspoň $t = 30\,\mathrm{ns}$? Výsledok stačí uviesť v násobku rýchlosti svetla.

26. Paťo bol na exkurzii v CERNe. Tam sa dozvedel, že LHC je kruhový urýchľovač s dĺžkou 27 km a vie vyvinúť maximálnu energiu 7 TeV pripadajúcu na jednu časticu. Na základe týchto informácií dokázal spočítať, aké magnetické pole musí pôsobiť na obiehajúci protón v urýchľovači s pokojovou hmotnosťou $1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Akú hodnotu vypočítal?

27. Predstavte si nekonečný plochý 2D vesmír plný skla, v ktorom sa nachádza štvorec vzduchu. Presne v strede štvorca je uložený bodový zdroj svetla. Aká časť skleneného 2D sveta je osvetlená? Index lomu skla je $n = 1{,}5$.

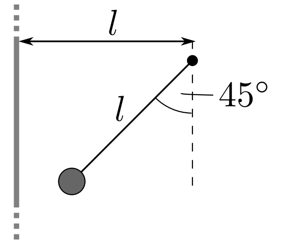
28. Do stredu doskového kondenzátora s kapacitou C umiestnime rovnobežne s elektródami tenkú vodivú dosku. Ako sa zmení kapacita kondenzátora? Všetky dosky majú plochu S a kondenzátor má hrúbku d. Okrajové efekty zanedbajte.

29. Vypočítajte periódu kmitov Vlejdovej hračky. Tá pozostáva z pružinky s tuhosťou k, kladky s polomerom r a momentom zotrvačnosti I a závažia s hmotnosťou m (viď obrázok).



Obr. 11: Vlejdovo kmitadielko

30. Na špagátiku dĺžky l visí v tiažovom poli kovová gulička s hmotnosťou m. Vo vzdialenosti l, viď obrázok, je nekonečná uzemnená vodivá platňa. Aký náboj Q musíme priviesť na guličku, aby zvierala so zvislým smerom uhol 45°?



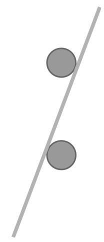
Obr. 12: Guľôčka a uzemnená rovina

31. Kubo si kúpil novú LEDku a chcel overiť jej parametre. Pripojil ju teda na časovo premenlivý zdroj napätia so sínusovým priebehom s efektívnou hodnotou $U_{\mathrm{ef}} = 230\,\mathrm{V}$ a frekvenciou $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Potrebné napätie na zažnutie podľa obalu LEDky je vraj $U_{\mathrm{ON}} = 180\,\mathrm{V}$ a na zhasnutie $U_{\mathrm{OFF}} = 60\,\mathrm{V}$. Aké dlhé sú časové úseky, kedy LEDka svieti?

32. Kocka so stranou a pláva v skúmavke tvaru valca s polomerom R naplnenej morskou vodou. My do nej trochu ťukneme a kocka začne kmitať vo vertikálnom smere. Pre aký pomer a/R je perióda kmitov polovičná, ako keby kocka kmitala ponorená v mori s nekonečnou hladinou?

33. Popri makrobiotickej diéte a aerobiku sa dal Vlejd aj na posilňovanie. Naposledy, keď si pridával závažia na činku, mu jedno padlo na nohu. Od samej zlosti vzal tyč od činky zanedbateľnej hrúbky a vrhol ju smerom k rebrinám. Na jeho prekvapenie tyč zostala držať zapretá medzi priečkami rebriny.

Zaujalo ho to natoľko, že chce vedieť, aká najkratšia tyč sa udrží zaseknutá na rebrine, ak je dĺžková hustota tyče $\lambda = 3{,}141592654\,\mathrm{kg/m}$, polomer priečok $r = 3\,\mathrm{cm}$, vzdialenosť ich stredov $d = 20\,\mathrm{cm}$ a koeficient trenia medzi priečkami a tyčou $f = 0{,}5$.



34. V letné dni býva u Čukčov teplota 27 °C. Avšak oni majú radi zimu a schladzujú si svoje príbytky až na teplotu 5 °C. Takéto schladzovanie vyžaduje odčerpávanie tepla výkonom 700 W. Aký minimálny príkon potrebujú *ideálne* čukčské klimatizácie?

35. Kubo už nechce žiť na tejto planéte, tak si postavil raketu. Akou najmenšou rýchlosťou musí vyštartovať, aby opustil Slnečnú sústavu?

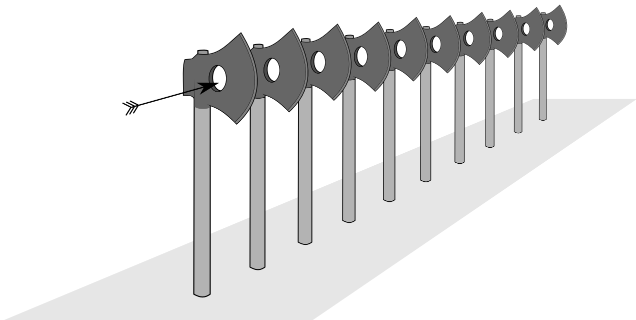
Hinty:

- Úniková rýchlosť z nehybnej osamotenej Zeme je $v_1 = 11{,}2\,\mathrm{km/s}$;
- Úniková rýchlosť z obežnej dráhy Zeme od Slnka je $v_2 = 42{,}1\,\mathrm{km/s}$;
- Zem je od Slnka vzdialená $D = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ a obieha rýchlosťou $v_{\mathrm{z}} = 29{,}8\,\mathrm{km/s}$;
- Rotáciu Zeme zanedbajte.

$\boxed{36.}$ Fest Kozmický Superprogram dosiahol nevídaný úspech. Objavil planétu Fíkappasigma ($\varphi\kappa\sigma$), na ktorej žije technicky vyspelý druh FtáKopySkov. Svoje laboratória majú ukryté hlboko v zemi a z povrchu planéty sa tam dopravujú voľným pádom vertikálnymi tunelmi. Ako dlho trvá FtáKopySkovi cesta do laboratória, ak má planéta polomer R, hustotu ρ a laboratórium je v hĺbke $R/2$?

$\boxed{37.}$ Kubova anténa pozostáva z dvoch bodových zdrojov žiariacich do všetkých horizontálnych smerov rovnako. Oba body žiaria s rovnakou intenzitou na vlnovej dĺžke $\lambda = 12\,\mathrm{cm}$. Sú od seba vzdialené $d = 1\,\mathrm{m}$ a ich fázový posun je tretina periódy. V koľkých horizontálnych smeroch žiari Kubova anténa maximálnou intenzitou?

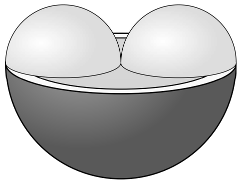
$\boxed{38.}$ Odyseus dokázal podľa povesti vystreliť šíp rýchlo a presne. Aby sa predviedol, zabodol do radu N sekier s rozostupmi l s dierami v rovnakej výške s malým priemerom d. Odyseus zaujal ideálne miesto a prestrelil všetky diery v sekerách šípom s nulovými rozmermi. Akú najmenšiu rýchlosť mohol dosiahnuť šíp v maximálnom bode svojej trajektórie?



Obr. 13: Rad sekier

$\boxed{39.}$ Na Havaji je známa špecialita - kokos plnený banánovou zmrzlinou. Keď si ho objednáte, prinesú vám polovicu kokosovej škrupiny s polomerom R naplnenú až po vrch zmrzlinou a naviac ďalšími dvoma kopčekmi s polomerom $R/2$ na vrchu. Nebol by to FKSák, ak by si do takého kokosu neťukol a nepozoroval malé kmity vo význačných smeroch symetrie.

Aký je pomer periód malých kmitov v týchto smeroch (menšia ku väčšej), ak sa ťažisko polgule nachádza $3R/8$ od jej plochej podstavy, moment zotrvačnosti polgule okolo ktorejkoľvek osi prechádzajúcej pozdĺž roviny rozrezania a pôvodným stredom gule je $2mr^2/5$ a hustota kokosu a zmrzliny je rovnaká.



Obr. 14: Zmrzlina

40. Vonku práve začalo mrznúť, teplota klesla až na $-10\,^\circ\mathrm{C}$ a Filip sa už nevie dočkať, kedy sa pôjde korčuľovať. Keď prišiel k jazeru, malo práve teplotu $0\,^\circ\mathrm{C}$, ale žiaden ľad na povrchu nebol. Koľko hodín musí Filip počkať, kým sa na jazere vytvorí bezpečná vrstva s hrúbkou $h_0 = 20\,\mathrm{cm}$? Skupenské teplo topenia ľadu je $L = 333{,}2\,\mathrm{kJ/kg}$, koeficient tepelnej vodivosti ľadu má hodnotu $\lambda = 2{,}2\,\mathrm{W/m.K}$ a jeho hustota je $\rho = 917\,\mathrm{kg/m^3}$. Predpokladajte, že voda v jazere počas zamŕzania udržuje svoju teplotu.

Vzorové riešenia

1. Skúsme si príklad čo najviac zjednodušiť. Vidíme, že prvú časť cesty Polik už išiel rýchlosťou 90 km/h. Stačí preto, aby Polik išiel priemerne touto rýchlosťou aj v druhom a treťom úseku cesty. Vypočítajme si čas t, za ktorý musí prejsť Polik druhý a tretí úsek, ak by ich prešiel rýchlosťou 90 km/h.

$$t = \frac{20\,\mathrm{km}}{90\,\mathrm{km/h}} = \frac{2}{9}\,\mathrm{h}\,.$$

Teraz si vypočítajme čas, ktorý trval Polikovi na to, aby prešiel len druhý úsek jeho cesty.

$$t' = \frac{10\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{h}\,.$$

Aby Polik splnil svoj plán, musí tretí úsek prejsť za čas $t - t'$, teda musí ísť rýchlosťou

$$v = \frac{10\,\mathrm{km}}{\frac{2}{9}\,\mathrm{h} - \frac{1}{6}\,\mathrm{h}} = 180\,\mathrm{km/h}\,.$$

Polik musí ísť tretí úsek rýchlosťou 180 km/h.

2. Na nájdenie potrebnej rýchlosti nám úplne stačí vzorec pre výpočet kinetickej energie. Hmotnosť aj rýchlosť vystreleného náboja poznáme, môžeme teda napísať

$$E = \frac{m_\mathrm{n} v_\mathrm{n}^2}{2} = \frac{0{,}008\,\mathrm{kg}\cdot(125\,\mathrm{m/s})^2}{2} = 62{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

Chceme, aby rovnakú kinetickú energiu mal aj hodený peračník, teda aby platilo

$$\frac{m_\mathrm{p} v_\mathrm{p}^2}{2} = 62{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

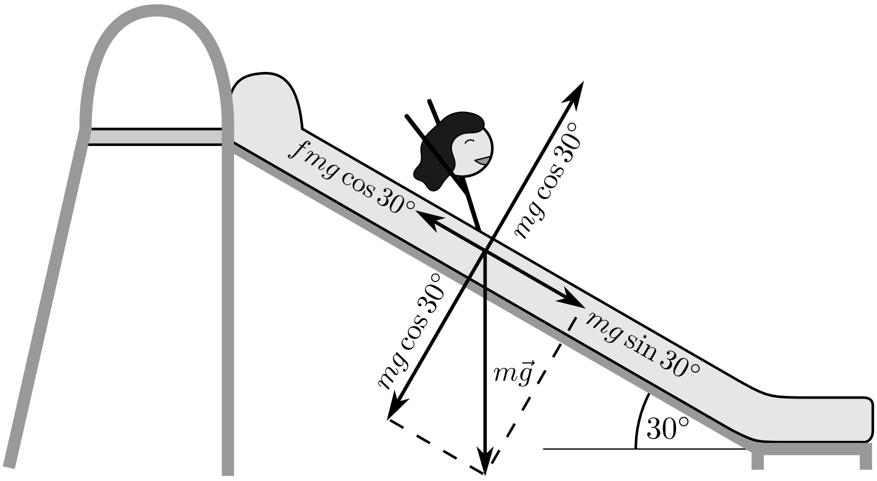
Z tejto rovnice už vieme vyjadriť hmotnosť:

$$m_\mathrm{p} = \frac{2\cdot 62{,}5\,\mathrm{J}}{v_\mathrm{p}^2} = \frac{2\cdot 62{,}5\,\mathrm{J}}{(3{,}5\,\mathrm{m/s})^2} = 10{,}2\,\mathrm{kg}\,.$$

3. Priemernú rýchlosť vypočítame z pomeru prejdenej dráhy a uplynutého času. Prejdená dráha je jednoducho $gt^2/2$, čas je t. Priemerná rýchlosť je

$$v_\mathrm{p} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{gt}{2}\,,$$

4. Na Enku pôsobia sily podľa obrázka.



Obr. 15: Rozložená tiažová sila, reakčná normálová sila šmykľavky, trecia sila

Na základe Newtonovho zákonu $F = ma$ máme rovnicu

$$mg\sin(30°) - fmg\cos(30°) = ma\,.$$

To po úprave dáva

$$a = g\left(\sin 30° - f\cos 30°\right)\,.$$

Využitím vzťahu $s = at^2/2$ dostávame čas

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}\,.$$

Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe pre rýchlosť v dosiahnutú po zrýchľovaní zrýchlením a počas doby t platí $v = at$. Enkina finálna rýchlosť je preto

$$v = at = \sqrt{2sa} = \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 10\sqrt{1-\frac{3}{4}}\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}\,.$$

Výsledok sa dal získať aj z tvrdenia, že počiatočná potenciálna Enkina energia sa premení na kinetickú energiu a prácu, ktorú vykoná trecia sila.

$\boxed{5.}$ Označme si polomer nášho polkruhu r. Tento polomer vytvorí polomer plášťa. Polovičný obvod kruhu $o = \pi r$ vytovrí obvod základne, odkiaľ si vieme určiť polomer základne $R = r/2$. Pre vrcholový uhol potom platí

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{r} = \frac{1}{2}\,.$$

Vrcholový uhol má potom veľkosť $\alpha = 60°$.

$\boxed{6.}$ Pri posúvaní vykonáme prácu $W_{\text{pos}} = (mgf)(2a)$. Pri prevracaní ju musíme dvakrát zdvihnúť na hranu, kedy jej ťažisko stúpne z výšky $a/2$ do výšky $\sqrt{2}a/2$. Pri zmenách potenciálnej energie vykonáme prácu

$$W_{\text{prev}} = 2mg\left(\frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2}\right) = mga\left(\sqrt{2} - 1\right) .$$

Z výsledkov hneď vidíme, že pre $f < (\sqrt{2} - 1)/2$ sa nám kocku oplatí posúvať, v opačnom prípade prevracať.

$\boxed{7.}$ 2. Kirchhoffov zákon nám hovorí, že ak v obvode nájdeme uzavretú slučku,[1] celkové napätie musí byť nulové. Vyberme si slučku, v ktorej je zapojený len $2\,\Omega$ rezistor a zdroje s napätím $1\,\text{V}$ a $2\,\text{V}$. Vidíme, že v tejto slučke je polarita zdrojov rovnaká a ich napätie sa sčíta. Z Kirchhoffovho zákonu teda aj napätie na rezistore musí byť rovné $1\,\text{V} + 2\,\text{V} = 3\,\text{V}$. Z Ohmovho zákona potom musí týmto rezistorom tiecť prúd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{3\,\text{V}}{2\,\Omega} = 1{,}5\,\text{A} .$$

Vetvou preteká prúd $1{,}5\,\text{A}$.

$\boxed{8.}$ Najprv si spočítajme hmotnosti jednotlivých častí cylindra, pričom uvažujme plošnú hustotu materiálu σ. Vrchná kruhová časť má hmotnosť $m_1 = \sigma\pi r^2$, valcovitý plášť má hmotnosť $m_2 = \sigma 2\pi r H$ a nakoniec spodná podstava v tvare medzikružia má hmotnosť $m_3 = \sigma\pi\left(R^2 - r^2\right)$. Vrchná časť má ťažisko vzdialené od spodnej podstavy H, valcovitý obal má ťažisko vzdialené od podstavy $H/2$ a spodná podstava ho má v nulovej vzdialenosti. Teraz máme všetky potrebné informácie, tak môžeme vypočítať výšku ťažiska celého cylindra ako vážený priemer jednotlivých ťažísk:

$$h = \frac{m_1 H + m_2 \dfrac{H}{2} + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{rH\,(r + H)}{R^2 + 2rH} .$$

$\boxed{9.}$ Sila motora nám hovorí presne o tom, aké je zrýchlenie auta v čase, pretože hmotnosť auta sa nemení a platí $a = F/m$.

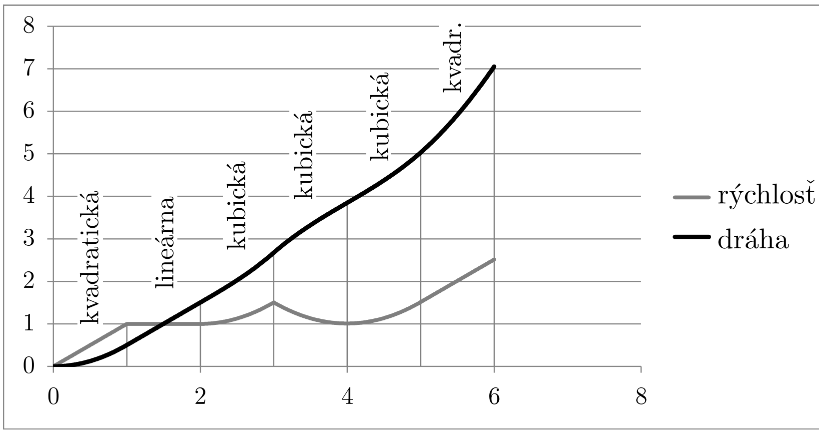
Najskôr sa zamyslime, ako vyzerá rýchlosť auta v čase. My poznáme zrýchlenie, čiže zmenu rýchlosti. Netreba sa zľaknúť toho, že zrýchlenie nie je konštantné. Správanie rýchlosti v čase si vieme odvodiť z tvaru zrýchlení, ktoré poznáme. Pri nulovom zrýchlení zostáva rýchlosť konštantná, pri konštantnom zrýchlení rastie rýchlosť lineárne, a analogicky pri lineárne rastúcom zrýchlení rastie rýchlosť kvadraticky. Tu si treba uvedomiť, že graf rýchlosti musí byť spojitý. Rýchlosť sa nemôže meniť skokovo, pretože to by znamenalo, že zrýchlenie je nekonečné.

Úplne analogicky budeme postupovať pri tvorbe grafu prejdenej dráhy v čase z grafu rýchlosti. Okrem toho, že keď sa bude meniť rýchlosť kvadraticky, tak dráha sa bude meniť kubicky si treba dať pozor na dve ďalšie veci.

[1] Uzavretú slučku nájdeme tak, že prstom sa v obvode dostaneme z bodu A naspäť do bodu A.

Prvá z nich je, že ak nám popisuje rýchlosť funkcia súčtu konštantnej a lineárnej/kvadratickej funkcie, tak dráhu bude popisovať funkcia súčtu lieárnej a kvadratickej/kubickej funkcie. To, čo sme práve povedali, nie je nič iné ako to, že pohyb si môžeme rozložiť do viacerých jednoduchých pohybov, ktorých rýchlosť vieme matematicky popísať, vypočítame dráhu a opäť to zložíme. To isté robíme napríklad pri výpočte výšky telesa pri šikmom vrhu.

Druhá vec je, že graf bude bez ostrých zlomov, čiže prejdenú dráhu bude popisovať hladká funkcia. Hladká funkcia je taká funkcia, ktorej sklon sa mení spojito. Sklon grafu dráhy od času je aktuálna rýchlosť, a tá, ako sme si pred chvíľou povedali, sa mení spojito. Takže takýto graf musí byť hladký. S týmito poznatkami už jednoducho dostaneme výsledný graf.



Obr. 16: Graf závislosti rýchlosti a dráhy od času

$\boxed{10.}$ Budeme vychádzať z rovnice kontinuity, podľa ktorej platí

$$\frac{v_\mathrm{u}}{v_\mathrm{n}} = \frac{S_\mathrm{n}}{S_\mathrm{u}}\,.$$

Index u označuje upchaté potrubie, index n zasa neupchaté. Po dosadení za pomer prierezov získame hľadaný pomer rýchlostí.

$$\frac{v_\mathrm{u}}{v_\mathrm{n}} = \frac{\pi\,(r+h)^2}{\pi\left[(r+h)^2 - r^2\right]} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{r}{r+h}\right)^2}\,.$$

$\boxed{11.}$ Kružnicová časť náhrdelníka má ťažisko presne v strede, takže na to, aby bola splnená podmienka zo zadania, musí mať aj samotný trojuholník ťažisko v strede kružnice. Uvažujme, že rovnoramenný trojuholník má uhol oproti základni veľkosti 2α, ramená dĺžky $a = 2R\cos\alpha$ a základňu dĺžky $b = 4R\sin\alpha\cos\alpha$, pričom R je polomer kružnice.

Pre prípad $\cos\alpha = 0$ dostávame patologický prípad zo zadania, ktorý neuvažujeme.

Vráťme sa však k normálnym riešeniam. Takýto Tinkin náhrdelník má osovú symetriu, takže ťažisko sa určite nachádza na tejto osi a musí byť vzdialené od vrcholu oproti základni o R. Stačí teda všeobecne vyjadriť polohu ťažiska a pozrieť sa, kedy bude v spomínanej vzdialenosti:

$$r_{\mathrm{T}} = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha + 4R^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha}{2R \cos \alpha + 2R \sin \alpha \cos \alpha} = R\,.$$

Po úpravách tejto rovnice dostaneme

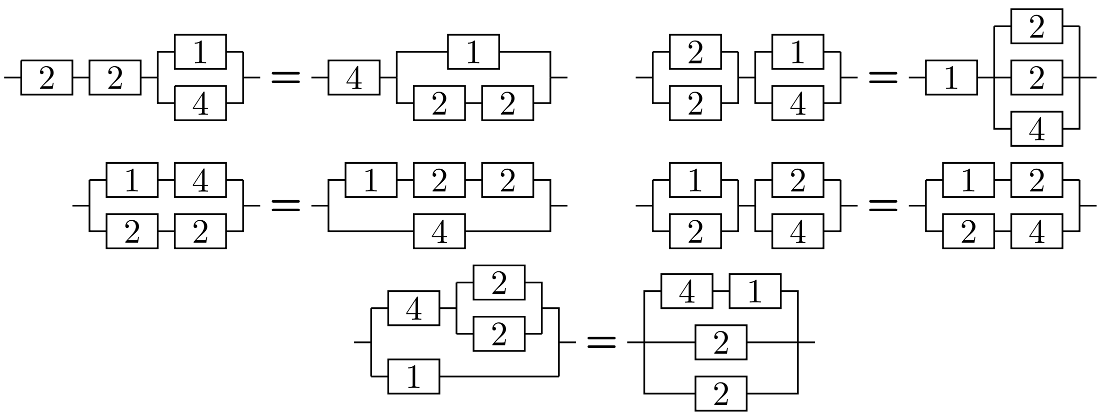
$$2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha \left(1 + \sin \alpha\right)\,.$$

Nenulové riešenie rovnice získame použitím identity $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ a vyriešením kvadratickej rovnice $2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$ na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dostaneme riešenie $2\alpha = \pi/3$, teda 60°.

$\boxed{12.}$ Najistejší postup spočíva v overení všetkých kombinácií (nie je ich tak veľa). Štyri rezistory vieme zapojiť dokopy 10 rôznymi spôsobmi:

(i) Všetky štyri rezistory v sérii,
(ii) dva rezistory paralelne, za nimi dva sériovo,
(iii) tri paralelne, jeden sériovo,
(iv) jeden a dva paralelne, jeden sériovo,
(v) jeden a dva parelelné zapojené sériovo, jeden k nim paralelne,
(vi) dva a dva paralelne a dokopy sériovo,
(vii) dva a dva sériovo a dokopy paralelne,
(viii) jeden a tri paralelne,
(ix) jeden, jeden a dva paralelne
(x) všetky štyri paralelne.

Teraz dosádzajme za rezistory konkrétne hodnoty Marikiných rezistorov. V prvom prípade je len jedna možnosť zapojenia. V druhom prípade máme na výber 4 možnosti paralelnej časti. V tretej možnosti sú to 3 možnosti pre paralelnú časť, v štvrtom a piatom prípade je tých možností až 7. V šiestom a siedmom prípade máme len 2 možnosti, v ôsmom prípade sú to 3 možnosti, v deviatom 4 a konečne v desiatom je to znova len jedna možnosť. Ak vypočítame jednotlivé celkové odpory zapojení, zisťujeme, že nájdeme 5 dvojíc zapojení s rovnakým celkovým odporom, viď obrázok.



Obr. 17: Zapojenia s rovnakým odporom

Všetky možnosti odporov, ktoré mohla Marika vyrobiť je tak

$$1 + 4 + 3 + 7 + 7 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 - 5 = 29\,.$$

Marika mohla teda namerať 29 rôznych odporov.

$\boxed{13.}$ Keďže poznáme periódu obehu, vieme si veľmi ľahko vypočítať uhlovú rýchlosť pohybov oboch planét. Uhlovú rýchlosť Merkúra označme ω_1 a Venuše ω_2. Uvažujme teraz, že v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ sú obidve planéty pri sebe najbližšie. Tento počiatočný uhol si označme ako $\varphi_0 = 0\,\mathrm{rad}$. Keď budú pri sebe opäť najbližšie, obe planéty opíšu rovnaký uhol od uhlu φ_0. Avšak jedna z planét opíše ešte jeden okruh (2π) navyše. Z tretieho Keplerovho zákona vyplýva $T_1 < T_2$, pretože Merkúr obieha okolo Slnka bližšie ako Venuša. To znamená tiež, že $\omega_1 > \omega_2$. Takže Merkúr musel opísať za čas t uhol o 2π väčší ako Venuša:

$$\omega_1 t = \omega_2 t + 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}\,.$$

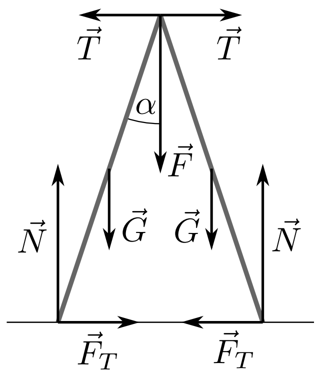
Nakoniec stačí dosadiť vzťah $\omega = 2\pi/T$, čím dostávame výsledný vzťah

$$t = \frac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{T_1} - \dfrac{2\pi}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\,.$$

$\boxed{14.}$ Ide o statickú situáciu, máme preto tri podmienky pre občiansky (úplne rovnaké by sme dostali aj pre vodičský, nakoľko sú rovnaké). Rovnováhu síl v horizontálnom smere, vertikálnom smere a rovnováhu momentov síl vzhľadom napríklad k bodu dotyku karty s podložkou.[2]

Pozrime sa najskôr na rovnováhu síl.

[2] Ronvako by sme si mohli vybrať ľubovoľný iný bod. Skúste si to!



Obr. 18: Sily pôsobiace na doklady

Vo vertikálnom smere máme

$$N = \frac{F}{2} + mg\,.$$

V horizontálnom smere $T = F_\mathrm{t} = Nf$, čo po dosadení z predošlej rovnice za N dáva

$$T = f\left(\frac{F}{2} + mg\right)\,.$$

Napíšme ďalej podmienku pre momenty.

$$mg\frac{a}{2}\sin\alpha + \frac{F}{2}a\sin\alpha = Ta\cos\alpha\,.$$

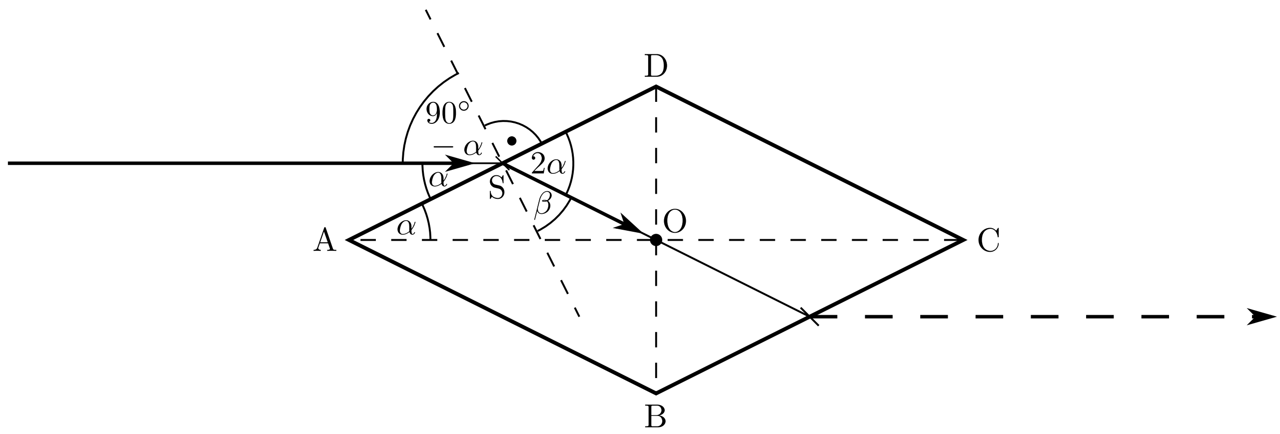
Po dosadení za T z podmienky rovnováhy v horizontálnom smere dostávame

$$mg\frac{a}{2}\sin\alpha + \frac{F}{2}a\sin\alpha = fa\left(\frac{F}{2} + mg\right)\cos\alpha\,.$$

Po chvíli upravovania odtiaľ vieme vyjadriť hľadaný koeficient f:

$$f = \frac{\tan\alpha}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{F}{G} + 1}} = \tan\alpha\frac{F+G}{F+2G}\,.$$

$\boxed{15.}$ Ak majú podľa zadania lúče vyjsť z hranola rovnakým spôsobom, ako doň vošli, tak práve nastala úplná symetria a lúče sa tým pádom musia sfokusovať presne v strede kosoštvorca. Označme si vrcholy kosoštvorca ako $ABCD$, jeho stred ako O, stred strany AD ako S a uhol $\measuredangle OAD$ ako α, viď obrázok 19.



Obr. 19: Lámanie lúču

Keď sa poriadne pozrieme na trajektóriu horného lúča, tak vidíme, že najskôr dopadol rovnobežne s priamkou AO do bodu S, kde sa zlomil a následne pokračoval do bodu O. Zo Snellovho zákona vieme okamžite napísať, že

$$n = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,,$$

kde β je uhol, pod ktorým sa lúč láme voči kolmici na úsečku AD.

Z vlastností pravouhlých trojuholníkov vieme, že trojuholníky AOS a ODS sú rovnoramenné, takže $\measuredangle SAO = \measuredangle AOS = \alpha$ a $\measuredangle OSD = 2\alpha$. Tým pádom vieme povedať, že $\beta = 90° - 2\alpha$, čo môžeme priamo dosadiť do už napísaného Snellovho zákona:

$$n = \frac{\cos\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos(2\alpha)}\,.$$

Teraz ostáva už len určiť hodnotu uhla α. Využime goniometrickú identitu pre $\cos(2\alpha)$ zo zadania a upravujme horný vzťah (využijeme tiež $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$):

$$\begin{aligned} n\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) &= \cos\alpha\,, \\ n\left(2\cos^2\alpha - 1\right) &= \cos\alpha\,, \\ 2n\cos^2\alpha - \cos\alpha - n &= 0\,. \end{aligned}$$

Táto kvadratická rovnica má dve riešenia:

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8n^2 + 1}}{4n}\,,$$

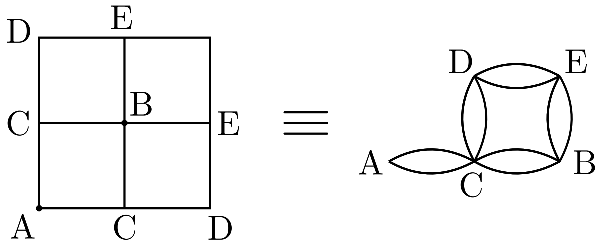
pričom nás zaujíma iba to zo znamienkom plus, pretože požadujeme, aby platilo $\alpha \in (0°, 90°)$. Po dosadení indexu lomu $n = \sqrt{3}$ zo zadania dostávame pre kosínus hľadaného uhla:

$$\cos\alpha = \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \sqrt{3}^2 + 1}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30°\,.$$

Hľadaný uhol kosoštvorca je teda $|\measuredangle DAB| = 2\alpha = 60°$.

16. Využijeme, že zapojenie je symetrické podľa uhlopriečky medzi ľavým dolným a pravým horným bodom. Ak by sme k stredu a rohu okna pripojili zdroj napätia, prúd (a aj napätie) by boli symetrické podľa tejto osi. Ak sa pozrieme na ľavý horný a pravý dolný roh okna, napätie na nich bude (napríklad voči stredu) zo spomínanej symetrie rovnaké. To ale znamená, že napätie medzi týmito bodmi bude nulové. Ak by sme ich dokonale vodivo spojili, vodičom bude pretekať nulový prúd a teda fyzikálne prejavy zapojenia sa nezmenia. Ak sú dva body vodivo spojené, v schéme ich môžeme zlúčiť do jedného bodu.

Rovnako vieme postupovať aj pri dvojiciach bodov, ktoré sú v stredoch strán okna – tiež ich vieme zlúčiť do jedného bodu. Naviac si môžeme všimnúť, že pravým horným rohom netečie žiaden prúd. S týmito poznatkami nie je ťažké schému prekresliť do krajšieho tvaru:



Obr. 20: Ekvivalentné prekreslenie okna

Každá čiara v schéme má odpor $a\lambda$. Každá paralelne zapojená dvojica má teda odpor $a\lambda/2$. Potom je odpor paralelnej časti obvodu

$$\frac{\frac{3}{2}a\lambda \cdot \frac{1}{2}a\lambda}{\frac{3}{2}a\lambda + \frac{1}{2}a\lambda} = \frac{3}{8}a\lambda\,.$$

Po pripočítaní sériovo zapojeného odporu $a\lambda/2$ zisťujeme, že odpor Čajkinho okna je $7a\lambda/8$.

17. Budeme predpokladať, že tlak vody, ktorý tlačí na pľúca z vonka je rovnaký ako tlak v pľúcach. Nakoľko teplota vody sa s hĺbkou mení zanedbateľne oproti zmenám tlaku, budeme ju považovať za konštantnú. Zo stavovej rovnice $pV = Nk_\mathrm{B}T$, kde p je tlak, V objem vzduchu, N počet častíc, T teplota v kelvinoch a k_B Boltzmanova konštanta môžeme usúdiť, že ak sa objem pľúc zmenší 5-krát, tlak v nich vzrastie tiež 5-krát.

Hraničná hĺbka pre ponáranie je teda taká, v ktorej bude tlak 5-krát väčší ako tlak na hladine. Tlak v hľadanej hĺbke h je teda

$$p = 5p_\mathrm{a} = \rho g h + p_\mathrm{a}\,,$$

kde ρ je hustota vody, g gravitačné zrýchlenie a h hĺbka. Po jej vyjadrení a dosadení zadaných hodnôt dostávame, že medzná hĺbka je $h = 40\,\mathrm{m}$.

18. Počiatočná energia gule je

$$E_0 = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{5} mR^2\omega_0^2 \,.$$

Na mieste styku s podložkou pôsobí trecia sila. Jej veľkosť označme F. Táto sila spôsobuje zrýchlenie ťažiska $a = F/m$ a uhlové spomalenie veľkosti

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{FR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2R} a \,.$$

Guľa prestane prešmykovať vtedy, keď sa jej obvodová rýchlosť vyrovná rýchlosti jej ťažiska, preto musí platiť $(\omega_0 - \varepsilon t)R = at$. Po dosadení za ε dostávame

$$t = \frac{2}{7} \frac{R\omega_0}{a} \,,$$

z čoho plynie výsledná rýchlosť

$$v_\mathrm{f} = at = \frac{2}{7} R\omega_0 \,, \qquad \omega_\mathrm{f} = \frac{v_\mathrm{f}}{R} \,.$$

Celková energia po skončení prešmykovania bude

$$E_\mathrm{f} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{f}^2 + \frac{1}{2} I\omega_\mathrm{f}^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega_\mathrm{f}^2 + \frac{1}{5} mR^2\omega_\mathrm{f}^2 = \frac{7}{10} mR^2 \frac{4}{49}\omega_0^2 = \frac{2}{35} mR^2\omega_0^2 = \frac{2}{7} E_0 \,.$$

Hľadaná časť energie je

$$k = \frac{E_0 - E_\mathrm{f}}{E_0} = \frac{5}{7} \,.$$

19. Analyzujme situáciu pekne postupne. Na začiatku sa hýbal iba jeden kameň, čo nám zjavne uľahčuje situáciu. Zrážky sú dokonale pružné, čiže sa musí zachovávať hybnosť aj energia. Vyzbrojení týmito poznatkami budeme analyzovať zrážky pekne od konca.

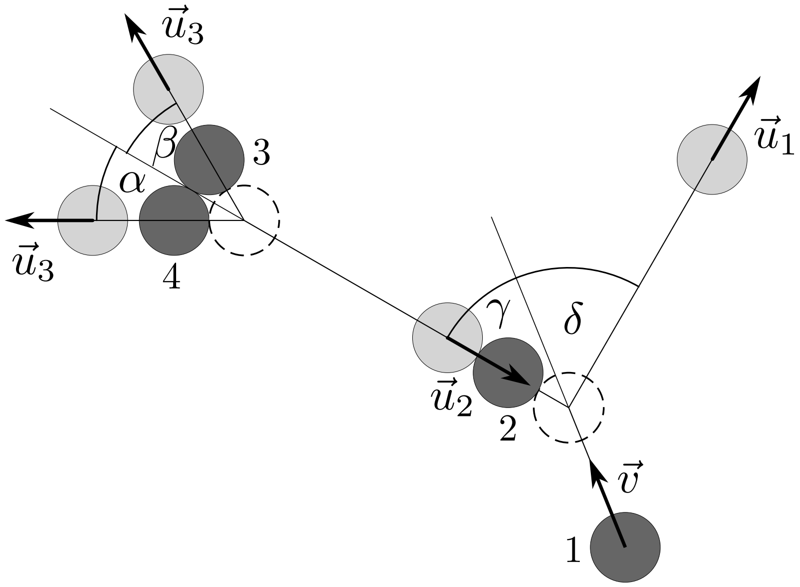
Oba Helbojove kamene majú rovnakú veľkosť rýchlosti a vychádzajú z jedného miesta, rovnako ako Katin kameň č.2. To naznačuje, že sa v tom mieste zrazili všetky 3 kamene. Naviac z obrázku možno vidieť, že Helbojove kamene idú od spoločného bodu pod rovnakým uhlom. Keďže Katin kameň č.2 leží na osi symetrie, tak sa určite vracia na miesto, z ktorého prišiel, rýchloťou w, ktorú mal po zrážke s kameňom č.1 a pred zrážkou s Helbojovými kameňmi. Zapíšme teda pre ne rovnice vyjadrujúce zákony zachovania.

$$\begin{aligned} 0 &= -mu_3 \sin\alpha + mu_3 \sin\beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta \,, \\ mw &= mu_3 \cos\alpha + mu_3 \cos\beta - mu_2 \,, \\ \frac{1}{2} mw^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} mu_3^2 + \frac{1}{2} mu_2^2 \,. \end{aligned}$$

Z rovníc zistíme, že $w = \sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$ a $\alpha = \pi/6$. Teraz nám zostáva iba zistiť, pod akým uhlom a akou rýchlosťou sa zrazili Katine kamene. Opäť prídu k slovu rovnice zákonov zachovania, pričom rýchlosť narážajúceho kameňa je teraz v.

$$\begin{aligned} 0 &= -mw\sin\gamma + mu_1\sin\delta\,, \\ mv &= mw\cos\gamma + mu_1\cos\delta\,, \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}mu_1^2\,, \\ \gamma + \delta &= \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Opäť vyriešime a dostaneme $v = 2\,\mathrm{m/s}$ a $\gamma = \pi/6$, takže Katine kamene sa zrazili pod uhlom $5\pi/6$. A nakoniec sa pozrime na výsledný obrázok rozostavenia kamňov pred zrážkou.



Obr. 21: Kamene pred zrážkou (tmavé), po zrážke (svetlé) a počas zrážky (čiarkované)

$\boxed{20.}$ Označme protiľahlé vrcholy A a B. Vďaka symetrii vieme, že ak niektoré vrcholy vodivo spojíme, tak medzi nimi aj tak žiadny prúd tiecť nebude a nič sa nezmení. Takto môžeme pospájať päticu vrcholov susediacich s A. Po vodivom spojení ich môžeme v schéme nahradiť jediným vrcholom A' a odpory vedúce z A' naspäť do A' neuvažovať. To isté vieme spraviť aj so susedmi B a dostaneme B'. Nová schéma bude nasledovná: z A ide do A' 5 paralelných odporov, z A' do B' 10 odporov a z B' do B 5 odporov. Čiastkové odpory týchto pararelných zapojení sú $R/5$, $R/10$ a $R/5$, čo v sériovom zapojení dáva výsledok

$$R_{20} = \frac{2+1+2}{10}R = \frac{R}{2}\,.$$

21. Vyjadrime si najprv pomer hmotností nového útvaru a pôvodného disku.

$$\frac{m}{M} = \frac{M - \frac{\pi \frac{r^2}{4}}{\pi r^2} M}{M} = \frac{3}{4}\,.$$

Tu sme využili to, že pomer hmotností diskov je rovný pomeru ich obsahov. Naviac si všimnime, že časť vyžraná červotočom mala hmotnosť $M/4$. Keď to vieme, je pomerne jednoduché si vyjadriť moment zotrvačnosti nového útvaru. Na moment zotrvačnosti pôvodného disku I_0 sa môžeme pozerať ako na súčet momentu I a momentu vyžratej časti. Vyžratá časť, to je vlastne disk s hmotnosťou $M/4$ a polomerom $r/2$, takže moment zotrvačnosti okolo jeho stredu je

$$I_{\text{diera}} = \frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2\,.$$

Tento disk sa ale neotáča okolo osi, ktorá prechádza jeho ťažiskom, ale okolo osi, ktorá je posunutá o $r/2$. Tým sa zmení moment zotrvačnosti podľa Steinerovej vety o

$$\Delta I_{\text{diera}} = \frac{M}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2\,.$$

Takže moment zotrvačnosti I_0 vieme vyjadriť aj ako súčet

$$I_0 = I + I_{\text{diera}} + \Delta I_{\text{diera}}\,.$$

Úpravou a dosadením nakoniec dostaneme

$$I = I_0 - \left(\frac{1}{2}\frac{M}{4}\frac{r^2}{4} + \frac{M}{4}\frac{r^2}{4}\right) = \frac{13}{32}Mr^2 = \frac{13}{24}mr^2\,.$$

Teraz už jednoducho vidíme, že hľadaný pomer je 13/24.

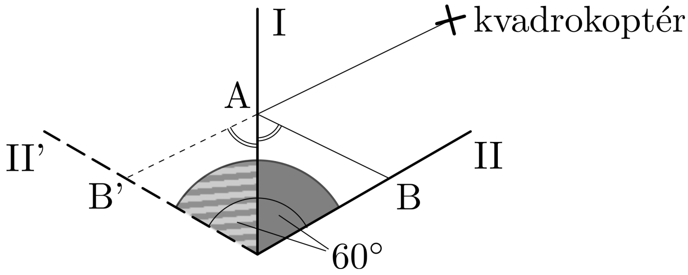
22. Na úvod si všimnime, že ak by sme otočili akvárium hore nohami, Kajina tyč by vyzerala presne ako kyvadlo. Otázka znie, či sa bude tak aj kývať. Na bežné kyvadlo pôsobí tiažová sila kolmo nadol a ťahová sila tyčky (šnúrky). Na Kajine kyvadlo však ešte pôsobí aj vztlaková sila, ktorá pôsobí počas celého pohybu v presne opačnom smere ako tiažová sila. Perióda bežného kyvadla závisí od veľkosti tiažového zrýchlenia g. V akváriu bude toto zrýchlenie zmenené na hodnotu

$$g^* = \frac{F_{\text{vz}} - F_g}{m} = \frac{mg\left(\frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\rho_{\mathrm{g}}} - 1\right)}{m} = g\left(\frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\rho_{\mathrm{g}}} - 1\right)\,.$$

Perióda kyvadla bude potom zhodou okolností pri daných konštantách rovnaká ako mimo akvária:

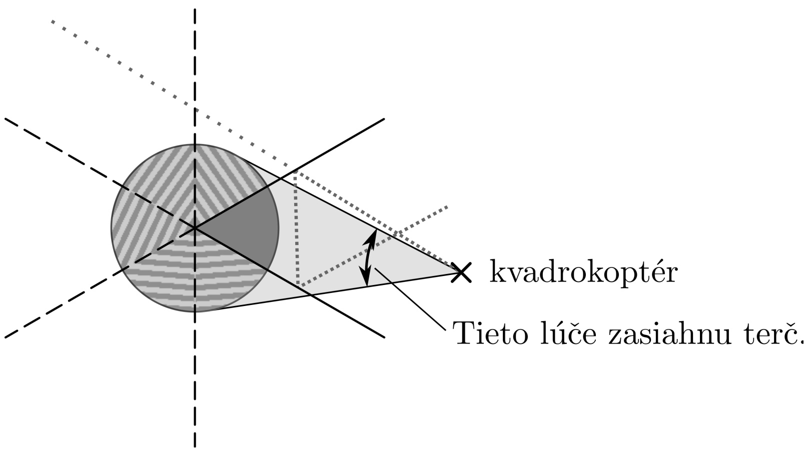
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(\frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\rho_{\mathrm{g}}} - 1\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

23. Pri riešení tohoto príkladu využijeme myšlienku, že keď sa lúč odráža od zrkadla, môžeme si jeho ďalšiu dráhu predstaviť vo virtuálnom priestore za zrkadlom. Priestor za zrkadlom je symetrický podľa zrkadla reálnemu priestoru. Dráhu lúča medzi bodmi A a B môžeme preto znázorniť ako na obrázku 22. Podľa zrkadla sme do virtuálneho priestoru zobrazili aj terč a druhé zrkadlo.



Obr. 22: Odraz lúču od zrkadla a zrkadlenie terča

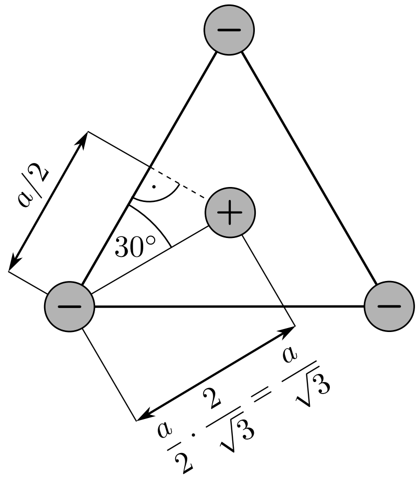
Kedy lúč trafí terč v reálnom priestore? Práve vtedy, keď ho trafí aj vo virtuálnom priestore. Pozrime sa najskôr na lúče, ktorými Maťo trafí terč priamo (bez odrazu), alebo po jednom odraze. Nakoľko zmenšovaním uhla α typ lúča s jedným odrazom plynule prejde na priamy lúč, Maťo môže mieriť presne do oblasti vyznačenej na obrázku 23.



Obr. 23: Celý virtuálny priestor, lúče ktoré zasiahnu terč a lúč, ktorý nezasiahne terč (bodkovaný)

Nemôže Maťo trafiť terč lúčmi po viacerých odrazoch? Nie. Rozmyslite si ale, ako by sa výsledok zmenil, ak by sme nepoužili šestinový výsek. Môžeme sa o tom presvedčiť zopakovaním úvahy z predošlých odstavcov. Lúč by sa v bode B′ mal odraziť od zrkadla II′. Môžeme ho však nechať pokračovať rovno do ďalšieho virtuálneho priestoru, podobne ako pred tým a analogicky odzrkadliť aj terč. Na obrázku 23 však vidíme, že lúč z bodu B′ už pokračuje smerom od terča a teda ho nikdy netrafí. Tento postup vieme zopakovať pre všetky body nachádzajúce sa na zrkadle II′ a neležiace na terči.

$\boxed{24.}$ V statickom prípade sa nesmie hýbať žiadna z planét. Všimnime si, že stredná planéta sa nehýbe bez ohľadu na veľkosť nábojov. Všetky tri planéty v rohoch trojuholníka sú totiž rovnaké, čo do náboja, hmotnosti aj vzdialenosti od strednej planéty. Tá si preto nemá podľa čoho vybrať, ku ktorej by sa rozbehla a teda musí ostať stáť v strede.



Obr. 24: Sústava nabitých planét

Čo sa týka ostatných planét, stačí si vybrať jednu z nich, a ak zabezbečíme, aby bola ona v pokoji, zo symetrie budú na tom rovnako aj ostatné. Výsledná sila pôsobiaca na planétu musí byť nulová. V smere kolmom na ťažnicu trojuholníka to bude splnené opäť zo symetrie. V smere ťažnice musí byť byť splnená podmienka rovnováhy

$$\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2G\frac{m^2}{a^2}\cos\frac{\pi}{6} + G\frac{m^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

čo po úprave dáva hľadanú podmienku

$$Q = \frac{4(3+\sqrt{3})}{3}G\pi\varepsilon_0\frac{m^2}{q} - \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{25.}$ Vďaka informácii, že častica vďaka svojmu relativistickému pohybu nadobudla až 3-násobok svojej pokojovej hmotnosti, vieme túto rýchlosť vyjadriť zo vzťahu:

$$3m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Po malej úprave dostávame rýchlosť častice

$$v = \sqrt{\frac{8}{9}}\, c\,.$$

Detektor však stihne analyzovať iba častice s rýchlosťou menšou ako $v_\mathrm{m} = L/t \approx 2{,}2\,c$. Teraz príde chvíľka zamyslenia. Dokážeme urýchliť časticu na takú rýchlosť? Samozrejme, že nie! Rýchlosť svetla sa nedá prekonať. Takže časticu môžeme urýchlovať akokoľvek chceme, dodaná energia sa bude prejavovať najmä na zmene hmotnosti a teda detektor ju zdetekuje vždy.

$\boxed{26.}$ Označme si dĺžku urýchľovača l, energiu protónu E, pokojovú hmotnosť protónu m_0 a polomer trajektórie protónu $r = l/2\pi$. Relativistickú hmotnosť protónu môžeme vyjadriť ako

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Aby sa protón pohyboval po kružnici s polomerom r, musí byť magnetické pole také silné, aby dokázalo vytvoriť potrebnú dostredivú silu, tj.

$$\frac{mv^2}{r} = Bqv \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{mv}{rq}\,.$$

Ešte nám ostáva zistiť, akou rýchlosťou sa vlastne protón pohybuje. To vieme určiť z rovnice pre energiu

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}\,.$$

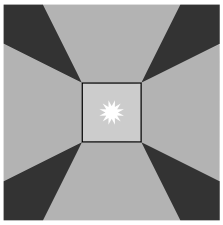
Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu tak dostaneme vzťah pre veľkosť magnetického poľa urýchľovača

$$B = \frac{m_0c}{rq}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\pi m_0c}{lq}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}}{\sqrt{1-1+\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2}} = \frac{2\pi E}{lqc}\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2} \approx 5{,}4\,\mathrm{T}\,.$$

$\boxed{27.}$ Rýchlosť svetla v skle je pomalšia ako vo vzduchu. Lúče vchádzajúce do skla sa preto budú lomiť ku kolmici podľa Snellovho zákonu lomu

$$\frac{\sin\alpha_\mathrm{vzduch}}{\sin\alpha_\mathrm{sklo}} = \frac{n_\mathrm{sklo}}{n_\mathrm{vzduch}} = n\,.$$

Lúče dopadajú na steny pod uhlami s veľkosťami v intervale $\langle 0^\circ, 45^\circ\rangle$, po lomení budú preto vychádzať pod uhlami s veľkosťami $\langle 0^\circ, \arcsin\left[\sin\left(45^\circ\right)/n\right]\rangle \approx \langle 0^\circ, 28{,}1^\circ\rangle$.



Obr. 25: Rozštiepenie svetla v rohoch

Celková časť osvetleného vesmíru (na 4 strany pod uhlami $\langle -28{,}1°, 28{,}1° \rangle$) bude teda

$$4\,\frac{2\cdot 28{,}1°}{360°} = 0{,}625\,.$$

$\boxed{28.}$ Kapacita doskového kondenzátora bez dielektrika závisí iba od jeho plochy a vzdialenosti medzi elektródami, takže pôvodnú kapacitu kondenzátora vieme vypočítať podľa známeho vzorca

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{d}\,.$$

Teraz vezmeme vodivú dosku. Taká doska sa ničím nelíši od elektródy. Keď ju vložíme do stredu kondenzátora, dostaneme vlastne kondenzátory dva, každý s hrúbkou $\frac{d}{2}$ a nezmenenou plochou S. Ich kapacita bude

$$C_1 = C_2 = \frac{S\varepsilon_0}{\frac{d}{2}} = 2C\,.$$

Tieto dva nové kondenzátory majú jednu elektródu spoločnú, ale to nám nijak neprekáža. Môžeme sa na ňu pozerať, ako keby to boli dve elektródy spojené dokonalým vodičom nulovej dĺžky. Dĺžka vodiča medzi nimi však nemá žiadny vplyv na kapacitu – kondenzátory si teda môžeme predstaviť zapojené do série.

Kapacita sériovo zapojených kondenzátorov C_s je

$$C_\mathrm{s} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}} = \frac{C_1}{2} = C\,.$$

Kapacita kodenzátora sa teda vložením dosky nijak nezmenila.

Ukážeme si aj iné, všeobecnejšie a krajšie riešenie. Kapacita ľubovoľného kondenzátora je daná ako podiel náboja, ktorý privedieme na jeho elektródy a napätia, ktorý medzi nimi tento náboj vytvorí. Skúsme na elektródy priviesť náboje $+Q$ a $-Q$.

Elektrické pole v doskovom kondenzátore je homogénne, má všade intenzitu $E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$ a smeruje ku kladne nabitej doske. V takom prípade potenciál závisí iba od vzdialenosti od elektród, čiže v každej rovine rovnobežnej s elektródami je konštantný.

Čo sa stane, keď do kondenzátora vložíme vodivú dosku? Vieme, že voľné náboje vo vodiči v elektrickom poli sa vždy chcú presunúť tak, aby toto pole vykompenzovali. Lenže vnútri dvojrozmernej roviny dosky žiadne pole nie je – potenciál je tam všade rovnaký, lebo elektrické pole nemá žiadnu zložku rovnobežnú s rovinou. Voľné náboje ostanú teda na svojich miestach.

Náboje privedené na kondenzátor sa takisto nijak nezmenia, takže celkové pole muselo ostať rovnaké. A ak sa nezmenilo pole, nemohlo sa zmeniť ani napätie, a teda ani kapacita. Čiže kapacita kondenzátora bude rovnaká, ako keby tam žiadna doska nebola.

$\boxed{29.}$ Najskôr si vypočítajme, aké je predĺženie pružinky v rovnovážnom stave. Jednoduché porovnanie síl pôsobiacich na kladku nám hovorí, že pružinka musí byť naťahovaná silou mg. Jej predĺženie x_0 nám bude označovať rovnovážnu polohu, pre ktorú platí

$$kx_0 = mg\,, \qquad \Rightarrow \qquad kx_0 - mg = 0\,,$$

Teraz si predstavme, že systém okolo tejto rovnovážnej polohy veselo kmitá. Nech je závažie vychýlené o x z rovnovážnej polohy smerom nadol (bez ujmy na všeobecnosti) a nech sa pohybuje rýchlosťou v. Ak stanovíme hladinu nulovej potenciálnej energie v rovnovážnej polohe, potenciálna energia závažia je $-mgx$ a kinetická energia $\frac{1}{2}mv^2$.

Pružinka je v tomto momente natiahnutá na $x_0 + x$, takže jej energia je $\frac{1}{2}k(x_0 + x)^2$. No a nakoniec má nejakú rotačnú energiu kladka. Ak uvážime, že lano na kladke neprešmykuje, je jej uhlová rýchlosť ω rovná v/r. Pohybová energia kladky potom je $\frac{1}{2}I\omega^2$.

Ak neuvažujeme trenie, musí platiť zákon zachovania energie, tzn. aj pri kmitaní je celková energia systému E konštantná:

$$\begin{aligned}
E = \text{konšt.} &= -mgx + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x_0+x)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \\
&= -mgx + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + kx_0x + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}v^2 = \\
&= x\left(kx_0 - mg\right) + \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2\,,
\end{aligned}$$

Z podmienky rovnovážnej polohy vidíme, že prvý sčítanec je rovný nule. Druhý sčítanec je konštantný a na kmity (kde ide o „prelievanie“ energie) nebude mať vplyv – môžeme ho teda pokojne presunúť na ľavú stranu rovnice. Tým pádom nám zostáva vzťah pre energiu

$$E = \text{konšt.} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2\,,$$

čo poznáme ako energiu harmonického oscilátoru s periódou, ktorá je určená konštantami pri v^2 a x^2. Vlejdova hračka teda kmitá s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{I}{r^2}}{k}}\,.$$

$\boxed{30.}$ Aby bola gulička vychýlená o uhol 45°, musí na ňu pôsobiť horizontálna elektrická sila F rovnakej veľkosti ako tiaž mg. Vtedy sa sily sčítajú presne tak, ako potrebujeme.

Vodivá platňa je uzemnená, jej elektrický potenciál teda musí byť nulový. Môžeme využiť princíp zrkadlenia – vieme totiž „uhádnuť“, že riešenie s rovinou s nulovým potenciálom dostaneme aj vtedy, keď dosku nahradíme „zrkadlovým“ nábojom – teda nábojom s opačným znamienkom a v rovnakej vzdialenosti na druhej stane platne. Tieto náboje sa priťahujú elektrostatickou silou

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}\,,$$

kde a je ich vzájomná vzdialenosť. Z jednoduchej geometrie platí

$$a = 2l - \frac{2l}{\sqrt{2}}\,.$$

Po dosadení

$$mg = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{l^2\left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}\,.$$

Odtiaľ $Q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}\left(2-\sqrt{2}\right)l$.

$\boxed{31.}$ Ak sa efektívna hodnota striedavého napätia pri uhlovej frekvencii $\omega = 2\pi f$ rovná U_{ef}, tak potom maximálna hodnota napätia má veľkosť $U_{\mathrm{M}} = \sqrt{2}U_{\mathrm{ef}} = 325\,\mathrm{V}$.

Potom môžeme napísať časový vývoj striedavého napätia, ktoré je na LEDke:

$$U = U_{\mathrm{M}}\sin\left(\omega t\right)\,.$$

Podľa tejto rovnice nadobúda zdroj hodnotu napätia U_{ON} v čase

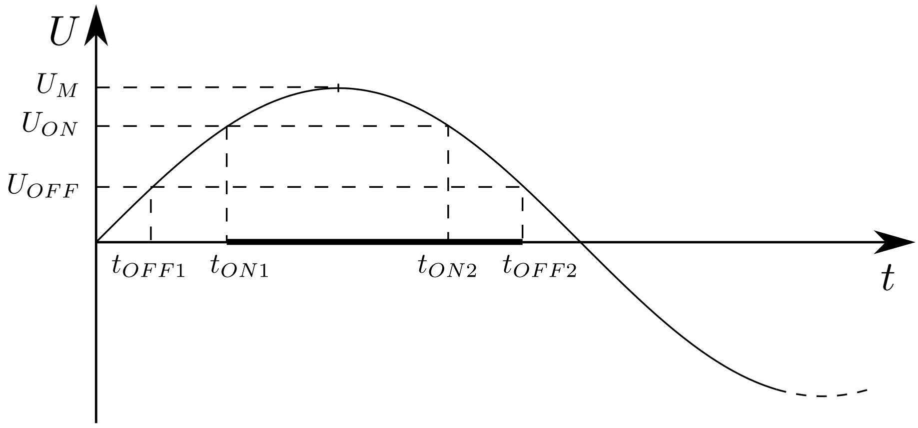
$$t_{\mathrm{ON}} = \frac{\arcsin\left(\frac{U_{\mathrm{ON}}}{U_{\mathrm{M}}}\right)}{2\pi f}\,.$$

Táto rovnica má dve riešenia: $t_{\mathrm{ON1}} = 1{,}9\,\mathrm{ms}$ a $t_{\mathrm{ON2}} = 8{,}1\,\mathrm{ms}$.

U zhasínacieho napätia U_{OFF} je to veľmi podobné:

$$t_{\mathrm{OFF}} = \frac{\arcsin\left(\frac{U_{\mathrm{OFF}}}{U_{\mathrm{M}}}\right)}{2\pi f}\,.$$

Tu opäť dostávame dve riešenia: $t_{\mathrm{OFF1}} = 0{,}6\,\mathrm{ms}$ a $t_{\mathrm{OFF2}} = 9{,}4\,\mathrm{ms}$. Keď sa však pozrieme na prvú polperiódu grafu napäťovej charakteristiky LEDky a zakreslíme doň vypočítané časy, tak pekne vidíme, v ktorom časovom úseku LEDka vlastne svieti:



Obr. 26: Časový priebeh napätia na ledke

Z obrázku je teda už jasné, že LEDka svieti

$$\Delta t = t_{\mathrm{OFF2}} - t_{\mathrm{ON1}} = 7{,}5\,\mathrm{ms}\,.$$

$\boxed{32.}$ Pozrime sa najskôr na prípad nekonečnej hladiny. Keď sa kocka ponorí, vytlačí objem vody ΔV. Ten sa však roztečie po nekonečne veľkej hladine, preto sa vodná hladina nezdvihne. Aká sila bude pôsobiť na kocku ponorenú o hĺbku h_{ponor}?

$$F = mg - h_{\mathrm{ponor}} S\rho_{\mathrm{H_2O}} g = mg - h_{\mathrm{rovnovaz}} S\rho_{H_2O} g - \Delta h S\rho_{H_2O} g = 0 - K\Delta h\,,$$

kde $K = S\rho_{H_2O}g$, S je plocha kocky a h_{rovnovaz} je hĺbka ponoru kocky v rovnovážnom stave, a teda prislúchajúci člen sa presne vyruší s tiažovou silou.

Všimnime si, že sila pôsobiaca na ponorenú kocku je priamo úmerná vychýleniu a pôsobí vždy proti vychýleniu. Perióda kocky je v tomto prípade

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a^2\rho_{H_2O}g}}\,.$$

V prípade, keď je hladina konečná, nám pri ponorení kocky o Δh (vzhľadom na skúmavku) stúpne hladina o dodatočné Δh_1, nakoľko objem vody vytlačený kockou sa už nerozleje na nekonečne tenkú vrstvu. Objem vody vytlačený kockou $a^2\Delta h$ sa rozleje na plochu $\pi R^2 - a^2$, preto

$$\Delta h_1 = \frac{a^2\Delta h}{\pi R^2 - a^2}\,.$$

Sila pôsobiaca na kocku v prípade konečnej hladiny je preto

$$F = -K\left(\Delta h + \Delta h_1\right) = -K\Delta h\left[1 + \frac{1}{\pi\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 1}\right] = -K_1\Delta h\,,$$

kde

$$K_1 = K\left[1 + \frac{1}{\pi\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 1}\right].$$

Nová perióda bude teda polovičná vtedy, keď $K/K_1 = 1/4$ (kvôli odmocnine vo vzorci pre T). Po pár úpravách dostaneme

$$\frac{a}{R} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}.$$

Teraz sa však treba zamyslieť. Na to, aby nám mohla kocka kmitať v skúmavke, musí sa do nej zmestiť, čiže musí byť splnená podmienka $a/\sqrt{2} \leq R$, čo tesne, ale predsa náš výsledok nespĺňa.

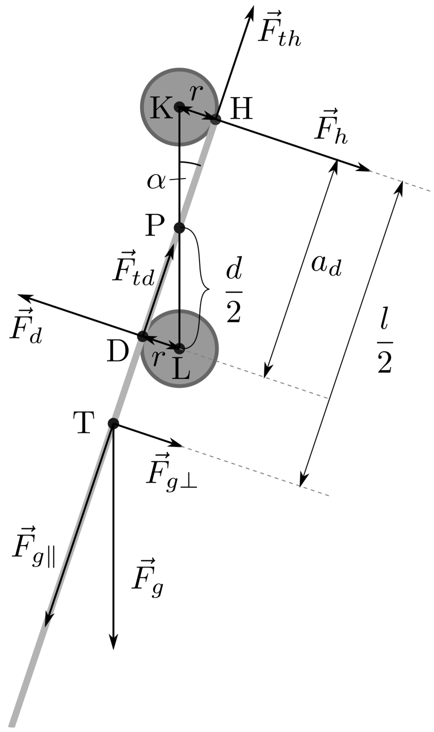
Takže neexistuje žiadny vhodný pomer rozmerov, pri ktorom by táto situácia nastala.

$\boxed{33.}$ Najprv si načrtneme všetky pôsobiace sily a im zodpovedajúce momenty. Neznáme sily a momenty určíme tak, aby súčet všetkých síl aj všetkých momentov bol nulový – tyč sa nehýbe ani neotáča. Nakoniec nájdeme najmenšiu dĺžku l, pre ktorú ešte naše predpoklady budú platiť.

Avšak ešte pred tým chvíľka zamyslenia. Ako veľmi nám pomôže, ak bude tyč pretŕčať za horný bod dotyku s rebrinou? Nijako. Naša fyzikálna intuícia by nám mala hovoriť, že čím nižšie bude ťažisko, tak tým lepšie sa tyč udrží. Múdrejší o tento fakt sa pustíme do riešenia. Momenty síl budeme počítať vzhľadom na bod H (viď obrázok 27).

Skúseným pohľadom vieme identifikovať päť síl:

- F_g je tiažová sila, pôsobí v ťažisku tyče T a jej veľkosť je $F_g = \lambda l g$.
- F_d a F_h sú sily, ktorými tlačí dolná a horná priečka rebriny na tyč.
- F_{th} a F_{td} sú trecie sily v týchto bodoch.



Obr. 27: Prierez rebrinou

Smernice oboch trecích síl a sily F_h prechádzajú cez bod H, takže nevytvárajú žiaden moment. Ostávajú nám teda dva momenty, pričom moment tiažovej sily M_g vieme spočítať priamo. Vzhľadom na bod H je dĺžka ramena $l/2$, sila však nepôsobí kolmo. Musíme preto najprv spočítať veľkosť jej kolmej zložky $F_g^{\perp}$. Na to nám stačí vynásobiť jej pôvodnú veľkosť $\sin\alpha$. Z trojuholníka HPK si vieme vyjadriť $\sin\alpha = 2r/d$. Výsledný moment je teda

$$M_g = F_g^{\perp}\frac{l}{2} = F_g\frac{2r}{d}\frac{l}{2} = F_g\frac{lr}{d}.$$

Vieme však, že súčet momentov musí byť nulový, takže poznáme aj moment sily F_d: musí platiť $M_d = M_g$. Navyše poznáme dĺžku jemu prislúchajúceho ramena a_d – je to vzdialenosť bodov, v ktorých sa tyč dotýka priečok rebriny, viď obrázok 27. Z Pytagorovej vety jednoducho vypočítame

$$a_d = |\mathrm{HD}| = \sqrt{d^2 - 4r^2}\,.$$

Poznáme teda všetko, čo nám treba, aby sme vypočítali veľkosť sily F_d – z rovnice pre momenty vyjadríme

$$F_d = F_g^{\perp} \frac{\frac{l}{2}}{a_d} = F_g \frac{lr}{da_d}\,.$$

Teraz budeme hľadať veľkosť sily F_h. Pozrieme sa na zložky síl kolmé na tyč a pokúsime sa ich vybalansovať. Trecie sily sú s tyčou rovnobežné, teda ich môžeme ignorovať – ostanú nám sily F_d a $F_g^{\perp}$, o ktorých už vieme, že sú na tyč kolmé. V rovonováhe musí z 1. Newtonovho zákona platiť

$$F_h = F_d - F_g^{\perp} = F_h = F_g \left(\frac{lr}{da_d} - \frac{2r}{d} \right)\,.$$

Nakoniec potrebujeme overiť rovnováhu síl v smere rovnobežnom s tyčou. Prejavujú sa tri sily: obe trecie, ktorých veľkosť je f-krát veľkosť prítlačnej sily, a rovnobežná zložka tiažovej sily $F_g^{\parallel}$. Jej veľkosť je analogicky $F_g \cos\alpha$. Z trojuholníkov HPK a PDL vieme, že platí $\cos\alpha = a_d/d$.

Aby sa tyč nekĺzala, musí byť rovnobežná zložka tiažovej sily najviac rovná súčtu oboch trecích síl:

$$F_g^{\parallel} \leq F_{td} + F_{th} = f\left(F_d + F_h\right)\,,$$

z čoho dostaneme podmienku

$$l \geq \frac{d^2 - 4r^2}{2fr} + \sqrt{d^2 - 4r^2} = 1{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Na záver musíme overiť, či nám ťažisko tyče naozaj vyšlo nižšie, ako je bod dotyku s dolnou tyčou – teda, či $l \geq 2\sqrt{d^2 - 4r^2}$. V opačnom prípade by sa totiž tyč prevalila na druhú stranu rebriny a výpočet by potom nezodpovedal realite. Ľahko zistíme, že to tak nie je a tyč minimálnej možnej dĺžky sa pri zvolených hodnotách medzi priečkami skutočne udrží.

34. Čukčská klimatizácia je z termodynamického hľadiska chladnička a ako Čukčovia samozrejme vedia, najúčinnejšia chladnička pracuje v Carnotovom cykle.

Účinnosť je definovaná ako podiel „pôžitku“ a „ceny“. „Pôžitkom“ je v prípade chladničky teplo odvedené z chladnejšieho telesa Q_2 a „cenou“ dodaná práca $W = Q_1 - Q_2$, kde Q_1 je teplo odvedené na teplejšie teleso. Pre Carnotov cyklus platí $Q_1/Q_2 = T_1/T_2$, v našom prípade $T_1 = 27\,^\circ\mathrm{C}$ a $T_2 = 5\,^\circ\mathrm{C}$. Carnotova chladnička pracujúca medzi týmito teplotami má teda účinnosť

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}\,.$$

Všimnite si, že účinnosť je vyššia ako 1. Toto sa pri chladničkách (na rozdiel od tepelných strojov) stáva. Výkon pri chladení tepla je daný množstvom odčerpaného tepla za čas, teda

$P = Q_2/\Delta t$, príkon chladničky je dodávaná práca za čas, teda $P' = W/\Delta t$. Príkon preto možno vypočítať z účinnosti ako

$$P' = \frac{P}{\eta} = \frac{T_1 - T_2}{T_2} P \approx 55{,}4\,\mathrm{W}\,.$$

$\boxed{35.}$ Kubo stojí na povrchu Zeme, čiže na dne jej gravitačnej potenciálovej jamy, no zároveň sa ale celá Zem nachádza v potenciálovej jame Slnka. Ak sa Kubo chce dostať do nekonečna, musí mať dostatok kinetickej energie na to, aby opustil obidve jamy. Celkový gravitačný potenciál, ktorý musí prekonať, je súčtom oboch potenciálov, teda aj potrebná kinetická energia je súčtom dvoch čiastkových kinetických energií.

Predstavme si najprv, že Zem je nehybná. Ak Kubo vyštartuje rýchlosťou v_1, ujde od Zeme do nekonečna. Musíme si však dať pozor na to, že ak nezanedbávame Slnko, nekonečno vzhľadom na Zem nie je skutočné nekonečno, ale len solárna orbita s rovnakou polosou, akú má obežná dráha Zeme. V tomto prípade bude po opustení zemského poľa Kubova rýchlosť voči Zemi (a teda aj Slnku) nulová, lebo minul všetku svoju energiu.

Ak chce ujsť aj od Slnka, potreboval by, aby mu ostala rýchlosť aspoň v_2. Na to nám stačí tieto dve energie sčítať. Vyjde nám, že Kubo musí vyštartovať rýchlosťou

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\,,$$

$$v_0 = \sqrt{(11{,}2\,\mathrm{km/s})^2 + (42{,}1\,\mathrm{km/s})^2} = 43{,}6\,\mathrm{km/s}\,.$$

Lenže v skutočnosti sa Zem hýbe a šikovný Kubo to dokáže využiť, ak vyštartuje v smere pohybu planéty. Už vieme, že ak by rakete udelil práve únikovú rýchlosť v_1, ostal by krúžiť na solárnej orbite rýchlosťou v_z. Takisto vieme, že na to, aby Slnku definitívne utiekol, je potrebné, aby mu po opustení Zeme ostala vzhľadom na Slnko rýchlosť aspoň v_2, čo je voči Zemi $v_2 - v_\mathrm{z} = 12{,}3\,\mathrm{km/s}$. Celkovú potrebnú rýchlosť vypočítame rovnakým postupom, ako v prvej časti: napíšeme si rovnosť energií

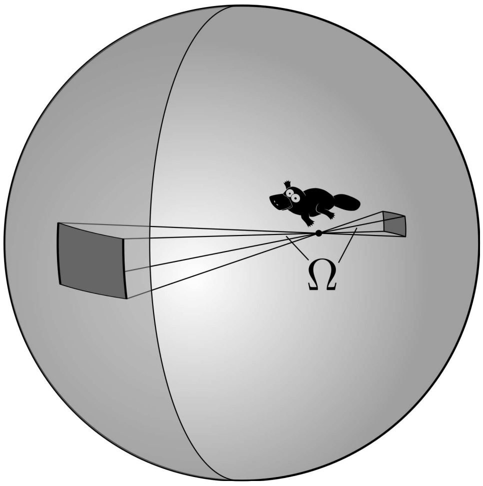
$$\frac{mv_\mathrm{Kubo}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m(v_2 - v_\mathrm{z})^2}{2}\,.$$

Z tejto rovnice si ľahko vyjadríme výslednú rýchlosť

$$v_\mathrm{Kubo} = \sqrt{(11{,}2\,\mathrm{km/s})^2 + (12{,}3\,\mathrm{km/s})^2} = 16{,}6\,\mathrm{km/s}\,.$$

Túto hodnotu obyčajne nazývame treťou kozmickou rýchlosťou a skutočne sa využíva, ak chceme nejaké teleso (napríklad vesmírnu sondu *Voyager 1*) s minimálnym úsilím dostať za hranice Slnečnej sústavy.

$\boxed{36.}$ Zadanie hovorí, že FtáKopySk sa bude pohybovať v tuneli iba vďaka gravitačnej sile. Tá je daná súčtom príspevkov od všetkých atómov, ktoré Fíkappasigmu tvoria. V našich úvahách si najskôr z planéty vyrežme tenkú šupku atómov. Z tejto vrstvy si vyrežme dva výseky, ktoré vytvárajú pri FtáKopySkovi rovnaký (priestorový) uhol, viď obrázok.



Obr. 28: Výrezy s rovnakým priestorovým uhlom Ω

Plocha, ktorú výrez vytína, je intuitívne úmerná d^2, pretože na štvorci polomeru závisí aj povrch gule. Tým pádom je d^2 úmerná aj hmotnosť výrezu (má konštantnú hustotu a hrúbku). Naopak, gravitačná sila, ktorou výrezy pôsobia na FtáKopySka, je úmerná $1/d^2$. Tieto dve úmernosti sa teda vzájomne „vyrušia“. Znamená to, že menej, ale bližších atómov jedného výseku má na FtáKopySka rovnaké gravitačné účinky, ako viac vzdialenejších atómov druhej časti šupky. Rovnakú úvahu môžeme použiť na všetky výseky pre všetky priestorové uhly, čím dostaneme, že ak FtáKopySka obklopuje tenká guľová vrstvička atómov, ich gravitačné účinky sa navzájom vyrušia.

Výsledná sila, ktorá na neho bude pôsobiť, bude teda iba od atómov planéty, ktoré sa nachádzajú bližšie stredu, ako on sám. Oboznámení s týmto faktom už teraz ľahko napíšeme veľkosť sily, ktorá pôsobí na FtáKopySka hmotnosti m vo vzdialenosti x od stredu planéty.

$$F(x) = G\frac{M(x)m}{x^2} = G\frac{\frac{4}{3}\rho x^3 m}{x^2} = \frac{4}{3}Gm\pi\rho x = kx\,.$$

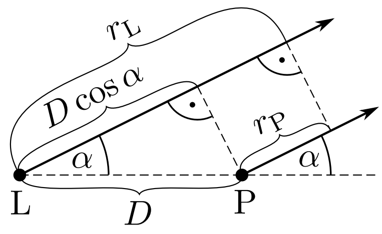
Vidíme, že sila závisí *lineárne* od vzdialenosti od stredu, pôsobí smerom do stredu a v strede je výsledná sila nulová. Nie náhodou nám to pripomína silu harmonického oscilátoru. Takže pád FtáKopySka tunelom bude analogický s pohybom harmonického oscilátora s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}}\,.$$

Pre výchylku takého oscilátoru platí $y = R\cos(2\pi t/T)$. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ bola výchylka R, čo je presne náš prípad, takže stačí vyjadriť výsledný čas t a za y dosadiť $R/2$.

$$t = \frac{T}{2\pi}\arccos\frac{y}{R} = \sqrt{\frac{\pi}{12G\rho}}\,.$$

37. Maximá nastávajú v smeroch, v ktorých sú žiarenia vo fáze, intefrerencia žiarenia je tam konštruktívna a výsledné žiarenie je najintenzívnejšie. Nech zdroj, ktorého fáza je o tretinu väčšia, sa nachádza vľavo na obrázku.



Obr. 29: Dráhový rozdiel paralelných lúčov

Nech sú fázy zdrojov vpravo a vľavo

$$\phi_P = \frac{2\pi r_P}{\lambda} + \omega t\,, \qquad \phi_L = \frac{2\pi r_L}{\lambda} + \omega t + \frac{2\pi}{3}\,.$$

Potom, keď žiari naša anténa smerom doprava ako na obrázku, je dráhový rozdiel vĺn $r_L - - r_P = D\cos\alpha$. Aby žiarenia boli vo fáze, fázový rozdiel musí byť celočíselný násobok 2π, teda $\phi_L - \phi_P = 2\pi k$. Dostávame tak

$$\frac{2\pi D\cos\alpha}{\lambda} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi k \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\lambda}{D}\left(k - \frac{1}{3}\right)\,.$$

Pre interval $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ má táto rovnica 18 riešení.

Analogicky, keď žiari naša anténa smerom doľava, je dráhový rozdiel $r_P - r_L = D\cos\alpha$. Teda

$$\frac{2\pi D\cos\alpha}{\lambda} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi k \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\lambda}{D}\left(k + \frac{1}{3}\right)\,.$$

Pre interval $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ má táto rovnica len 17 riešení.

Dokopy teda Kubova anténa žiari maximálnou intenzitou v 35 smeroch.

38. Odyseus sa nachádza v gravitačnom poli Zeme, preto sa vystrelený šíp bude pohybovať ako pri šikmom vrhu. Aby Odyseovi stačila najmenšia možná rýchlosť, nastaví svoj šíp tak, aby pri svojej ceste tesne minul najvyššie body otvorov v sekerách uprostred. Tu vidíme, že situáciu si môžeme rozdeliť na dva prípady.

Pre nepárne N je situácia jednoduchšia. Vieme, že šíp prejde celkovú vodorovnú dráhu $l\,(N-1)$ a jeho maximálna výška bude d. Známe rovnice pre šikmý vrh nám hovoria:

$$l\,(N-1) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\,,$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Aby sme získali rýchlosť v najvyššom bode (označme si ju v), musíme najskôr určiť počiatočnú rýchlosť v_0. Tú získame, keď sa nám podarí zbaviť sa uhla α v týchto rovniciach. Začneme tým, že si z druhej rovnice vyjadríme $\sin^2\alpha$. Prvú rovnicu potom umocníme na druhú a s využitím vzťahu $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ dostaneme

$$[gl\,(N-1)]^2 = 4v_0^4 \sin^2\alpha \left(1 - \sin^2\alpha\right) .$$

Do tejto rovnice dosadíme za $\sin^2\alpha$ a vyjadríme počiatočnú rýchlosť.

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl^2\,(N-1)^2}{8d} + 2gd}$$

Rýchlosť šípu v najvyššom bode určíme pomocou zákonu zachovania energie.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgd$$

$$v_{\text{nepárne}} = \sqrt{v_0^2 - 2gd} = \sqrt{\frac{gl^2\,(N-1)^2}{8d}}$$

Pre párne N je situácia o niečo zložitejšia. Maximálna výška totiž bude o niečo väčšia ako d. Začnime tým, že si napíšeme pohybové rovnice pre letiaci šíp

$$x = v_0 t \cos\alpha\,,$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Pozrime sa na bod, v ktorom sa šíp dotkne hornej časti otvoru v jednej zo sekier. To sa stane kvôli minimalizácii rýchlosti v_0 a udeje sa to po prejdení šípu cez $N/2$ sekier. Keďže sa x-ová zložka rýchlosti nemení, znamená to, že čas, za ktorý šíp preletí medzi dvomi otvormi je konštantný. Keďže poznáme celkový čas letu

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\,,$$

vieme určiť aj čas, za ktorý sa šíp dostane k $N/2$-tej sekere.

$$t_{N/2} = \left(\frac{N}{2} - 1\right)\frac{1}{N}\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

Podľa pohybových rovníc potom bude platiť:

$$\left(\frac{N}{2} - 1\right) l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{Ng}\left(\frac{N}{2} - 1\right)\,,$$

$$d = \frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{g}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N^2}\right)\,.$$

Z druhej rovnice si opäť vyjadríme $\sin^2\alpha$. Prvú rovnicu analogicky ako v prvom prípade umocníme na druhú a upravíme do tvaru:

$$(gNl)^2 = 4v_0^4 \sin^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right) ,$$
$$(gNl)^2 = \frac{gd}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{N^2}\right)^2}\left[2v_0^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{N^2}\right)-gd\right] .$$

Odtiaľ už vjadríme rýchlosť v_0 ako

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{N^2}\right)}+\frac{gN^2l^2}{2d}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{N^2}\right)} .$$

Keď poznáme počiatočnú rýchlosť, môžme si opäť určiť maximálnu výšku šípu.

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{d}{4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{N^2}\right)}$$

Analogicky ako v prvom prípade využijeme zákon zachovania energie a dostaneme tak rýchlosť v najvyššom bode.

$$v_{\text{párne}} = \sqrt{v_0^2-2gh} = \sqrt{\frac{gl^2\left(N^2-4\right)}{8d}}$$

39. Začneme tým, že si vypočítame pomer hmotností veľkej a malej polgule. Keďže su homogénne, malá má polovičné rozmery a hmotnosť veľkej je M, malá musí vážiť $m = M/8$. Hmotnosť celej sústavy je potom $5M/4$.

Ďalej je potrebné zistiť polohu ťažiska celej tejto sústavy. Zo symetrie vyplýva, že sa bude nachádzať na osi prechádzajúcej stredom plochej podstavy veľkej polgule a bude prechádzať jej stredom. Vzdialenosť ťažiska od stredu plochej podstavy smerom k veľkej polguli bude

$$r_\mathrm{t} = \frac{M\frac{3R}{8}+2\cdot\frac{M}{8}\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{R}{2}}{\frac{5}{4}M} = \frac{21}{80}R .$$

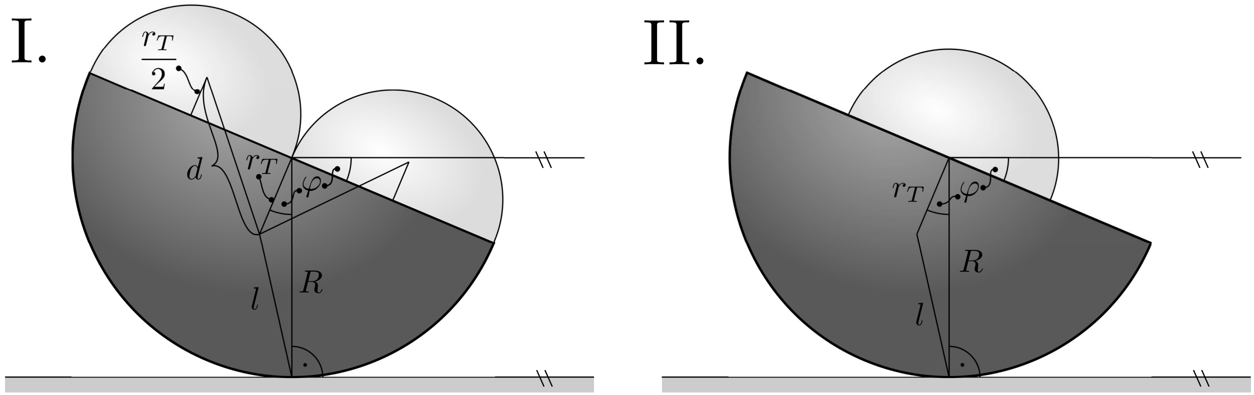
Pri vychýlení z rovnovážnej polohy o uhol φ stúpne potenciálna energia o

$$E_\mathrm{p} = \frac{5}{4}Mgr_\mathrm{t}\left(1-\cos\varphi\right) .$$

Kinetickú energiu môžeme vyjadriť ako kinetickú energiu otáčania okolo okamžitej osi otáčania, avšak tá sa bude neustále meniť. Preto

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I_\mathrm{A}\omega^2 ,$$

kde I_A, je moment zotrvačnosti okolo aktuálnej osi otáčania. Ťažisko bude od tejto osi nej vzdialené o l (viď obrázok 30), pričom platí kosínusová veta $l^2 = r_\mathrm{t}^2 + R^2 - 2r_\mathrm{t}R\cos\varphi$.



Obr. 30: Geometria kokosovej zmrzliny v dvoch význačných smeroch symetrie

Jedinou neznámou je v príklade moment zotrvačnosti, tak sa do neho pusťme. Moment zotrvačnosti polgule okolo ťažiska je zo Steinerovej vety

$$I = \frac{2}{5}mr^2 - m\frac{9}{64}r^2 = \frac{83}{320}mr^2\,.$$

V oboch prípadoch si najprv vypočítame moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu spoločným ťažiskom a následne vzhľadom na os otáčania (teda dvakrát použijeme Steinerovu vetu).

V prvom prípade, keď kokos kmitá okolo osi kolmej na spoločnú os malých kopčekov zmrzliny, momenty zotrvačnosti okolo ťažiska I_{T_1} a okolo osi otáčania I_{A_1} sú

$$I_{\mathrm{T}_1} = \frac{83}{320}MR^2 + 2\cdot\frac{83}{320}m\frac{R^2}{4} + M\left(\frac{3}{8}R - r_\mathrm{t}\right)^2 + 2md^2\,,$$
$$I_{\mathrm{A}_1} = I_{\mathrm{T}_1} + (M+2m)\,l^2 = \frac{139}{80}MR^2 - \frac{21}{32}MR^2\cos\varphi\,.$$

Analogicky pre kmity okolo druhej osi dostaneme

$$I_{\mathrm{T}_2} = \frac{83}{320}MR^2 + 2\frac{83}{320}m\frac{R^2}{4} + M\left(\frac{3}{8}R - r_\mathrm{t}\right)^2 + 2m\left(\frac{3}{16}R + r_\mathrm{t}\right)^2\,,$$
$$I_{\mathrm{A}_1} = I_{\mathrm{T}_1} + (M+2m)\,l^2 = \frac{67}{40}MR^2 - \frac{21}{32}MR^2\cos\varphi\,.$$

Nás budú zaujímať malé kmity, takže uhol φ bude veľmi malý. Pre malé uhly φ ale platí[3] $\cos\varphi \approx 1$, takže momenty zotrvačnosti môžeme vyjadriť ako

$$I_{\mathrm{A}_1} = \frac{173}{160}MR^2 \qquad \text{a} \qquad I_{\mathrm{A}_2} = \frac{163}{160}MR^2\,.$$

[3] Platí to z rozkladu kosínusu do Taylorovho polynómu, pričom uvažujeme len dominantný člen.

Teraz vyjadrime celkovú energiu systému, pričom člen $(1 - \cos\varphi)$ v potenciálnej energii položíme rovný prvému nenulovému členu rozvoja kosínusu, čiže využijeme približný vzorec

$$1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}\,.$$

Pre celkovú energiu potom dostaneme

$$E = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}Mgr_{\mathrm{t}}\varphi^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{A}}\omega^2 = \text{konšt.}$$

čo je vlastne energia harmonického oscilátora s periódou, ktorá je určená konštantami pri ω^2 a φ^2. Takže kokos naplnený zmrzlinou kmitá okolo prvej osi s periódou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{A}_1}}{\frac{5}{4}Mgr_{\mathrm{t}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{173R}{525g}}\,,$$

a okolo druhej osi s periódou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{A}_2}}{\frac{5}{4}Mgr_{\mathrm{t}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{163R}{525g}}\,.$$

Hľadaný pomer je teda $\sqrt{163/173}$.

$\boxed{40.}$ Kým čakám na brehu, tak si to porátam. Ľadom prechádza tepelný tok $q = \lambda\Delta T/h$, kde ΔT je rozdiel teplôt vody a vzduchu a h je už vytvorená vrstva ľadu – vieme predsa, že ľad mrzne od hladiny. Tepelný tok spôsobuje zamŕzanie rýchlosťou

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{qS}{L}\,,$$

po úpravách dostaneme rovnicu

$$\rho\,\mathrm{d}h = \frac{q}{L}\mathrm{d}t = \frac{\lambda\Delta T}{hL}\,\mathrm{d}t\,,$$

čo vedie na diferenciálnu rovnicu

$$h\,\mathrm{d}h = \frac{\lambda\Delta T}{\rho L}\,.$$

Rovnicu stačí už iba zintegrovať

$$\int_0^{h_0} h\,\mathrm{d}h = \frac{\lambda\Delta T}{\rho L}\int_0^{\tau}\mathrm{d}t\,,$$

$$\frac{1}{2}h_0^2 = \frac{\lambda\Delta T}{\rho L}\tau\,.$$

Odtiaľ je čas zamŕzania jazera

$$\tau = \frac{\rho L}{2\lambda\Delta T}h_0^2 \approx 77\,\mathrm{h}\,.$$