Zadania

$\boxed{1.}$ Z akej výšky musím s nulovou počiatočnou rýchlosťou skočiť, aby som letel jednu sekundu? Gravitačné zrýchlenie je $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$\boxed{2.}$ Samko rád kreslí štvorčeky. Jeden štvorček s veľkosťou $a \times a$ nakreslí za čas t. Koľko mu bude trvať nakresliť štvorčekovú tabuľku s $N \times N$ políčkami s veľkosťou $a \times a$?

$\boxed{3.}$ Andrej sa viezol nahor na dlhom eskalátore so sklonom α pohybujúcom sa rýchlosťou v. Pretože je viťúz, ukázal Paťovi, že vie vyhodiť loptičku tak, že ju stojac na eskalátore „dobehol" a znova chytil. Paťo to chcel vyskúšať tiež, a preto si odmeral, pod akým uhlom (vzhľadom na vodorovný smer) Andrej loptičku vyhodil. Aký uhol zistil, ak zmeral, že veľkosť rýchlosti loptičky bola u? Paťo počas merania stál na eskalátore.

$\boxed{4.}$ Máme k dispozícii tri variče s odporom R a zdroj napätia U. Ako a koľko máme zapojiť varičov, aby sme na nich dosiahli v súčte čo najväčší výkon?

$\boxed{5.}$ Titanic pláva vo veľkom akváriu, v ktorom je sladká voda. Podpalubie Titanicu je tvorené jednou veľkou nádržou, ktorá je naplnená slanou vodou, v ktorej plávajú sladkovodné ľadovce. Ako sa pohnú hladiny vôd, keď sa ľadovce roztopia? Voda z podpalubia Titanicu sa nevyleje.

$\boxed{6.}$ Máme krabicu tvaru kvádra s hranami a, b, c bez vrchnej steny s rozmermi b, c. V akej výške odo dna je jej ťažisko?

$\boxed{7.}$ Kaja si objednala 300 ml džúsu s hustotou $1020\,\mathrm{kg/m^3}$, mernou tepelnou kapacitou $4180\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}$ a teplotou $30\,^\circ\mathrm{C}$. V nápoji ešte k tomu plávalo 200 g ľadu s merným skupenským teplom topenia $334000\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$ a teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$. Akú výslednú teplotu bude mať jej nápoj?

$\boxed{8.}$ Výťah počas svojej jazdy zrýchľuje, potom ide ustálenou rýchlosťou $v = 4$ poschodia za minútu a potom spomaľuje. Spomaľovanie a zrýchľovanie počas každej jazdy výťahom trvá rovnaký čas. Z prvého na piate poschodie mu to trvá $t = 1{,}5$ minúty. Koľko mu to trvá z prvého na pätnáste poschodie?

$\boxed{9.}$ Na kladku sme natočili celé lano dĺžky L a pustili sme ho, nech sa odtáča. Kladka má polomer R a je nehmotná, ale lano o ňu neprešmykuje. Aká je uhlová rýchlosť kladky, keď je práve odtočený kus dlhý l?

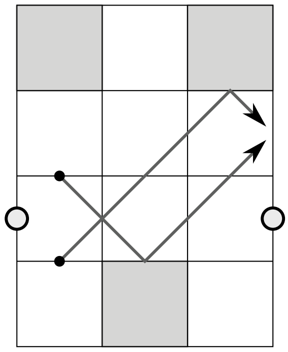
$\boxed{10.}$ Vlejd žongluje jednou loptičkou, ktorá vyletuje do výšky h a loptička sa dotýka jeho ruky každých t sekúnd. Do akej výšky H musí vyhadzovať dve rovnaké loptičky, aby mal v ruke loptičku znovu každých t sekúnd? Predpokladajte, že loptičky vyhadzuje priamo nahor do rovnakej výšky a počas letu sa loptičky nezrazia.

$\boxed{11.}$ Dva holuby Luxusko a Kaktusko sa nemajú rady a bombardujú jeden druhého. Práve teraz letia oproti sebe vo vodorovnom smere rýchlosťami v a Luxusko je o h vyššie než Kaktusko.

Luxusko chce vypustiť bombu tak, aby Kaktuska trafil. V akej celkovej vzdialenosti od neho to má urobiť?

12. Družica krúži okolo neznámej guľovej planéty tesne nad povrchom s periódou T. Aká je hustota planéty?

13. „Samé príklady? Dajme im radšej niečo na hranie. Čo takto zrkadlá a laser?“ Dva lúče vychádzajú zo zdrojov vo vyznačenom smere. Na sivých štvorcových zrkladlách sa odrážajú, ináč sa šíria priamo. Ako musíme rozmiestniť tri štvorcové zrkadlá, aby lúče trafili zakrúžkované terče? Zrkadlá môžeme umiestňovať len do štvorcov siete 4x3.



14. Geopotenciálna výška je taká výška vo fiktívnom homogénnom gravitačnom poli s intenzitou g, že práca potrebná na vynesenie telesa z hladiny nulovej potenciálnej energie do tejto výšky je rovnako veľká ako práca potrebná na presunutie toho istého telesa zo Zemského povrchu do nekonečna v skutočnom gravitačnom poli Zeme. Vypočítajte túto výšku.

15. Každá húsenica lezie vzhľadom na podklad rýchlosťou v. Húseníc je na sebe N. Akou priemernou rýchlosťou vzhľadom na zem lezú?

16. Závažie s hmotnosťou m zavesené vo vesmíre na pružine s tuhosťou k upevnenej o pevný bod kmitá s maximálnou výchylkou $x_{\max}$. Tento systém sa dá popísať vykreslením závislosti jeho hybnosti od jeho výchylky. Do súradnicového systému, kde x-ová os predstavuje výchylku kyvadla a y-ová os jeho hybnosť, sa zakresľujú dvojice $[x, p]$ pre rôzne okamihy pohybu. Nakreslite takýto graf pre závažie na pružine a vyjadrite hodnoty priesečníkov s osami.

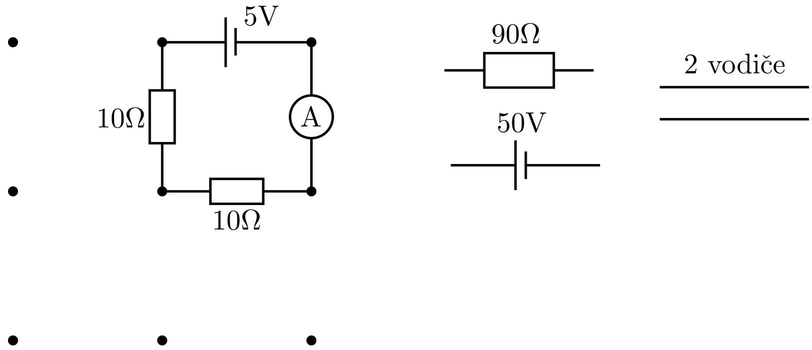
17. Jednu dosku udržím silou F_g. Akou najmenšiou horizontálnou silou F_H musím z oboch strán pritláčať k sebe tri takéto vertikálne otočené dosky, aby nespadli? Koeficient trenia medzi doskami aj medzi doskami a rukami je f.

18. Na obrovský plát ľadu s hrúbkou $h = 1\,\mathrm{m}$ umiestnime dve platne, ktoré udržiavame na stálej teplote: jednu pri $t_V = 2^\circ\,\mathrm{C}$ a druhú pri $t_L = -5^\circ\,\mathrm{C}$. Ľad má tepelnú vodivosť $\lambda_L = 2{,}2\,\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, voda $\lambda_V = 0{,}55\,\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. V akej vzdialenosti d od teplejšej platne sa ustáli rozhranie voda-ľad?

19. Filip je nadšený paintballista. Naposledy, keď hral, sa mu stalo, že súper po ňom strieľal guľôčky rýchlosťou u. Filip však na to nedbal a neohrozene bežal rýchlosťou v proti strieľajúcemu súperovi a nechával sa farbiť na oranžovo. Za čas t naňho dopadlo N guľôčok. Vtom však súper vymenil zásobník – nabil ružové guľôčky. To už bolo na Filipa priveľa, tak sa rozbehol smerom od súpera rovnako veľkou rýchlosťou. Koľko guľôčok ho trafilo pri behu od súpera za rovnaký čas?

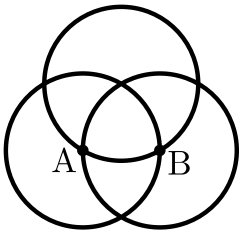
20. Jimi získal vodičský preukaz a hneď musel ísť vyskúšať, čo jeho auto dokáže. Z pokoja sa začal rozbiehať tak, že zrýchlenie jeho auta v čase rástlo lineárne od nuly. V čase t_1 išlo rýchlosťou v_1. Akou rýchlosťou išlo v čase t_2?

21. Mišo je blázon do elektroniky. Momentálne rieši problém, ako doplniť súčiastky do obvodu na ľavej strane obrázku, aby ampérmetrom pretekal nulový prúd. Viete mu poradiť, ak má k dispozícii iba súčiastky na pravej strane?



22. Máme jojo s hmotnosťou m a momentom zotrvačnosti I vzhľadom na jeho os visiace zo stropu tak, že je ovinuté motúzom na vonkajší polomer R. S akým zrýchlením bude padať nadol, keď ho pustíme?

23. Aký je odpor Boromirových kruhov medzi bodmi A a B, ak majú kruhy polomer r a dĺžkový odpor λ?



Stredy kruhov ležia vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka.

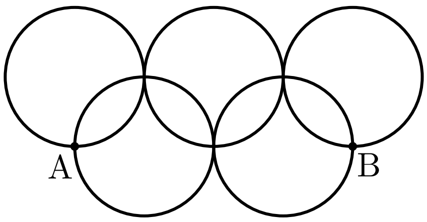
24. Tinka má rada čaj. Aby ho mala stále dostatok, naliala si do 5-litrovej nádoby tvaru valca s plochou podstavy $1\,\mathrm{dm}^2$ štyri litre horúceho čaju s teplotou $80\,^\circ\mathrm{C}$. Postupne si čaj napúšťala, pila, čaj tiekol stále slabším prúdom až nakoniec prestal tiecť úplne. Aký (nenulový) objem čaju zostal v nádobe? Predpokladajte, že v čase, kedy Tinka zatvorila nádobu s čajom, mal vzduch

nad čajom atmosferický tlak 101325 Pa a teplotu 20 °C a po zatvorení nádoby sa zohrial na teplotu čaju (Tinka si medzitým žiadny čaj nenaliala). Teplota vzduchu sa následne nemenila. Uvažujte, že vzduch sa správa ako ideálny plyn a zanedbajte vyparovanie čaju. Hustota čaju je $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

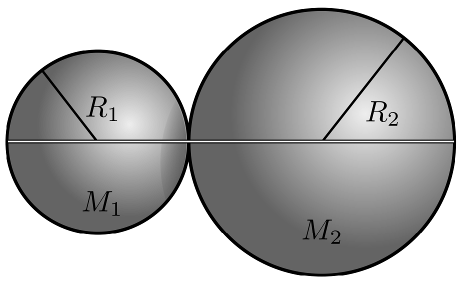
25. Kúzelník Lukáš vezme dva balíčky, v každom je N kariet. Tieto balíčky položí na stôl a zasúva do seba tak, že vo výslednom balíčku sa striedajú karty pôvodne z jedného a z druhého balíčka. Akou silou musí do seba vtláčať tieto balíčky tesne pred tým, ako sa spoja do jedného balíčka? Koeficient trenia medzi kartami navzájom aj medzi kartami a stolom je f a hmotnosť jednej karty je m.

26. Na štadióne magickej olympiády (MO) presne oproti sebe sú dva zosynchronizované reproduktory, čo hrajú ten istý harmonický signál s frekvenciou $f = 40\,\mathrm{Hz}$, ktorého amplitúda sa v čase a priestore nemení. Vzdialenosť reprákov je $d = 60\,\mathrm{m}$, rýchlosť zvuku je $c = 340\,\mathrm{ms^{-1}}$. Načrtnite body na štadióne, kde nebudete nič počuť.

27. Boromira by zaujímal odpor olympijských kruhov. Pomôžte mu, ak viete, že ráta odpor medzi bodmi A a B, kruhy majú polomer r a dĺžkový odpor λ. Naviac prieniky kruhov delia samotné kruhy na jednu a tri štvrtiny, a dva susediace kruhy v riadku sa vždy dotýkajú v jednom bode tak ako na obrázku.



28. Vo vzdialenej hviezdnej sústave si poletuje zvláštna dvojplanéta. Skladá sa z dvoch dotýkajúcich sa planét s polomermi R_1, R_2 a hmotnosťami M_1, M_2. Touto dvojplanétou vedie rovná diera prechádzajúca stredmi oboch planét. Do tejto diery pustíme pri povrchu planéty s hmotnosťou M_1 skúšobné teliesko. Akou rýchlosťou vyletí na druhej strane diery?



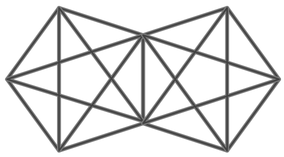
29. Kochov štvorec vznikne nasledovným algoritmom. Na začiatku máme štvorec s hranou a. V nasledujúcich krokoch (iteráciách) do stredu každej hrany dĺžky l zvonku prilepíme nový

štvorec s hranou $\frac{l}{k}$. Tieto kroky nekonečne veľakrát zopakujeme. Teraz uvažujme $k = 3$. Z takéhoto Kochovho štvorca odkrojíme z jednej strany pôvodného štvorca všetko to, čo na nej pribudlo po ďalších iteráciách a pozrieme sa na odrezanú časť. V akej výške nad stranou má táto časť ťažisko?

30. Jano a Hreha si hádžu elektricky nabitú loptičku s kladným nábojom q v kondenzátore, ktorý vytvára horizontálne homogénne elektrické pole s intenzitou E. Pritom sú stále ale v (tiež homogénnom) gravitačnom poli Zeme s tiažovým zrýchlením g. Jano a Hreha sú rovnako vysokí, loptičku vedia hádzať rovnakými rýchlosťami, z rovnakých výšok a pod rovnakými uhlami a nikdy inak. Postavili sa tak, že ich spojnica je rovnobežná so siločiarami elektrického poľa. Jano sa postavil ku kladnej doske kondenzátora a dohodil do vzdialenosti l, pričom loptička vystúpila do maximálnej výšky h. Do akej vzdialenosti dohodil Hreha?

31. Máme nádobu tvaru valca s polomerom R a je naplnená vodou s hustotou ρ do výšky h. Pri dne nádoby je zatiaľ zapchatá dierka s polomerom r, z ktorej vystrekujúca voda strieka vodorovne. Nádobu teraz položíme na hladký ľad a odopcháme dierku. Aké je zrýchlenie nádoby v prvom okamihu? Nádoba má zanedbateľnú hmotnosť voči hmotnosti vody.

32. Pekelník Hellboy si okrem otrasných tenisiek kúpil odpornú pracku na opasok:



Hellboy chce vedieť odpor pracky medzi dvoma najvzdialenejšími bodmi, ak má každá hrana odpor $R = 1110\,\Omega$ a hrany sú vodivo spojené len po obvode pracky.

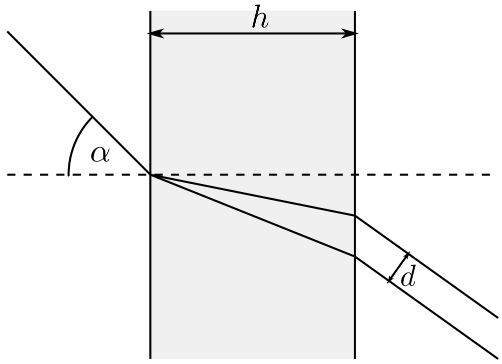
33. Zo Zeme hmotnosti M a polomeru R odlieta raketa, ktorej motory ju udržujú na rýchlosti $\sqrt{\frac{\kappa M}{R}}$. Cieľom je sa dostať priamo na Mesiac hmotnosti $m = \frac{M}{100}$ a polomerom $r = \frac{R}{4}$, ktorého stred je od stredu Zeme vzdialený $d = 60R$. Po akom čase môže raketa vypnúť motory? Vyjadrite pomocou M, R a konštánt.

34. Štyri guličky, každá nabitá nábojom Q, sú spojené každá s každou pružinami s tuhosťami k. Pružiny majú nulovú pokojovú dĺžku. Aká je dĺžka a hrany štvorca, ktorý vytvoria?

35. Sprchovať sa musí, preto máme sprchy, ktoré sú na otočnom kĺbe. Os otáčania sa je vodorovná. Hlavicu sprchy si môžeme predstaviť ako rovnú rúru o hmotnosti m a vnútornom objeme V. Prierez otvoru hlavice je S. Hustota vody je ρ. Akým objemovým prietokom musí voda vychádzať z hadice, aby bola rúra vo vodorovnej polohe a voda z nej striekala priamo nadol?

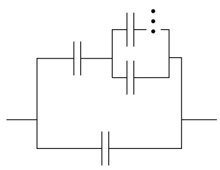
36. Závažie kmitá na pružine s periódou T. Pružinu chytíme, rozstrihneme v jednej tretine a upevníme závažie medzi tieto dva kusy pružiny. Druhými koncami ich pripevníme medzi dve steny tak, aby zase kmitalo okolo svojej rovnovážnej polohy. Aká je jeho perióda teraz?

37. Na sklenenú platňu hrúbky $h = 4\,\mathrm{cm}$ zasvietime lúčom bieleho svetla pod uhlom $\alpha = 45°$. Akú hrúbku d má dúha vychádzajúca z platne, ak indexy lomu skla pre červené a fialové svetlo sú $n_c = 1{,}510$ a $n_f = 1{,}531$?



38. Majo vyrobil zvláštnu kvapalinu, ktorej hustota rastie s hĺbkou podľa predpisu $\rho = \rho_0 + \lambda h$ a jej viskozita je nulová. Potom zobral homogénny valec hmotnosti m, výšky H s podstavou plochy S a ponoril ho tak, že jeho vrchná stena bola práve na úrovni hladiny. Následne ho pustil. Do akej maximálnej hĺbky sa ponorila *spodná* podstava valčeka?

39. Odpory došli, Dušan sa musí uspokojiť s nekonečným rebríkom … kondenzátorov s kapacitou C. Rebrík vyzeral tak ako na obrázku:



Len tak mimochodom, aká je jeho kapacita?

40. Máme hmotný bod na pružine tuhosti k, ktorá je druhým koncom upevnená na jeden bod vo vesmíre, okolo ktorého sa môže ľubovoľne otáčať. Pokojová dĺžka pružinky je 0. Zrazu ju natiahneme na l_0 a hmotnému bodu udelíme rýchlosť v_0 kolmo na pružinu. Ako najďalej sa dostane hmotný bod od bodu vesmíru, na ktorom je pružina uchytená?

41. Pružinu, ktorú používam ako prak, stlačím kameňom s hmotnosťou m tak, že jej dodám energiu E. Tento kameň nechám nepružne zraziť so stajacim nepriateľom s hmotnosťou M. Aký je potrebný pomer $\frac{m}{M}$, aby pozrážková rýchlosť bola maximálna?

42. Plťou sa chceme preplaviť po hornom okraji Niagarských vodopádov. Stále po okraji - aby sme dobre videli, ale aby sme nespadli. Plť sa plaví konštantnou rýchlosťou v_0 vzhľadom na vodu, rýchlosť Niagary narastá od brehu smerom do stredu ako $u = u_0\sqrt{\frac{x}{L/2}}$. Platí $u_0 < v_0$. Ako dlho nám to bude trvať?

Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1\,\mathrm{s} \Rightarrow h = 5\,\mathrm{m}$

$\boxed{2.}$ Tabuľku tvorí $N+1$ vodorovných čiar rozdelených na N častí a $N+1$ zvislých čiar rozdelených na N častí, kým štvorček má len 4 strany. Trvá mu to teda $\dfrac{2N(N+1)}{4}t$.

$\boxed{3.}$ Keď sa presunieme do vzťažnej sústavy spojenej s Paťom a teda aj Andrejom a eskalátorom, tak v tej sústave Paťo stojí, teda musí hádzať kolmo nahor.

$\boxed{4.}$ Výkon variča vieme spočítať ako $P = UI = \dfrac{U^2}{R}$. K dispozícii máme tri variče a ich celkový výkon chceme maximalizovať. Výkon každého jedného z nich závisí nepriamo úmerne od ich odporu, ktorý nemáme ako meniť. Závisí ale aj od štvorca napätia prechádzajúceho daným varičom. Toto napätie je pri rôznych zapojeniach rôzne. Ako vieme, tak napätie sa rozdeľuje medzi spotrebiče zapojené do série, zatiaľ čo zostáva konštantné pre spotrebiče zapojené paralelne. Napätie na jednotlivých varičoch nikdy nemôže byť väčšie ako napätie zdroja a preto môže každý varič vyvinúť maximálny výkon

$$P_{max} = \frac{U^2}{R}$$

Tento výkon dosiahne každý varič práve vtedy, keď je zapojený ku všetkým ostatným paralelne. A keď zapojíme paralelne všetky tri variče, dostaneme zo všetkých maximálny výkon P_{max} a teda aj maximálny súčet týchto výkonov $3P_{max}$.

$\boxed{5.}$ Najprv si rozoberme pohyb hladiny vo veľkom akváriu. Celková hmotnosť, ani objem Titanicu sa pri topení ľadovcov vnútri lode nezmenia. Niet preto dôvodu, aby sa výška hladiny vody v akváriu menila.

Archimedov zákon hovorí, že tiaž slanej vody vytlačenej sladkovodnými ľadovcami je rovná tiaži sladkovodného ľadovca. Keďže ale sladká voda má menšiu hustotu než slaná voda, po roztopení bude mať väčší objem, než vytlačená slaná voda, a hladina v podpalubí stúpne.

$\boxed{6.}$ Krabicu si môžeme rozdeliť na jednotlivé obdĺžnikové steny. Ťažisko každej obdĺžnikovej steny sa nachádza v priesečníku uhlopriečok príslušných obdĺžnikov. Preto pre z-ovú polohu ťažiska vzhľadom na stred spodnej podstavy platí

$$z_T = \frac{(2m_{ac} + 2m_{ab})\,a/2}{M},$$

kde m_{ab} a m_{ac} sú hmotnosti príslušných stien krabice a M je hmotnosť celej krabice. Využitím vzájomného vzťahu $(m_{bc} + m_{ac})$ a M daného rovnicou

$$(m_{bc} + m_{ac}) = \frac{2ab + 2ac}{bc + 2ab + 2ac}M$$

dostávame pre výšku ťažiska

$$z_T = a\frac{ab+ac}{bc+2ab+2ac} \ .$$

$\boxed{7.}$ Nápoj bude mať minimálnu teplotu vtedy, keď sa všetok ľad roztopí. Potom kalorimetrická rovnica pre výmenu tepla v nápoji bude vyzerať nasledovne:

$$m_{\texttt{ľad}} l = m_{\texttt{nápoj}} c(t_1 - t)$$

$$t = t_1 - \frac{m_{\texttt{ľad}} l}{m_{\texttt{nápoj}} c} \approx -23\,^\circ\mathrm{C}$$

Výsledok nám hovorí, že by sme mali mať vodu s teplotou nižšou, aká bola teplota ľadu na začiatku. Chyba je v tom, že ľad sa nerozpustil celý. Keď teplota vody klesla na bod mrazu, tepelná výmena medzi ľadom a vodou prestala. Takže Kaja pila nápoj s teplotou 0 °C.

$\boxed{8.}$ Keď ide výťah z prvého na piate, prejde 4 poschodia. Keď ide z prvého na pätnáste, prejde 14 poschodí. Takže nám stačí prvý z pohybov rozseknúť v polovici a vložiť doň rovnomerný pohyb cez 10 poschodí ustálenou rýchlosťou v. Ten bude trvať $t_1 = \dfrac{10\,\text{posch,}}{v} = 2{,}5$ minúty. Už len sčítame t a t_1 a zistíme, že pohyb z prvého na pätnáste trvá 4 minúty.

$\boxed{9.}$ Zmena potenciálnej energie je $-(\lambda l)gl/2$, kde λl je hmotnosť odtočeného kúsku dĺžky l a dĺžkovej hustoty λ. Keďže sa roztáča aj lano na kladke, hýbe sa celé lano rovnakou rýchlosťou. Jeho kinetická energia je $\dfrac{1}{2}(\lambda L)v^2$.

Použijeme ZZE: $\dfrac{1}{2}\lambda L v^2 = \lambda l g l/2$, odtiaľ: $\omega = v/R = \dfrac{l\sqrt{g/L}}{R}$.

$\boxed{10.}$ Zaujíma nás výška, z ktorej bude loptička padať dvojnásobný čas než z výšky h. Keďže $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, $H = 4h$.

$\boxed{11.}$ Na bombu pôsobí gravitačná sila smerom nadol. Bomba bude teda smerom dole zrýchlovať so zrýchlením g. Kým spadne o výšku h, bude jej to trvať

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ .$$

Nakoľko však vo vodorovnom smere na bombu sila nepôsobí, bude sa v tomto smere pohybovať rovnomerne priamočiaro. Nakoľko sa holuby pri vypúšťaní bomby vzájomne približujú rýchlosťou $2v$, bude sa takto rýchlo približovať aj Luxuskova bomba ku Kaktuskovi. Keďže jej to bude trvať už spomínaný čas t, preletí vo vodorovnom smere vzdialenosť

$$l = 2v\sqrt{\frac{2h}{g}} \ .$$

Hľadaná vzdialenosť je $\sqrt{h^2 + 4v^2\frac{2h}{g}}$.

$\boxed{12.}$ Označme si M hmotnosť planéty a R jej polomer. Keďže družica s hmotnosťou m letí tesne nad povrchom planéty, znamená to, že ju obieha po kružnici s polomerom R. Aby sa teleso pohybovalo rovnomerne po kružnici, musí naň pôsobiť dostredivá sila F_d, ktorá je v tomto prípade rovná gravitačnej sile F_G, ktorou je družica priťahovaná k planéte.

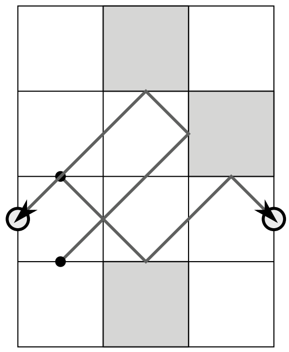
$$F_d = F_G$$

$$m\frac{v^2}{R} = \kappa\frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \kappa\frac{M}{R}$$

Rýchlosť obehu si vieme vyjadriť ako podiel prejdenej dráhy za periódu T: $v = \dfrac{2\pi R}{T}$, hmotnosť planéty vieme vyjadriť ako $M = \rho V$, kde $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ je objem planéty a dostávame:

$$\rho = \frac{3\pi}{T^2\kappa}$$

$\boxed{13.}$



$\boxed{14.}$ Práca potrebná na vynesenie telesa s hmotnosťou m v homogénnom gravitačnom poli do výšky h je známe $W_1 = mgh$. Práca potrebná na prenesenie telesa s hmotnosťou m zo zemského povrchu do nekonečna je až na znamienko rovná potenciálej energii telesa v skutočnom gravitačnom poli Zeme na jej povrchu[1], čo je

$$W_2 = \kappa\frac{mM_Z}{R_Z}\ .$$

Porovnaním $W_1 = W_2$ dostaneme geopotenciálnu výšku

$$h = \kappa\frac{M_Z}{R_Z}\frac{1}{g} = R_Z = 6378\,\mathrm{km},$$

[1]Rozdiel v znamienku pochádza z toho, že potenciálna energia telesa v gravitačnom poli Zeme na jej povrchu je definovaná ako práca potebná na prenesenie telesa z nekonečna na zemský povrch.

čiže polomer Zeme.

$\boxed{15.}$ Prvá húsenica, ktorá je na zemi, lezie rýchlosťou v vzhľadom na zem. Druhá, ktorá je na prvej, lezie rýchlosťou v vzhľadom na prvú húsenicu, a teda rýchlosťou $v + v = 2v$ vzhľadom na zem. N-tá húsenica lezie rýchlosťou v vzhľadom na N-1. húsenicu, a teda rýchlosťou $(N-1)v + v = Nv$ vzhľadom na zem. Mám teda na sebe N húseníc s rýchlosťami v, $2v$ … Nv vzhľadom na zem. Priemernú rýchlosť húsenice z toho vypočítam ako $\frac{v + 2v + ,,, + Nv}{N} = \frac{N(N+1)v}{2N} = \frac{(N+1)v}{2}$.

$\boxed{16.}$ Použijeme ZZE:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Grafom bude zrejme teda elipsa. Zjavne ju budeme môcť zapísať ako

$$\frac{x^2}{x_{\max}^2} + \frac{p^2}{p_{\max}^2} = 1\ .$$

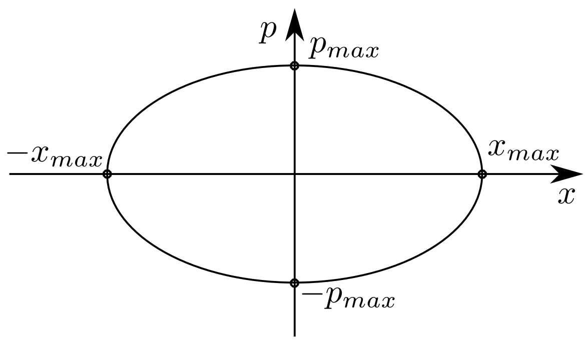
Priesečníky so súradnicovými osami nájdeme po dosadení $x = 0$ a $p = 0$. Tým zistíme, že naša elipsa sa s osou x pretína v bodoch $x_{\max}$ a $-x_{\max}$ a s osou p v bodoch $p_{\max}$ a $-p_{\max}$.

Maximálnu hybnosť opäť vypočítame zo zákona zachovania energie E_{kinmax}(rovnovážna poloha) $=$ $= E_{\text{potmax}}$(krajná poloha). Teda

$$\frac{p_{\max}^2}{2m} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

Z toho získame $p_{\max} = \sqrt{km}\, x_{\max}$.

Hľadaný graf vyzerá takto:



$\boxed{17.}$ Tlaková - horizontálna sila F_H sa prenáša a je všade konštantná, keďže sústava nezrýchľuje do strany. Ďalej vieme, že súčet vertikálnych trecích síl po stranách dosky musí vždy kompenzovať jej tiaž F_g. Situácia je symetrická, sily na ľavej strane od stredu sú rovnaké ako napravo. Z rovnováhy vertikálnych trecích síl F_S pôsobiacich na strednú dosku máme $F_S = F_g/2$. Na vonkajšie dosky pôsobí z vnútornej strany trecia sila F_S smerom dole a z vonkašej strany sila F_V smerom hore. Preto musí platiť $F_g + F_S = F_V$. Odtiaľ dostávame $F_V = 3F_g/2$. Tlaková sila

$F_H = \dfrac{3F_g}{2f}$ je dostatočná na vznik potrebných trecích síl na vonkajších plochách. Na vnútorných stranách stačí menšia tlaková sila a preto sa nebudú šmýkať ani tam.

$\boxed{18.}$ Tepelný výkon, ktorý tečie plochou S medzi oblasťami vzdialenými d s teplotným rozdielom ΔT, je

$$Q = \lambda S \frac{\Delta T}{d} \ .$$

Na našom rozhraní bude po ustálení voda a ľad v rovnováhe. To znamená, že musia mať rovnakú teplotu $t_0 = 0^\circ$ C, pri inej by sa buď ľad topil, alebo voda mrzla.

Aby voda a ľad boli v rovnováhe, musí tiež platiť, že výsledný výkon prichádzajúci na toto rozhranie cez vodu a ľad je nulový. Bude preto platiť:

$$P_V + P_L = 0 \Rightarrow \lambda_V S \frac{t_V - t_0}{d} \tau + \lambda_L S \frac{t_L - t_0}{h - d} \tau = 0$$

Potom pre vzdialenosť d od teplejšej platne bude platiť:

$$d = h \frac{\lambda_V \left(t_V - t_0\right)}{\lambda_L \left(t_0 - t_L\right) + \lambda_V \left(t_V - t_0\right)},$$

kde po dosadení hodnôt dostaneme $d = \dfrac{1}{11}\,\mathrm{m} = 0{,}091\,\mathrm{m}$.

$\boxed{19.}$ Ak na Filipa dopadlo N guľôčok za čas t, znamená to, že čas medzi dvomi zásahmi bol $\Delta t = \dfrac{t}{N}$ Inak povedané: Filipa práve trafila guľôčka, chvíľu nič a po čase Δt dostal ďalší zásah. Za tento čas Δt Filip prebehol vzdialenosť $v\Delta t$ a guľôčka vzdialenosť $u\Delta t$. Súčet týchto vzdialeností predstavuje vzdialenosť medzi dvomi letiacimi guľôčkami.

$$\Delta s = v\Delta t + u\Delta t$$

Keď beží Filip smerom od súpera, guľôčky ho dobiehajú. Tesne po tom, ako Filip dostane zásah, je za ním vo vzdialenosti Δs guľôčka letiaca rýchlosťou u. Táto guľočka ho trafí po nejakom čase $\Delta t'$. Za tento čas prebehne Filip vzdialenosť $v\Delta t'$ a guľôčka musí prejsť vzdialenosť $\Delta s + v\Delta t' = u\Delta t'$. Z toho vieme vypočítať čas medzi dvomi zásahmi.

$$\Delta t' = \frac{\Delta s}{u - v} = \frac{u + v}{u - v}\Delta t = \frac{u + v}{u - v}\frac{t}{N}$$

Počet guľôčok, ktoré trafili Filipa za čas t je potom

$$N' = \frac{t}{\Delta t'} = \frac{u - v}{u + v} N \ .$$

20. Využijeme analógiu medzi pohybmi a uvedomíme si, že vzorec pre rýchlosť pri rovnomernom zrýchlení zrýchlenia[2] $b = \dfrac{\Delta a}{\Delta t}$ musí byť rovnaký ako pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, len význam veličín je trochu iný.

Pozrime sa najskôr na rovnomerne zrýchlený pohyb. Vieme, že dráha prejdená za čas t sa vypočíta zo vzťahu$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, teda:

$$v = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2}bt^2$$

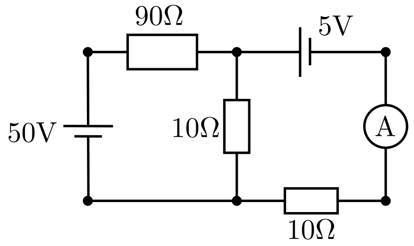
Teraz môžme počítať. Keďže sa Jimiho auto rozvbiehalo z pokoja, máme $v_0 = 0$ a tiež $a_0 = 0$. Pre čas t_1 platí:

$$v_1 = \frac{1}{2}bt_1^2$$

z čoho vieme vyjadriť $b = 2v_1/t_1^2$. To dosadíme do výrazu pre čas t_2 a zistíme, že v tomto čase išlo Jimiho auto rýchlosťou

$$v_2 = \frac{t_2^2}{t_1^2}v_1 \ .$$

21. Správnych zapojení je viacero, no jedno z najjednoduchších vyzerá takto:



• • •

22. Naša stratégia bude nasledovná. Najskôr si vypočítame silu, ktorou je napínaný motúz, následne pomocou momentovej vety vypočítame uhlové zrýchlenie, ktoré prepočítame na hľadané zrýchlenie pádu joja.

Silu napínania motúzu vypočítame pomocou zákona sily (3. Newtonov zákon).

$$F = ma$$

$$mg - T = ma \implies T = m\,(g - a)$$

Na základe momentovej vety platí:

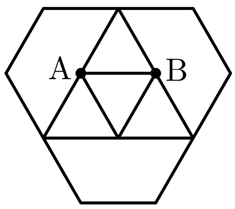
$$M = TR = m\,(g - a)\,R = I\varepsilon$$

[2] Po česky sa nazýva ryv, po anglicky vtipným slovom jerk.

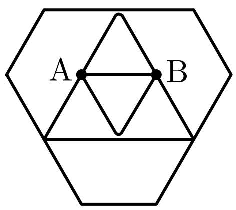
Využitím $a = R\varepsilon$ dostaneme:

$$a = \frac{m\,(g-a)\,R^2}{I} \Rightarrow a = \frac{mgR^2}{(I - mR^2)}$$

$\boxed{23.}$ Najprv si zjednodušíme túto úlohu a to tak, že kruhy zameníme za pravidelné šesťuholníky, pričom zachováme odpory. Čiže jedna hrana šesťuholníka bude mať odpor $R = \frac{1}{3}\pi r\lambda$. Obrázok si teda ľahko prekreslíme:



Ako vidíme, toto zapojenie je osovo symetrické. Vezmime si teda všetky body na osi a každý z nich rozdelme na dva, ktoré sú spojené vodičom s nulovým odporom(chceme, aby si zachovali rovnaký potenciál). Po chvíli zamyslenia prídeme na to, že danými spojeniami tečie nulový prúd, takže ich môžme pokojne prestrihnúť. No a takto dostaneme jednoduché zapojenie, ktoré je zložené iba zo sériových a paralelných zapojení.



Teraz si môžeme zapísať rovnicu pre výsledný odpor:

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{6R}}}$$

Už to iba upravíme a dostaneme výsledný odpor Boromirovych kruhov $R_v = \frac{3}{7}R = \frac{\pi r\lambda}{7}$.

$\boxed{24.}$ Na začiatku mal vzduch nad čajom tlak $p_{\mathrm{atm}} = 101325\,\mathrm{Pa}$ a teplotu $T_0 = 293,15\,\mathrm{K}$. Z tohto stavu sa izochoricky (lebo objem čaju pod ním sa nemenil, keďže si Tinka nič nenaliala) zohrial na teplotu $T = 353,15\,\mathrm{K}$. Tým sa jeho tlak zvýšil na

$$p = p_{\mathrm{atm}} \frac{T}{T_0}$$

Ako si Tinka postupne napúšťa čaj, zvyšuje sa objem, ktorý zaberá vzduch a tým klesá jeho tlak. Keď je tlak vytláčajúci čaj z nádoby (súčet tlaku vzduchu nad čajom a hydrostatického tlaku čaju) rovný atmosferickému, čaj prestane tiesť. Keďže teplota vzduchu v nádobe je stála, ide o izotermický dej a platí:

$$p(V - V_0) = (p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{hydr}})(V - V_{\mathrm{fin}})$$

Hydrostatický tlak je $p_{\mathrm{hydr}} = h_{\mathrm{fin}}\rho g = V_{\mathrm{fin}}\rho g/S$, kde S je plocha podstavy nádoby. Dosadením za hydrostatický tlak a za tlak p z rovnice izochorického deja dostaneme kvadratickú rovnicu

$$V_{\mathrm{fin}}^2 \frac{\rho g}{S} - V_{\mathrm{fin}} \left(p_{\mathrm{atm}} + \frac{V\rho g}{S} \right) + p_{\mathrm{atm}} V - p_{\mathrm{atm}} \frac{T}{T_0} (V - V_0) = 0$$

ktorej riešením je 3,74 litra.

$\boxed{25.}$ Stláčaniu kariet bráni trenie a silu pri spájaní balíčkov treba na to, aby sme toto trenie prekonali. V krajnom prípade je sila potrebná na stlačenie kariet rovná celkovej trecej sile, ktorá pôsobí medzi kartami. Našou úlohou je teda vypočítať treciu silu.

Ak máme na stole položenú jednu kartu, medzi ňou a stolom pôsobí trecia sila veľkosti fmg. Ak je na nej položená ďalšia karta, medzi spodnou kartou a stolom pôsobí trecia sila veľkosti $f2mg$ a medzi vrchnou a spodnou kartou pôsobí trecia sila veľkosi fmg. Celková trecia sila je $fmg + 2fmg = 3fmg$. Pre N kariet treba sčítať postupne všetky trecie sily medzi prvou a druhou kartou, druhou a treťou $\ldots$ N-tou kartou a stolom. To je

$$F = fmg + 2fmg + 2fmg + \ldots + Nfmg = (1 + 2 + \ldots + N)fmg = \frac{N(N+1)}{2} fmg\ .$$

$\boxed{26.}$ Z obidvoch reprákov sa šíria rovnaké zvukové vlny s rovnakou frekvenciou f. Takáto vlna šíriaca sa prostredím má okamžitú výchylku v čase t a vzdialenosti od zdroja x

$$y = y_m \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right),$$

kde $\omega = 2\pi f$ je uhlová frekvenica. Fáza tejto vlny je

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)\ .$$

Aby v nejakom mieste nebolo počuť žiaden zvuk, musia byť fázy vĺn od oboch zdrojov opačné, t.j. fázový rozdiel týchto dvoch vĺn musí byť rovný nepárnemu násobku π. Bude teda platiť, že

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\,\pi,$$

$$\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right) - \omega \left(t - \frac{x_2}{c} \right) = (2k+1)\,\pi,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Túto rovnicu ďalej upravujeme:

$$2\pi f \left(\frac{x_2}{c} - \frac{x_1}{c} \right) = (2k+1)\,\pi$$

$$x_2 - x_1 = \frac{2c}{f}(2k+1)$$

Analogicky musí platiť aj

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi\ .$$

Všeobecne teda bude platiť, že

$$|x_2 - x_1| = \frac{2c}{f}(2k+1)\ .$$

Keď sa na túto rovnicu pozrieme bližšie, uvidíme, že na pravej strane máme konštantu. Znamená to, že rozdiel vzdialeností od oboch reprákov je konštantný. A to nám pripomína definíciu hyperboly. Tá je totiž definovaná ako množina bodov, ktoré majú od dvoch pevných bodov konštantný rozdiel vzdialeností. Ešte ale máme jednu premennú - k. Najmenšie k môžme zvoliť $k = 0$. Keby sme zvolili menšie, dostali by sme rovnicu, ktorá nemá riešenie. Akú ale môžme zvoliť najväčšiu hodnotu? Najväčší možný rozdiel hodnôt je vzájomná vzdialenosť reprákov d. Potom maximálna hodnota k je

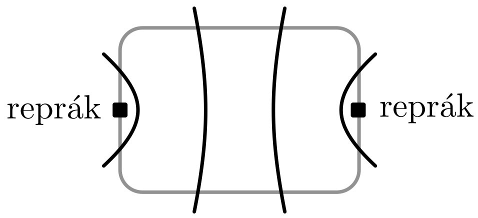
$$d \geq \frac{2c}{f}(2k+1)$$

$$k \leq \frac{df}{4c} - \frac{1}{2} = 1,26$$

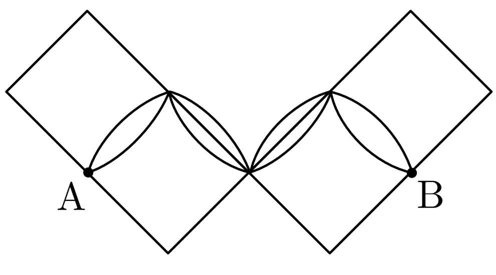
a celkový počet k (a teda aj počet hyperbol)

$$n = \lfloor \frac{df}{4c} - \frac{1}{2} \rfloor + 1 = 2\ .$$

Ale vráťme sa k zadaniu. Na štadióne sa teda budú nachádzať 2 hyperboly na každej strane s ohniskami v reprákoch tak, ako to môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku.



27. Naše kruhy si opäť vieme transformovať na iný tvar, tentokrát na štvorce, ktorých hrana bude mať odpor $R = \frac{1}{2}\pi r\lambda$. Aj táto odporová schéma je symetrická, čiže body, ktoré sa nachádzajú na osi súmernosti, budú mať rovnaký potenciál. Nič sa teda nestane, ak ich tentokrát spojíme bezodporovým drôtom, čiže z nich urobíme jeden bod. Takto dostaneme nasledujúcu schému, kde má každá hrana odpor R.



Znova staré známe sériové a paralelné zapojenia. Takže pre odpor medzi bodmi A a B bude platiť:

$$\frac{2}{R_v} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}}} + \frac{1}{2R}$$

Po dlhých úpravách dostaneme $R_v = \frac{32}{29}R = \frac{16}{29}\pi r\lambda$.

$\boxed{28.}$ Kľúčovým je uvedomenie si, že nás nezaujíma priebeh pohybu telieska, ale iba počiatočný a koncový stav a tiež fakt, že v gravitačnom poli sa celková energia telesa zachováva. Preto je zákon zachovania energie presne to, čo potrebujeme. Tak si ho pre našu sitáciu zapíšeme:

$$-\kappa\frac{M_1 m}{R_1} - \kappa\frac{M_2 m}{2R_1+R_2} = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{M_2 m}{R_2} - \kappa\frac{M_1 m}{R_1+2R2}$$

Odtiaľto už ľahko dostaneme hľadanú rýchlosť telieska:

$$v = 2\sqrt{\kappa\left(M_2\frac{R_1}{R_2(2R_1+R_2)} - M_1\frac{R_2}{R_1(R_1+2R_2)}\right)}$$

$\boxed{29.}$ Keď sa zamyslíme, alebo si pekne nakreslíme prvých pár iterácií, môžeme vidieť, že po nekonečnom počte iterácií vznikne z Kochovho štvorca naozaj zaplnený štvorec so stranou dĺžky $\sqrt{2}a$ otočený o $45°$ voči pôvodnému. Čiže úloha po nás vlastne chce vyrátať ťažisko rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ktorý vznikne po odrezaní. Jeho prepona je totožná s pôvodnou stranou a, jeho výška je $a/2$ a ťažisko je teda vo výške $a/6$.

$\boxed{30.}$ Nech teda Jano (Hreha) hádže počiatočnou rýchlosťou v_0 pod uhlom α. V y-ovom smere pôsobí tiažová sila smerom nadol, rýchlosť v tomto smere sa s časom mení podľa vzťahu

$$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt\ .$$

Elektrická sila urýchľuje alebo spomaľuje loptičku zrýchlením qE/m podľa toho, či hádže Jano alebo Hreha. Rýchlosť v x-ovom smere sa mení podľa vzťahu (+ ak hádže Jano, − ak hádže Hreha)

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \pm \frac{qE}{m}t\ .$$

Pozrime sa na najskôr na Janov hod. V čase $t_\mathrm{v} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ loptička vyletela do maximálnej výšky $h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. V čase $t_\mathrm{d} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ dopadla na zem a medzitým prešla v x-ovom smere dráhu

$$l = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{2qEv_0^2\sin^2\alpha}{mg^2} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{4qE}{mg}h\ .$$

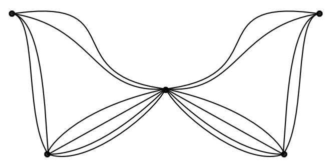
V prípade Hrehovho hodu vyzeral pohyb v y-ovom smere rovnako, ale v x-ovom smere prešla loptička dráhu
$$l' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{4qE}{mg}h\ .$$
Ak za prvý zlomok dosadíme z výrazu pre l, dostaneme výsledok
$$l' = l - \frac{8qE}{mg}h\ .$$

$\boxed{31.}$ Nakoľko v smere vystrekovania vody z nádoby nepôsobí na nádobu ani vodu v nej žiadna sila, hybnosť v tomto smere sa bude zachovávať. Ak teda za časový interval Δt vytečie objem vody s celkovou hybnosťou Δp, získa rovnakú hybnosť, ale opačného smeru, aj nádoba s vodou.

Z nádoby bude striekať voda rýchlosťou $v_d = \sqrt{2gh}$ podľa Torricelliho vzťahu. Za Δt vytečie z nádoby voda s celkovou hybnosťou Δt rovnou
$$\Delta p = \Delta V \rho v_d = S_d v_d \Delta t \rho v_d\ .$$

O rovnakú hybnosť (opačného smeru) sa zmení aj hybnosť nádoby s hmotnosťou M, teda máme
$$M\Delta v_n = S_h h\rho \Delta v_n = \Delta p = S_d \rho v_d^2 \Delta t,$$
odkiaľ využitím vyššieodvodeného vzťahu $v_d = \sqrt{2gh}$ dostaneme
$$a_n = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{S_d 2gh}{S_h h} = 2g\frac{S_d}{S_h} = 2g\frac{r^2}{R^2}\ .$$

$\boxed{32.}$ Hellboyova pracka je pekne symetrická podľa osi prechádzjúcej najvzialelenejšími bodmi. Keď urobíme osovú symetriu podľa tejto osi, tak sa nám jedna trojica bodov zobrazí na druhú a naopak. Takto môžeme utvoriť 3 páry bodov s rovnakým potenciálom. Keďže majú rovnaký potenciál, nič sa nestane, ak ich spojíme do jedného bodu. Teraz sa pozrieme na odporovú pracku ešte raz a zistíme, že to už ľahko dopočítame, lebo si to môžme prekresliť na takéto zapojenie:



Pre výsledný odpor potom dostaneme:
$$R_v = 2\frac{\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{4}\right)\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2}} = \frac{3}{5}R = 666\,\Omega$$

33. Keď raketa vypne motory so vzdialenosti x od stredu Zeme, bude platiť ZZE:

$$-\frac{\kappa M}{x} - \frac{\kappa m}{d-x} + \frac{1}{2}v^2 = -\frac{\kappa M}{d-r} - \frac{\kappa m}{r}$$

Dosadíme do tejto kvadratickej rovnice hodnoty a výjdu nám dva korene $x \approx 1{,}8R$ a $x \approx 59{,}98R$, nás zaujíma ten menší. Raketa bude teda potrebovať prejsť len dráhu $\approx 0{,}8R$, lebo štartuje na zemskom povrchu:

$$t = \frac{0{,}8R}{\sqrt{\frac{\kappa M}{R}}} = 0{,}8R\sqrt{\frac{R}{\kappa M}}$$

34. Označme guličky $ABCD$ v kladnom smere. Vyberme si jednu guličku a vypočítajme silu F v smere od stredu. V rovnovážnom stave musí byť výslednica síl nulová, teda $F = 0$.

Pružinka AC prispieva silou $k\sqrt{2}a$, samotný náboj C ju odpudzuje silou $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(\sqrt{2}a)^2}$.

Sily od pružiniek AB a AD, podobne ako odpudivé sily od nábojov B a D pôsobia pod uhlom 45°, prispievajú preto len $1/\sqrt{2}$ svojej veľkosti. Hodnoty príspevkov od pružiniek teda sú $ka/\sqrt{2}$ a elektrických odpudivých síl $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Všetko dokopy teda dáva:

$$k\sqrt{2}a + 2ka/\sqrt{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(\sqrt{2}a)^2} + 2\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$ka\left(\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon k}\frac{1+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)^{1/3}$$

35. Aby bola sprcha vo vodorovnej polohe, musí byť nulový súčet momentov síl na ňu pôsobiacich. V polovici hadice na sprchu pôsobí ťiažová sila F_g a na konci na ňu pôsobí silou F_v voda, ktorá vystrekuje z hadice. Aby boli momenty týchto síl v rovnováhe, musí platiť, že

$$F_v l = mg\frac{l}{2}\ .$$

Poďme sa teda pozrieť na veľkosť sily F_v.

Každú sekundu hadicu opúšťa voda o objeme Sv a hmotnosti $Sv\rho$. Voda vytekajúca z hadice sa pri vytekaní z hadice „odráža“ od hadice, čiže jej odovzdáva svoju hybnosť. Celková hybnosť vody vytečenej z hadice za sekundu je teda

$$vQ\rho = \frac{Q^2}{S}\rho\ .$$

Nakoľko mala voda pred opustením hadice nulovú rýchlosť v smere kolmom na hadicu, platí pre silu, ktorou pôsobí voda na hadicu,

$$F_v = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Q^2}{S}\rho \ .$$

Z vyššie spomínanej rovnice pre rovnováhu momentov síl dostávame

$$(m + \rho V)\, g\frac{l}{2} = \frac{Q^2}{S}\rho l,$$

odkiaľ pre hľadaný prietok platí:

$$Q = \sqrt{\frac{(m + \rho V)Sg}{2\rho v}}$$

$\boxed{36.}$ Tuhosť pružín po rostrihnutí je $k' = \frac{l_0}{l'}k_0$, čiže v našom prípade $k_1 = 3k_0$ a $k_2 = \frac{3}{2}k_0$. Nová perióda teda bude $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0(3 + 3/2)}} = T\sqrt{\frac{2}{9}}$.

$\boxed{37.}$ Na sklenenú platňu nám dopadá svetlo zložené zo všetkých farieb od fialovej až po červenú. Pri prechode do platne sa tieto lúče zlomia podľa Snellovho zákona.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_c} = n_c \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_f} = n_f$$

Pri prechode z platne sa tieto lúče opäť zlomia a budú vychádzať pod uhlami

$$\frac{\sin\beta_c}{\sin\gamma_c} = \frac{1}{n_c} = \frac{\sin\beta_c}{\sin\alpha},$$

$$\sin\alpha = \sin\gamma_c,$$

a teda $\alpha = \gamma_c$. Analogicky si môžeme všimnúť, že platí aj $\alpha = \gamma_f$. Lúče vychádzajúce z platne budú rovnobežné. A už nám stačí iba zistiť, akú hrúbku bude mať takto vzniknutá dúha. Najprv sa poďme pozrieť, akú hrúbku má dúha, ktorá vznikne na okraji platne. Na to potrebujeme vedieť, o koľko sa fialový a červený lúč odklonia od kolmice na platňu.

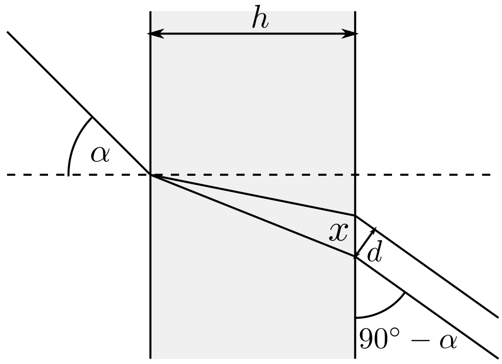
$$x_f = h\tan\beta_f = h\tan\left[\arcsin\left(\frac{1}{n_f}\sin\alpha\right)\right], \quad x_c = h\tan\beta_c = h\tan\left[\arcsin\left(\frac{1}{n_c}\sin\alpha\right)\right]$$

Keďže podľa zadania $n_f > n_c$, tak bude platiť aj $\beta_f < \beta_c$, a teda $x_f < x_c$. Hrúbka dúhy na skle potom bude

$$x = x_c - x_f \ .$$

Tieto lúče sa následne opäť zlomia a pokračujú pod uhlom α. Lúče potom zvierajú so sklenenou platňou uhol $90° - \alpha$. Hrúbka dúhy sa dá potom jednoducho vyjadriť pomocou tohto uhla.

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{d}{x}$$



Odtiaľto už si bez problémov vyjadríme hrúbku dúhy

$$d = h\sin(90^\circ - \alpha)\left[\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_f}\sin\alpha\right)\right) - \tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_f}\sin\alpha\right)\right)\right]$$

a po dosadení dostávame $d = 0{,}026\,\mathrm{cm}$.

$\boxed{38.}$ Zistime najskôr, ako sa v tejto divnej kvapaline vypočíta hydrostatický tlak. Ten je definovaný ako tlak kvapalinového stĺpca. Predstavme si valcový stĺpec kvapaliny siahajúci od hladiny až po hĺbku h. Tento stĺpec tlačí na spodné vrstvy kvapaliny svojou tiažovou silou mg. Aká je jeho hmotnosť? Keby išlo o kvapalinu s konštantnou hustotou, bola by rovná $Sh\rho$. Hustota sa s hĺbkou mení lineáne, čo nám umožňuje nahradiť stĺpec našej kvapaliny iným stĺpcom s konštantnou hustotou a to priemernou hustotou, čo je hustota, akú má náš stĺpec v polovici svojej hĺbky. Sila, ktorou tlačí náš stĺpec v hĺbke h, je teda $Sh\rho(h/2)$ a hydrostatický tlak získame po predelení plochou:

$$p_\mathrm{h}(h) = \frac{1}{2}h\rho_0 g + \frac{1}{2}\lambda g h^2$$

Vztlakovú silu pôsobiacu na valec s výškou H a plochou podstavy S, ktorého spodná podstava je v hĺbke h, vypočítame ako rozdiel tlakových síl pôsobiacich na jeho podstavy.

$$F_\mathrm{vz} = p(h+H)S - p(h)S = \frac{1}{2}\rho_0 gSH + \frac{1}{2}\lambda gSH^2 + \lambda gSHh$$

Celková sila pôsobiaca na valec smerom nadol je rozdiel tiažovej a vztlakovej sily.

$$F = mg - \frac{1}{2}\rho_0 gSH - \frac{1}{2}\lambda gSH^2 - \lambda gSHh = F_0 - Kh$$

Celková sila má teda konštantnú zložku, ktorú sme si oznčili F_0, a zložku závislú od hĺbky s konštantou úmernosti, ktorú sme si označili K.

Čo vieme vyčítať zo vzťahu pre silu F? Napríklad to, že existuje hĺbka, v ktorej je celková sila pôsobiaca na valček nulová. Je to hĺbka $h_0 = \dfrac{F_0}{K}$. Dosadením do vzťahu pre silu za F_0 dostanme:

$$F = Kh_0 - Kh = K(h_0 - h) = K\Delta h$$

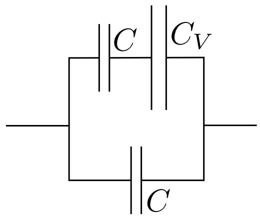
Ak je valček ponorený do menšej hĺbky, ako je táto, celková sila naň pôsobiaca smeruje nadol. Ak je ponorený do väčšej hĺbky, celková sila smeruje nahor. Vzťah pre silu vo vektorovej podobe vyzerá nasledovne:

$$\vec{F} = K\vec{\Delta h}$$

To znamená, že sila je priamo úmerná výchylke a pôsobí proti smeru výchylky – je to sila, aká pôsobí na harmonický oscilátor. Aj náš valček je teda oscilátorom, valček kmitá okolo rovnovážnej hĺbky h_0. Počiatočná poloha valčeka pri hladine je vlastne vychýlením oscilátora do nejakej počiatočnej polohy (maximálnej výchylky) v jednom smere. Do druhého smeru sa počas kmitania valček vychýli o rovnakú maximálnu výchylku, teda h_0, čo znamená, že bude v celkovej hĺbke $2h_0$. To je aj hľadaná maximálna hĺbka, do ktorej sa valček ponorí:

$$h_{\text{fin}} = 2h_0 = \frac{2mg - \rho_0 gSH - \lambda gSH^2}{\lambda gSH}$$

39. Dušanov rebrík je nekonečný, takže sa naozaj nič nestane, pokiaľ k pôvodnému pripojíme jeden kondenzátor sériovo, a k tomu celému zapojíme druhý paralelne. Nekonečno ako nekonečno, čiže výsledná kapacita rebríka sa nezmení.



Pre výslednú kapacitu bude platiť:

$$C_v = C + \frac{C_v C}{C_v + C}$$

$$C_v = \frac{1+\sqrt{5}}{2}C$$

40. Vo vesmíre musí platiť ZZ energie a ZZ momentu hybnosti, čiže platí aj na začiatku a aj v mieste maximálnej vzdialenosti l_m. Energia sa skladá z kinetickej energie bodu a potenciálnej energie pružinky, ZZE preto je $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}kl_m^2$. ZZMH hmotného bodu vzhľadom na bod uchytenia je $mv_0l_0 = mv_ml_m$. Vyjdaríme $v_m = \frac{v_0 l_0}{l_m}$ a dosadíme do ZZE $v_0^2 + \frac{k}{m}l_0^2 = v_0^2\left(\frac{l_0}{l_m}\right)^2 + \frac{k}{m}l_m^2$. Označme $\frac{k}{mv_0^2} = \varepsilon$. Potom $(1+\varepsilon l_0^2)l_m^2 = l_0^2 + \varepsilon l_m^4$. Riešením kvadratickej rovnice je $l_m^2 = \frac{1+\varepsilon l_0^2 \pm \sqrt{(1+\varepsilon l_0^2)^2 - 4\varepsilon l_0^2}}{2\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon l_0^2 \pm (1-\varepsilon l_0^2)}{2\varepsilon}$. Zaujíma nás koreň iný ako l_0^2. Maximálna vzdialenosť teda je $l_m = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}}$.

$\boxed{41.}$ Rýchlosť, na ktorú urýchli prak kameň, je $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Počas zrážky platí ZZH, preto rýchlosť po zrážke je $v_1 = \frac{mv_0}{m+M} = \frac{\sqrt{2Em}}{m+M}$. Derivujeme, aby sme našli maximum:

$$0 = \frac{\sqrt{2E}}{2\sqrt{m}(m+M)} - \frac{\sqrt{2Em}}{(m+M)^2},$$

úpravami: $m = M$.

$\boxed{42.}$ Plť musíme natočiť tak, aby zložka rýchlosti v smere toku bola rovná u, zvyšnou rýchlosťou sa plavíme na druhý breh. Platí teda $\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - u^2} = \sqrt{v_0^2 - u_0^2 \frac{x}{L/2}}$. Separujeme premenné a vyriešime jednoduchú difku: $\int_0^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - u_0^2 \frac{x}{L/2}}} = \int_0^{T/2} dt$, $T = 2L \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - u_0^2}}{u_0^2}$.