Zadania

$\boxed{1.}$ Od vlaku sa odtrhol posledný vagón. Od okamihu odtrhnutia spomaľoval vplyvom trenia, až sa po prejdení dráhy 360 m zastavil. Ako ďaleko od vagóna je v tom okamihu vlak? Vlak sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 120 km.h^{-1}.

$\boxed{2.}$ Príslušníkov Vesmírnej pechoty vysadili na planéte husto obývanej gigantickými žravými vesmírnymi chrobákmi. Potrebujú sa dostať do cieľa, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti L od nich. Aby si ušetrili problémy s chrobákmi, vystrelili na cieľ strelu, ktorá vybuchla a v okamihu spálila všetko v okruhu s polomerom $r < L$ okolo miesta výbuchu, čím túto oblasť spravila na chvíľu neobývateľnou. Polomer neobývateľnej oblasti sa zmenšuje rovnomerne rýchlosťou v. Akou rýchlosťou majú tesne po výbuchu vesmírni pešiaci vyraziť, aby sa do cieľa dostali práve vtedy, keď sa stane obývateľným?

$\boxed{3.}$ Malý Brandon sa chce stať veľkým staviteľom. Rád sa hrá s kockami a stavia z nich rôzne objekty. Jedného dňa postavil z kociek múr, ktorý bol dlhý 10, vysoký 6 a hrubý dve kocky. Akú prácu musel vykonať, aby postavil túto svoju stavbu, ak všatky kocky boli pôvodne na zemi? Hmotnosť jednej kocky je m, dĺžka hrany a.

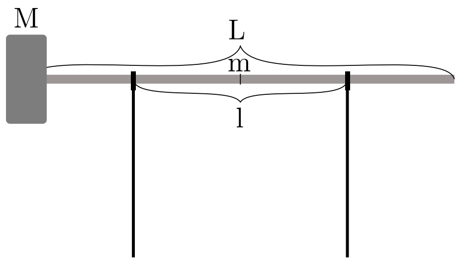
$\boxed{4.}$ Kedysi si fyzici mysleli, že protón a neutrón sú nedeliteľné častice. Dnes už vieme, že patria medzi tzv. hadróny, čiže častice zložené z kvarkov. Vypočitajte náboj kvarkov u, d a s v jednotkách elementárneho náboja e (náboj jedného protónu). Viete, že neutrálny neutrón sa skladá z kvarkov udd, pión s nábojom $+e$ sa skladá z kvarkov $u\bar{d}$ a kaón s nábojom $-e$ z kvarkov $s\bar{u}$. Antikvarky, ktoré sa značia pruhom nad menom kvarku, majú náboj opačného znamienka ako kvarky, od ktorých sú odvodené.

$\boxed{5.}$ Krajinou sa tiahne veľmi dlhý drôt elektrického vedenia, ktorý je v pravidelných intervaloch dĺžky L pripevnený bodovými spojmi na stĺpy. Na tento drôt si náhodne sadá lastovička. Ak sediaca lastovička zaberie na drôte úsek dĺžky l (pochopiteľne $l < L$), aká je pravdepodobnosť, že sedí na mieste pripevnenia drôtu k stĺpu?

$\boxed{6.}$ Cestujem vlakom, ktorý ide rovno rýchlosťou 90 km h^{-1}. Sedím si čelom oproti stredu okna a pozorujem krajinu. Okno je odo mňa vzdialené 1 m a aj jeho šírka je 1 m. Zrazu zočím krásny Gerlachovský štít a tento pekný pohľad ma sprevádza ďalších pätnásť minút. Ako najbližšie ku Gerlachu som bol?

$\boxed{7.}$ Kdesi vo svete je krajinka, ktorej profil sa dá popísať matematicky ako $y = \cos 3x + 1$. Na kopec v bode $x = 0$ umiestnime guľôčku (hmotný bod). Akú minimálnu rýchlosť (v horizontálnom smere) jej treba udeliť, aby prešla cez 2012 kopcov? Trecie sily neuvažujte.

$\boxed{8.}$ Majo si povedal, že nemôže cvičiť len matematickú analýzu a tak sa rozhodol navštevovať posilňovňu a cvičiť aj s činkou. Tyč s dĺžkou L a hmotnosťou m si symetricky položil na stojan, ktorý má dva držiaky vzdialené od seba $l < L$. Na jeden koniec tyče si pripevnil závažie hmotnosti $M > m$. Závažie je však také ťažké, že preváži tyč na stojane. O koľko najmenej má Majo posunúť tyč, aby bola na stojane v rovnovážnej polohe a Majo si mohol ísť naložiť závažie aj na druhý koniec?



9. Ak pustíme loptu z výšky h voľným pádom na dlážku, vyskočí do tretiny výšky, z ktorej bola pustená. Akou rýchlosťou ju máme hodiť smerom k zemi, aby vyskočila práve do výšky h? Predpokladajte, že lopta pri zrážke so zemou stratí vždy rovnakú časť svojej celkovej energie.

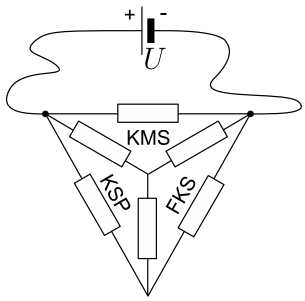
10. Potrebujeme jeden liter vody teploty t. K dispozícii máme vodu s teplotou $10\,°C$ a vodu s teplotou $50\,°C$. Vodu teploty T získame zmiešaním objemu V_{10} vody s teplotou 10 stupňov a objemu V_{50} vody s teplotou 50 stupňov. Zakreslite do jedného grafu závislosti objemov V_{10} a V_{50} od teploty T! Predpokladajte, že hustota vody sa s teplotou nemení.

11. Roku 1847 uskutočnil britský fyzik James Joule počas svojej svadobnej cesty experiment na vodopáde v Alpách, pri ktorom sa pokúsil zmerať zmenu teploty vody po prejdení vodopádom. Aký výsledok očakával, ak predpokladal, že sa všetka energia, ktorú voda získa prejdením vodopádu, zmení na teplo? Výška vodopádu je 50 m, merné teplo vody je približne $4\,200\ \mathrm{J.kg^{-1}K^{-1}}$.

12. Točiť niečim veľkou rýchlosťou je riadne namáhavé. A čo, keď to niečo je planéta Zem s hmotnosťou $5{,}97 \times 10^{24}$ kg pohybujúca sa rýchlosťou $30\ \mathrm{kms^{-1}}$ po kruhovej dráhe s polomerom 150×10^{6} km. Aký výkon má Slnko, keď prostredníctvom gravitačnej sily točí Zemou?

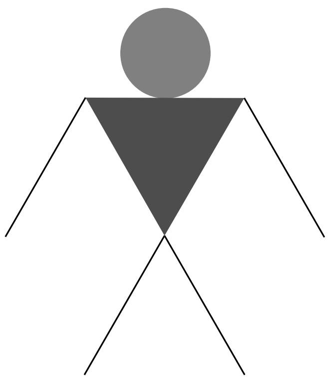
13. Svetelný lúč dopadá na sklenú platňu pod uhlom $\alpha = 30\,°$ vzhľadom na smer kolmý na platňu. Aká hrubá musí byť platňa, aby trajektória lúča po prechode platňou bola o jeden centimeter vzdialená od tej, po ktorej by išiel, keby mu v ceste žiadna platňa nestála? Index lomu skla je 1,5.

14. Šesť rezistorov s odporom R sme zapojili do schémy tvaru „Trojstenu“. Aký veľký prúd preteká zdrojom?



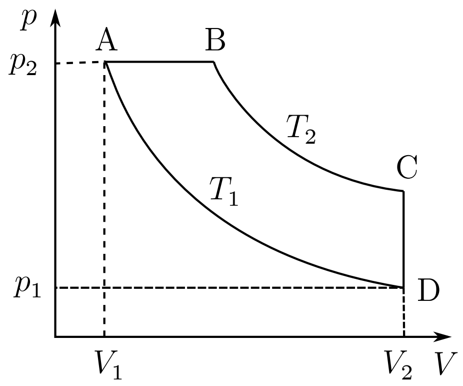
15. Autobus jazdí po trase, na ktorej je rovnomerne rozmiestených 15 zastávok. Počas celej cesty sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, zastavenie na zastávke mu zabierie zanedbateľne málo času a na prvej a pätnástej zastávke okamžite zmení smer jazdy. Aká je pravdepodobnosť, že práve prichádza na siedmu zastávku?

16. V akej výške od zeme sa nachádza ťažisko panáka na obrázku? Nohy a ruky sú z paličiek dĺžky l, telo tvorí rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky l a hlavu kruh s polomerom $l/2$. Uhly, ktoré zvierajú ruky s telom a nohy navzájom sú $60\,^\circ$. Dĺžková hustota paličiek je σ a plošná hustota trojuholníka je $4\sigma/l$ a kruhu $4\sigma/(\pi l)$.



17. Predmet sme umiestnili do vzdialenosti a pred šošovkou s ohniskovou vzdialenosťou f. Za ňou sa nachádza zrkadlo (kolmé na jej optickú os) vo vzdialenosti l. Aká musí byť vzdialenosť a, aby sa predmet po prechode šošovkou, odrazom od zrkadla a opätovným prechodom šošovkou zobrazil vo vzdialenosti a pred šošovkou, t.j. priamo na predmete? Predmet je veľmi malý a leží na optickej osi.

18. S ideálnym plynom sa uskutočnil kruhový dej zobrazený v pV-diagrame. Prekreslite tento dej do VT-diagramu. Množstvo pracovného plynu sa počas deja nemenilo.



$\boxed{19.}$ Na podlahe leží tenká tyč dĺžky L. Ak jej udelíme rýchlosť v v smere rovnobežnom s tyčou, trením o podložku sa zastaví za čas t_1. Za aký čas sa zastaví, ak ju na podlahe roztočíme uhlovou rýchlosťou ω okolo osi tyče kolmej na podložku? Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na vertikálnu os prechádzajúcu stredom je $I = \frac{1}{12}mL^2$.

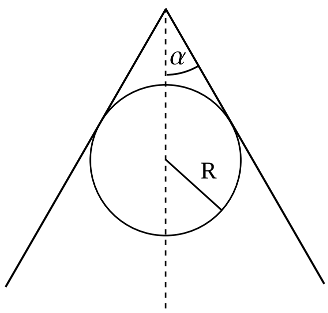
$\boxed{20.}$ Ak vypustíme družicu na obežnú dráhu okolo rovníka v smere rotácie Zeme, treba vykonať prácu W_r. Ak ju vypustíme na obežnú dráhu okolo poludníka, vykonáme prácu W_p. Akú prácu treba vykonať, ak chceme vypustiť družicu okolo rovníka proti smeru rotácie Zeme? Všetky obežné dráhy sú kruhové s rovnakým polomerom.

$\boxed{21.}$ Akou silou na seba pôsobia dosky kondenzátora nabité nábojmi Q a $-Q$? Plocha dosiek je S, vzdialenosť medzi nimi je d.

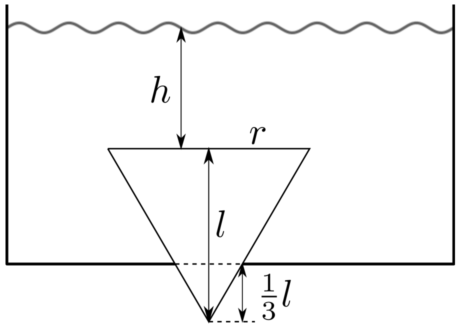
$\boxed{22.}$ Guľa hmotnosti M a polomeru R vletí rýchlosťou v do oblasti, ktorá obsahuje stojace častice hmotnosti $m \ll M$ s koncentráciou n (meranej ako počet častíc na jednotku objemu). Guľa absorbuje všetky častice, ktoré jej stoja v ceste. Aká odporová sila pôsobila na guľu hneď po vletení do oblasti?

$\boxed{23.}$ V meste som sa zapozeral na fontánu, ktorá mala v ústií prierez $0{,}50\,\mathrm{cm}^2$ a striekala vodu do výšky $1{,}0\,\mathrm{m}$ pod uhlom $55\,^\circ$. Aký výkon má čerpadlo tejto fontány?

$\boxed{24.}$ Na valci sú položené dve dosky spojené kĺbom. Medzi valcom a doskami nie je trenie. Ak uhol, ktorý zvierajú dosky, je 2α, vypočítajte pomer R/l.



25. Na dne nádoby naplnenej vodou je diera, ktorú sme zapchali kužeľom tak, že tretina z neho trčí cez dieru von. Akú minimálnu hustotu musí mať kužeľ, aby z diery nevyplával?



~

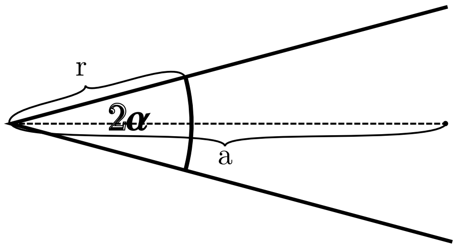
26. Z výšky H necháme na vodorovnú podložku padať guľôčku. Po prvom odraze dosiahne výšku $h < H$. Potom opätovnom páde vyletí do ešte menšej výšky a tak ďalej. Za aký čas sa jej pohyb úplne zastaví? Predpokladáme, že lopta pri zrážke so zemou stratí vždy rovnakú časť svojej kinetickej energie.

27. Oxid dusičitý (chemický vzorec NO_2) sa môže vyskytovať v dvoch formách: buď jeho molekuly vyzerajú tak, ako hovorí chemický vzorec – NO_2, alebo sa môžu dve molekuly zviazať do molekuly N_2O_4. Do uzavretej nádoby so stálym objemom V sme umiestnili oxid dusičitý pri nízkej teplote T_1, v ktorej sa všetok plyn nachádza vo forme N_2O_4. Namerali sme tlak p_1. Potom sme ho zohriali na teplotu T_2, pri ktorej sa časť molekúl N_2O_4 rozložila na molekuly NO_2. Ak bol pri teplote T_2 tlak v nádobe p_2, aký bol pomer počtu molekúl N_2O_4 k počtu molekúl NO_2? Predpokladajte, že oxid dusičitý sa v oboch formách správa ako ideálny plyn.

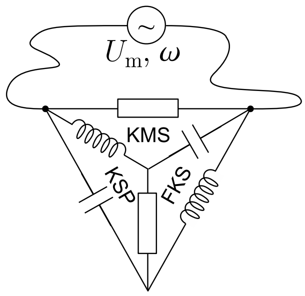
28. Obyvatelia vzdialenej planéty vedia, že ich domovina má tvar gule s polomerom R a hmotnosť M. Radi by sa na ňu pozreli zhora, technológiu na riadený let do vesmíru však zatiaľ nemajú. Preto sa rozhodli vystreliť do vesmíru kameru, ktorá bude počas svojho pobytu planétu snímať a po obletení okolo planéty dopadne späť na miesto, odkiaľ bola vystrelená. Do akej najväčšej výšky sa počas svojho pohybu kamera dostane, ak jej počiatočná rýchlosť je v?

29. V pokojnom jazere pláva lopta s polomerom R a hustotou rovnou polovici hustoty vody. Málinko ju potlačíme do vody a pustíme. Určte jej periódu kmitov.

30. Plášť kužeľa s vrcholovým uhlom 2α pokrytý zvnútra zrkadlovým povrchom má vo svojom vrchole umiestnený detektor guľového povrchu s polomerom r. Kubus vložil bodový zdroj svetla na os tohto kužeľa do vzdialensti a od jeho vrcholu. Aká časť svietivého výkonu zdroja dopadne na detektor?



31. Uvažujte schému tvaru „Trojstenu“ napojenú na zdroj prúdu s amplitúdou U_{m} a frekvenciou $\omega = 1/\sqrt{LC}$, ako znázorňuje obrázok. Charakteristiky súčiastok sme pritom zvolili tak, že navyše platí $R = \sqrt{L/C}$. Aká je amplitúda prúdu, ktorý preteká zdrojom napätia?



32. Fregata Abraham Lincoln naháňala neznámu morskú príšeru. Išlo samozrejme o ponorku Nautilus riadenú kapitánom Nemom, ktorý ju nasmeroval proti lodi a ostrou provou Nautila spravil v trupe Abrahama Lincolna zvislú trhlinu šírky x a výšky l začínajúcu v hĺbke h pod hladinou mora. Vypočítajte objemový prietok vody trhlinou.

Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ Odtrhnutý vagón sa bude v dôsedku trenia spomaľovať s konštantným spomalením. Jeho hodnota síce nie je zadaná, to nám však nebráni s ním počítať – označme ho teda ako a. Počiatočnú rýchlosť vlaku $120\,\mathrm{km.h^{-1}}$ označme pre stručnosť ako v.

Čo vieme povedať? Vieme, že odtrhnutý vagón zastaví za čas $t = v/a$ a do zastavenia prejde dráhu

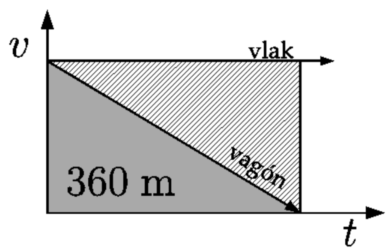
$$s_1 = at^2/2 = v^2/2a = 360\,\mathrm{m}$$

Zvyšok vlaku sa pohybuje rovnomerným pohybom a za ten istý čas prejde dráhu

$$s_2 = vt = v^2/a$$

Vidíme, že vzdialenosť medzi zvyškom vlaku a oddeleným vagónom je $s_2 - s_1 = v^2/2a$. To je zhodou okolností práve rovné $s_1 = 360\,\mathrm{m}$.

Zaujímavé je, že hoci sa hodnota zrýchlenia *dá* určiť (konkrétne $a = \sqrt{v^2/2s}$), pri hľadaní výsledku sa ukázala byť úplne nepotrebná. Tu si stručne ukážeme, prečo je to tak. Nakreslime si graf rýchlostí (vagónu i zvyšku vlaku) od času. Ako vieme, plocha pod krivkou $v(t)$ je rovná prejdenej ploche. Rôzne hodnoty spomalenia znamenajú iba rôzny sklon priamky v tomto grafe. Bez ohľadu naň je však obsah trojuholníka (tj. dráha prejdená vagónom) *vždy* rovná polovici obsahu obdĺžnika nad ním (tj. polovici dráhy prejdenej vlakom). Odpoveď preto musí byť 360 m bez ohľadu na hodnoty a a v.



$\boxed{2.}$ Polomer oblasti zasiahnutej výbuchom sa na nulu zmenší za čas $t = r/v$. To je práve čas, za ktorý sa príslušníci vesmírnej pechoty majú dostať do cieľa vzdialeného L od nich. Preto musia ísť rýchlosťou $v' = L/t = (L/r)v$

$\boxed{3.}$ Pri ukladaní kociek na seba treba konať prácu na zvyšovanie potenciálnej energie kociek. Celkovú vykonanú prácu vypočítame ako rozdiel potenciálnej enegie celého múru a potenciálnej energie kociek na zemi. Potenciálnu energiu múru vypočítame ako potenciálnu energiu veľkého kvádra s výškou $6a$, dĺžkou $10a$ a hrúbkou $2a$, čo sa počíta ako Mgh_T, kde $M = 10 \times 6 \times \times 2\ m = 120m$ je hmotnosť celého múru a $h_\mathrm{T} = 6a/2 = 3a$ je výška jeho ťažiska. Z toho dostaneme

$$E_\mathrm{p}(\text{múr}) = 360mga$$

Potenciálna energia kociek na zemi je

$$E_\mathrm{p}(\text{na zemi}) = 10 \times 6 \times 2\ ma/2 = 60mga$$

a práca, ktorú musel Brandon vykonať

$$W = 360mga - 60mga = 300mga$$

$\boxed{4.}$ Nenecháme sa zmiasť cudzími slovami a jednoducho zapíšeme zadanie do rovníc. Náboje kvarkov si označíme Q_u, Q_d, Q_s.

$$\begin{aligned} 0 &= Q_u + 2Q_d \\ e &= Q_u - Q_d \\ -e &= Q_s - Q_u \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostaneme $Q_u = 2e/3$, $Q_d = -e/3$ a $Q_s = -e/3$.

$\boxed{5.}$ Úloha sa dá zjednodušiť tým, že namiesto celého drôtu uvažujeme len jeden úsek dĺžky L medzi dvoma stĺpmi. Je to možné preto, lebo všetky úseky sú rovnaké a posúvaním jedného úseku sa dá vyskladať celý drôt.

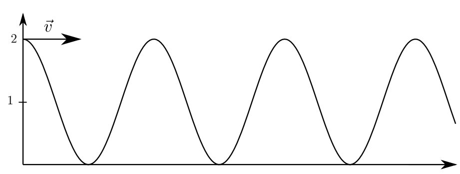
Nech si teda lastovička sadá na úsek dĺžky L. Polohu lastovičky možno jednoznačne určiť zadaním jedného bodu (napríklad ľavého okraja miesta, na ktorom sedí). Časť drôtu, na ktorom sedí lastovička, bude úsečka dĺžky l napravo od tohto bodu. Ľahko si možno všimnúť, že ak vybraný bod leží vo vzdialenosti najviac l od pravého okraja úseku dĺžky L, lastovička prekryje spoj s pravým stĺpom. Pravdepodobnosť je určená ako podiel priaznivých možností a všetkých možností. Priaznivé možnosti v tomto prípade predstavujú tie polohy ľavej strany lastovičky, pri ktorých prekryje spoj – úsečku dĺžky l. Všetky možnosti predstavujú všetky možné polohy ľavej strany lastovičky – úsečku dĺžky L. Hľadaná pravdepodobnosť je $P = l/L$.

$\boxed{6.}$ Cez okno dokážem vidieť najviac pod uhlom $\alpha = \arctan \frac{0{,}5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}$ do strán. Dráha s, ktorú prešiel vlak počas pozorovania, zodpovedá dvojnásobku dĺžky protiľahlej strany v trojuholníku „Gerlach“ – „ja na začiatku“ – „ja v mieste minimálneho priblíženia“. Z uhla a strany už minimálnu vzdialenosť dopočítame ľahko:

$$d = vt/(2\tan\alpha) = 22{,}5\,\mathrm{km}$$

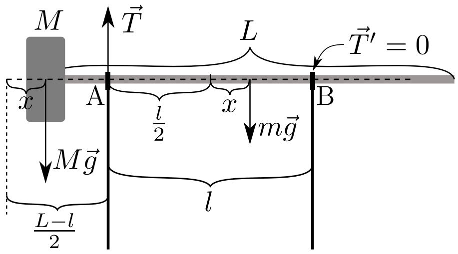
$\boxed{7.}$ Keďže sme zanedbali trecie sily, môžeme použiť zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \mathrm{const}$$



Na každom kopci bude mať guľôčka rovnakú potenciálnu energiu, keďže sú všetky rovnakej výšky a teda tu bude mať aj rovnakú kinetickú energiu a rýchlosť ako v počiatočnom bode. Preto zo zákona zachovania energie vyplýva, že guľôčke stačí udeliť ľubovoľne malú rýchlosť (v horizontálnom smere), aby prešla *všetkými* kopcami, teda aj 2012-tym.

8. Nech x je vzdialenosť, o ktorú posunieme tyč, aby sa prestala prevažovať. Pre najmenšiu takúto vzdialenosť platí, že sila T' pôsobiaca v bode B (pozri obrázok) je ešte nulová, ale sústava je už v rovnováhe[1].



Ide teda o rovnoramennú páku, pre ktorú platí

$$Mg\left(\frac{L-l}{2} - x\right) = mg\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

po úprave

$$2\,(m+M)\,x = ML - Ml - ml$$

Výsledok je

$$x = \frac{M\,(L-l) - ml}{2\,(M+m)} = \frac{M}{M+m}\frac{L}{2} - \frac{l}{2}$$

Všimnime si, že pre $M < ml/(L-l)$ vychádza x záporné. V takomto prípade je činka v stabilnej polohe už na začiatku.

9. V tomto prípade ide o nepružnú zrážku lopty so zemou, celková energia lopty sa preto nebude zachovávať. Najprv analyzujme prípad, keď loptu pustíme z výšky h voľným pádom. Jej celková energia pred dopadom je $E_1 = mgh$, jej celková energia po dopade je $E_2 = \frac{1}{3}mgh$. Podľa predpokladu je podiel množstva stratenej energie k pôvodnej rovný konštante. Teda

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \text{const}$$

Z toho okamžite vyplýva, že aj podiel $E_1/E_2 = \text{const}$. V našom prípade

$$\frac{E_1}{E_2} = 3$$

[1] Ak by sme posunuli tyč ešte o trochu, tyč by aj v bode B pôsobila na stojan nejakou silou a reakciou na ňu by bola nenulová sila T'.

Pozrime sa teraz na druhý prípad. Lopte sme na začiatku udelili práve takú kinetickú energiu $\frac{1}{2}mv^2$, aby sa na konci (po zrážke so zemou) vrátila do pôvodnej polohy, teda do výšky h. Preto teraz platí

$$E_1 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

a

$$E_2 = mgh$$

Podiel týchto energií musí byť rovný rovnakej konštante ako v prípade voľného pádu. Čiže

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{mgh + \frac{1}{2}mv^2}{mgh} = 3$$

odkiaľ úpravou dostaneme

$$1 + \frac{v^2}{2gh} = 3$$

Hľadaná rýchlosť, ktorú treba na začiatku lopte udeliť, je rovná

$$v = 2\sqrt{gh}$$

$\boxed{10.}$ Najskôr si uvedomíme, akú teplú vodu možno dostať zmiešaním 10-stupňovej a 50-stupňovej vody. Najnižšia dosiahnuteľná teplota je 10 stupňov (ak nalejeme iba iba 10-stupňovú vodu) a najvyššia 50 stupňov (ak nalejeme iba 50-stupňovú vodu). Krivka znázorňujúca potrebný objem 10-stupňovej vody bude teda začínať v bode $[t, V] = [10\,^\circ\mathrm{C}, 1\,\mathrm{L}]$ a končiť v bode $[50\,^\circ\mathrm{C}, 0\,\mathrm{L}]$. Krivka znázorňujúca potrebný objem 50-stupňovej vody bude začínať v bode $[10\,^\circ\mathrm{C}, 0\,\mathrm{L}]$ a končiť v bode $[50\,^\circ\mathrm{C}, 1\,\mathrm{L}]$.

O aké krivky pôjde? Napíšme si rovnicu pre výmenu tepla:

$$m_{10}c(t - t_{10}) = m_{50}c(t_{50} - t)$$

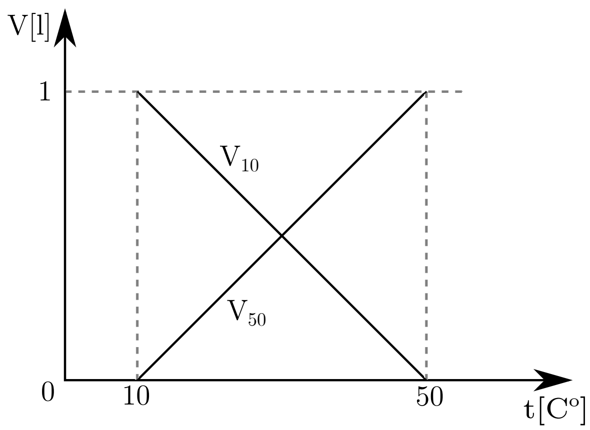
Po predelení mernou tepelnou kapacitou C a hustotou dostaneme:

$$V_{10}(t - t_{10}) = V_{50}(t_{50} - t)$$

Okrem toho máme ešte podmienku $V_{10} + V_{50} = V = 1\,\mathrm{L}$. Dosadením do predchádzajúcej rovnice dostaneme

$$V_{10} = \frac{t_{50}}{t_{50} - t_{10}}V - \frac{V}{t_{50} - t_{10}}t \equiv a - bt$$

kde sme pre stručnosť zoskupili konštanty t_{10}, t_{50} a V. Vidíme, že ide o lineárnu závislosť. Objem V_{50} dopočítame z podmienky, že súčet objemov V_{10} a V_{50} musí byť rovný jednému litru – opäť dostaneme lineárnu závislosť. V grafe sú teda dve priamky, ako ukazuje obrázok



11. Pri páde sa potenciálna energia vody mení na kinetickú a voda získava rýchlosť. Po dopade sa však voda hýbe len veľmi pomaly, t.j. stratí väčšinu svojej kinetickej energie. Makroskopický pohyb vody smerom nadol sa premení na chaotický pohyb molekúl vody všetkými smermi, čo zodpovedá nárastu vnútornej energie. Dopad vody do rieky preto možno považovať za nepružnú zrážku, pri ktorej sa prakticky všetka kinetická energia premení na teplo.

Uvažujme kus vody s hmotnosťou m. Tento kus stratí počas svojho pádu potenciálnu energiu mgh. Tá sa premení najprv na kinetickú energiu a potom na tepelnú energiu $mc\Delta T$, kde c je merné teplo vody uvedené v zadaní a ΔT je hľadaná zmena teploty. Tieto energie sa rovnajú, čiže platí

$$mgh = mc\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta T = \frac{gh}{c} \approx 0{,}12\,{}^\circ\mathrm{C}$$

Voda sa pri páde ohreje o 0,12 °C, čo je vzhľadom na všetky zanedbania, ktorých sme sa v našom modeli zohrievania vody dopustili, veľmi málo na to, aby išlo o dobre testovateľnú hodnotu. Z týchto dôvodov Jouleovi experiment nevyšiel. Nezostáva nám preto iné, ako poľutovať zanedbanú pani Jouleovú.

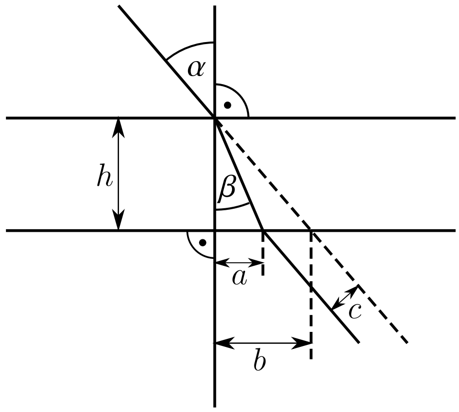
12. Napriek úctyhodným hodnotám hmotnosti, rýchlosti a ramena je výkon Slnka nulový. Dôvod je ten, že gravitačná sila, ktorou pôsobí na Zem je dostredivá sila. Tá je kolmá na smer pohybu Zeme a prácu (aj výkon) konajú len zložky sily rovnobežné zo smerom pohybu.

Povedané inak: práca, ktorú vykoná sila $\boldsymbol{F}$ na kúsku dráhy $\Delta\boldsymbol{r}$ je $\Delta A = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$. Po predelení časom Δt, ktorý teleso potrebuje na prejdenie úseku $\boldsymbol{r}$ dostaneme pre výkon P

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = Fv\cos\alpha$$

V našom prípade je dostredivá sila kolmá na rýchlosť (uhol α, ktorý spolu zvierajú je 90 °) a skalárny súčin dvoch kolmých vektorov je nula (kosínus pravého uhla je nulový).

13. Zaveďme si značenie podľa obrázku

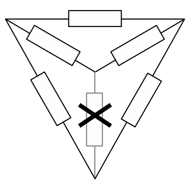


Uhol β vieme spočítať pomocou Snellovho zákona, podľa ktorého $n \sin\beta = \sin\alpha$. Potom vieme vyjadriť vzialenosť $a = h\tan\beta$, čo je vzdialenosť od kolmice spustenej z bodu kde lúč vošiel do skla do bodu kde lúč vyšiel zo skla. Vzdialenosť $b = h\tan\alpha$ je vzdialenosť od spomínanej kolmice do bodu kde by lúč bol vyšiel keby tam nebola sklenenná platňa. Tie vieme dať do vzťahu s posunom $c = (b - a)\cos\alpha = h\cos\alpha(\tan\alpha - \tan\beta)$. Odtiaľ už s využitím Snellovho zákona vyjadríme hľadanú hrúbku skla

$$h = \frac{c}{\sin\alpha}\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) \doteq 0{,}78\,\mathrm{cm}$$

$\boxed{14.}$ Odmyslime si na chvíľu zdroj a poďme nájsť odpor R_v siete medzi vyznačenými dvoma bodmi. Schému si možno predstaviť ako paralelné zapojenie jedného horného rezistora a vetvy obsahujúcej zvyšných päť rezistorov.

Pozrime sa lepšie na spodnú vetvu. Dva body spojené zvislým rezistorom sú v zvláštnej pozícii. Zo symetrie vidno, že zvislý odpor spája body s rovnakým elektrickým potenciálom. To znamená, že medzi jeho koncami je nulové napätie, a teda ním neprechádza žiadny prúd. Preto ho možno bez následkov zo schémy vypojiť, ako to znázorňuje nasledujúci obrázok.



Nájsť odpor tejto (ekvivalentnej) siete je už jednoduché. Máme paralelne zapojené odpory R, $2R$ a $2R$, ktorých výsledný odpor je

$$R_\mathrm{v} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{R}{2}$$

Obvodom (a teda aj zdrojom) preteká prúd $I = U/R_\mathrm{v} = 2U/R$.

$\boxed{15.}$ Pravdepodobnosť je definovaná ako podiel priaznivých stavov a všetkých možných stavov. Musíme si rozmyslieť, aké stavy máme v tomto prípade. Na prvý pohľad sa zdá, že stav autobusu je určený jeho polohou. To by znamenalo, že pravdepodobnosť nájsť ho ľubovoľnej zastávke je 1/15. Tak to však nie je. Určiť stav autobusu znamená zadať jeho polohu a tiež smer pohybu. Na každú zastávku môže totiž prichádzať z dvoch smerov. Vlastne, na každú okrem prvej a pätnástej, na ktoré môže prichádzať iba z jedného smeru. Celkový počet stavov je $2 \times 15 - 2$. Priaznivé stavy sú 2 – na siedmu zatávku môže prichádzať z dvoch strán. Hľadaná pravdepodobnosť je $P = 2/28 = 1/14$.

$\boxed{16.}$ Výška ťažiska sústavy hmotných bodov sa počíta podľa vzťahu

$$y_\mathrm{T} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

kde y_i je výška i-teho bodu a m_i jeho hmotnosť. Útvary, z ktorých je poskladaný náš panák si môžme nahradiť hmotnými bodmi – ich ťažiskami.

Zamerajme sa najskôr na paličky. V akej výške má ťažisko palička zvierajúca zo zemou uhol $60\,^\circ$? Bude to výška $\frac{l}{2}\sin 60\,^\circ$. Spoločné ťažisko všetkých paličiek je vo výške

$$y_1 = \frac{2l\sigma\frac{l}{2}\sin 60\,^\circ + 2l\sigma(\frac{l}{2}\sin 60\,^\circ + l\sin 60\,^\circ)}{4l\sigma} = l\sin 60\,^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

teda v spodnom vrchole trojuholníka tvoriaceho telo. Celková hmotnosť paličiek sústredená v tomto bode je $4l\sigma$.

Trojuholník má ťažisko vo výške $\frac{2}{3}l\sin 60\,^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}l$ od spodného vrcholu, čiže ťažisko tela panáka je vo výške $y_2 = \frac{5}{3}l\sin 60\,^\circ$ od zeme. Hmotnosť trojuhoníka je $\frac{1}{2}l \times l\sin 60\,^\circ \times \frac{4\sigma}{l} = \sqrt{3}l\sigma$. Hlava má hmotnosť $l\sigma$ a výška jej ťažiska je $y_3 = 2l\sin 60\,^\circ + \frac{l}{2}$. Toto môžeme teraz dosadiť do všeobecného vzťahu na výpočet ťažiska a doupravovať až k výsledku. Aby sme si zjednodušili výrazy, z ktorými budeme pracovať, budeme počítať výšku ťažiska od spodného vrcholu trojuholníka y'_T a potom k nej pripočítame $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, teda

$$y'_\mathrm{T} = \frac{\sqrt{3}l\sigma \times \frac{l}{\sqrt{3}} + l\sigma \times (\frac{\sqrt{3}}{2}l + \frac{l}{2})}{4l\sigma + \sqrt{3}l\sigma + l\sigma} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 + \sqrt{3}}l$$

Konečne hľadaná výška ťažiska od zeme je

$$y_\mathrm{T} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}l$$

$\boxed{17.}$ Zrkadlo len odrazí lúče opäť do šošovky, teda túto sústavu môžeme považovať za ekvivalentnú so sústavou dvoch šošoviek vzdialených $2l$ s ohniskovými vzdialenosťami f. Teraz nám stačí už len dvakrát použiť zobrazovaciu rovnicu:

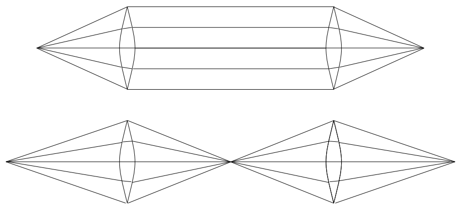
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{2l - a'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}$$

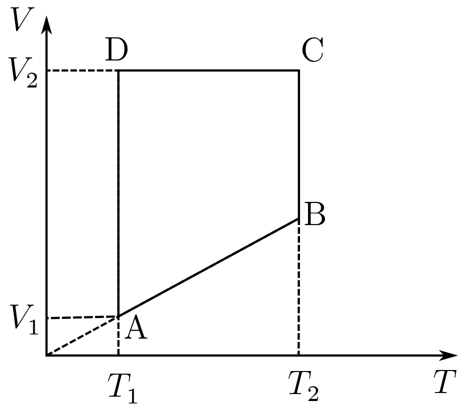
Táto sústava rovníc má dve riešenia. Odčítaním týchto dvoch rovníc ľahko dostaneme očakávateľný symetrický výsledok $a' = l$, ktorý stačí dosadiť do jednej z rovníc a vyjadriť

$$a = \frac{lf}{l - f}$$

Druhým riešením je prípad, keď sa predmet po prejdení prvou šošovkou zobrazí do nekonečna $a' = \infty$, čo zodpovedá riešeniu $a = f$. Predmet je umiestnený v ohnisku šošovky. Lúče po prejdení šošovkou pokračujú rovnobežne s optickou osou. Obe situácie sú znázornené na obrázku.



18. Začnime kresliť v bode B. Dej B-C je izotermická expanzia – nárast objemu pri konštantnej teplote, čo sa vo VT-diagrame nakreslí ako zvislá úsečka BC, kde B je spodný a C vrchný bod. Dej C-D je izochorický, čo sa vo VT-diagrame nakreslí ako vodorovná čiara, pričom bod D bude naľavo od bodu C (lebo $T_1 < T_2$). A ako sa vo VT-diagrame kreslí izobarický dej? Zo stavovej rovnice ideálneho plynu $pV = nRT$ si vyjadríme závislosť objemu od teploty $V = (nR/p)T \equiv \text{const} \times T$, čo je v prípade izobarického deja priamka začínajúca v bode [0,0]. Dej A-B je úsečka ležiaca na takejto priamke. Výsledný diagram vyzerá takto:



19. Pri šúchaní sa tyče v smere rovnobežnom s ňou, pôsobí na tyč trecia sila $F_\mathrm{t} = mgf$. Spomalenie vyplývajúce z jej pôsobenia je $a = F_\mathrm{t}/m = gf$. Za čas t_1 poklesne rýchlosť na nulu, teda $0 = v - gft_1$, z čoho máme pre koeficient trenia $f = v/gt_1$.

Keď sa tyč roztočíme okolo osi kolmej na podložku, nerozkotúľa sa (trecie sily na jednej strane od vertikálnej osi sa ju snažia roztočiť do opačnej strany ako sily na druhej strane a ich momenty sú presne rovnako veľké). Pohyb tyče je v tomto prípade brzdený momentom trecej sily. Trecia sila pôsobí v každom bode tyče proti smeru pohybu a veľkosť trecej sily pôsobiacej na každý dĺžkový element tyče je rovnaká. Moment trecej sily sa však so vzdialensťou od stredu tyče mení – od stredu lineárne rastie. Nemusíme pracne sčítavať momenty pôsobiace na všetky elementy[2], ale môžeme všetky „momentíky“ nahradiť dvoma momentami. Veľkosť každého z týchto dvoch momentov je $M = \frac{m}{2}\frac{L}{4}gf$, teda priemer nuly a momentu trecej sily na konci tyče (vďaka lineárnemu nárastu momentu). Alternatívne možno rovnaký výsledok dostať nakreslením si grafu závislosti dĺžkovej hustoty momentu sily od dĺžky tyče a hľadaný celkový moment bude plocha trojuholníka pod priamkovou závislosťou. Uhlové spomalenie je potom $\varepsilon = 2M/I = 3gf/L$. V čase t_2, kedy je uhlová rýchlosť tyče nulová, platí $\varepsilon t_2 = \omega$. Čas zastavenia je

$$t_2 = \frac{\omega L}{3gf} = \frac{\omega L}{3v}t_1$$

$\boxed{20.}$ Pozrime sa na to z pohľadu človeka na Zemi. Na vypustenie družice jej potrebuje dodať kinetickú a potenciálnu energiu. Zadefinujme si nasledovné veličiny: potrebujeme dodať potenciálnu energiu E_p, rovnovážna rýchlosť na danej orbite z pohľadu vzdialeného nerotujúceho pozorovateľa je v_o a rýchlosť na povrchu Zeme je v_z. Potenciálna energia a rovnovážna rýchlosť su vždy rovnaké, lebo hovoríme o tej istej obežnej dráhe.

Práca W_r hovorí o situácii kde cieľová rýchlosť je v smere, v ktorom sa už Zem pohybuje, takže z pohľadu Zeme bude mať satelit rýchlosť $v_\mathrm{o} - v_\mathrm{z}$. Potom je práca rozdiel energií, a teda

$$W_\mathrm{r} = E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{o} - v_\mathrm{z})^2$$

Pri W_p musíme najprv odstrániť rýchlosť, ktorú má družica kvôli rotácii Zeme a potom pridať v_o kolmo na ňu. Takto vieme spočítať výslednú rýchlosť z pohľadu Zeme $\sqrt{v_\mathrm{z}^2 + v_\mathrm{o}^2}$ pomocou Pytagorovej vety. Z toho dostaneme

$$W_\mathrm{p} = E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(\sqrt{v_\mathrm{z}^2 + v_\mathrm{o}^2})^2 = E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{z}^2 + v_\mathrm{o}^2)$$

Pokiaľ chceme vypustiť družicu v opačnom smere, tak musíme dosiahnuť rýchlosť $-v_\mathrm{o}$ z pohľadu mimo Zeme a teda $-v_\mathrm{o} - v_\mathrm{z}$ z pohľadu Zeme. To znamena, že výslednú prácu si vieme zapísať ako:

$$\begin{aligned}
W &= E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{z} + v_\mathrm{o})^2 \\
&= E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{z}^2 + 2v_\mathrm{z}v_\mathrm{o} + v_\mathrm{o}^2) \\
&= 2(E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{z}^2 + v_\mathrm{o}^2)) - (E_\mathrm{p} + \frac{1}{2}m(v_\mathrm{z}^2 - 2v_\mathrm{z}v_\mathrm{o} + v_\mathrm{o}^2)) \\
&= 2W_\mathrm{p} - W_\mathrm{r}
\end{aligned}$$

[2]integrovať

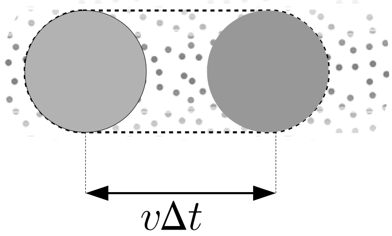
$\boxed{21.}$ Situáciu si môžeme predstaviť tak, že ľavá doska vytvára pole $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ kolmé na obe dosky. Týmto poľom pôsobí na každý jeden náboj q na pravej doske silou $F_1 = qE$. Výsledná sila F pôsobiaca na pravú dosku bude teda súčtom síl pôsobiacich na všetky náboje na pravej doske.

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Vynechaním úvah o elektrickom poli pravej dosky sme sa vyhli problémom s interakciou náboja na pravej doske samého so sebou. Táto sila je však nulová, čo sa dá usúdiť napríklad z princípu akcie a reakcie. Znalci môžu porozmýšľať o tom, ako by sa táto úloha dala riešiť metódou virtuálnych prác.

$\boxed{22.}$ Najprv si ozrejmime, odkiaľ sa vlastne berie oná odporová sila. Guľa sa počas pohybu dokonale nepružne zráža so stojacimi časticami. To znamená, že stojace častice sa lepia na povrch gule a začnú sa hýbať spolu s ňou. Častice pridávajú guli hmotnosť. Celková hybnosť sústavy guľa-častice sa však zachováva, teda nárastom hmotnosti gule musí nutne klesnúť jej rýchlosť. Zmena rýchlosti podľa Newtonových zákonov súvisí s pôsobením sily – odporovej sily, ktorú chceme vypočítať.

Uvažujme malý časový interval Δt hneď po vletení do oblasti, počas ktorého možno rýchlosť gule považovať za konštantnú. Za tento čas sa guľa posunie o $x = v\Delta t$ a „prečistí“ objem $V = xS$ priestoru, kde $S = \pi R^2$ je jej prierez.



V prečistenom priestore sa nachádzalo $N = nV$ častíc. Každá z nich pri zrážke s guľou získala hybnosť $p = mv$. Sila, ktorá pôsobí na guľu je potom jednoducho podiel celkovej odovzdanej hybnosti a časového intervalu. Písmenka len treba rozbaliť do tých, ktoré sú udané v zadaní,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N \cdot p}{\Delta t} = \frac{n(v\Delta t)(\pi R^2) \cdot mv}{\Delta t} = \pi R^2 nmv^2$$

$\boxed{23.}$ Čerpadlo koná prácu tak, že udeľuje vode kinetickú energiu. Výkon vypočítame ako

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv^2/2)}{\Delta t}$$

Za predpokladu, že fontána strieka vodu s konštantnou ústťovou rýchlosťou, je množstvo kinetickej energie ΔE_{kin} dodané čerpadlom vode za čas Δt dané množstvom vody, ktorá pretečie ústím.

$$\frac{\Delta(mv^2/2)}{\Delta t} = \frac{1}{2}v^2\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{2}v^2\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Ak prierez ústia označíme ako S, je výkon fontány určený vzťahom

$$P = \frac{1}{2}v^2\rho S\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

kde Δl je vzdialenosť, ktorú prejde voda v okolí ústia za čas Δt a $\Delta l/\Delta t$ nie je nič iné ako úsťová rýchlosť v. Vo vzťahu pre výkon

$$P = \frac{1}{2}S\rho v^3$$

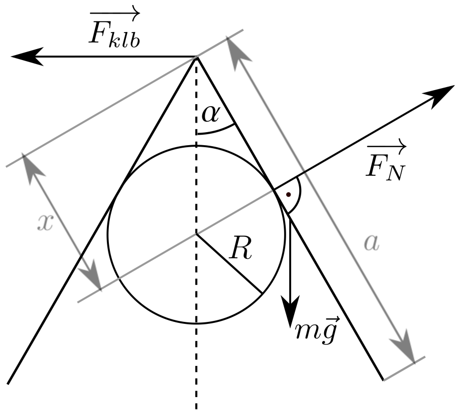
nám chýba už len vedieť rýchlosť v. Tú určíme ľahko, keď si uvedomíme, že striekanie vody fontánou nie je nič iné ako obyčajný šikmý vrh s maximálnou výškou doletu $h = 1\,\mathrm{m}$. Potenciálna energia v tejto výške sa rovná kinetickej energii počítanej zo zvislého priemetu počiatočnej rýchlosti:

$$mgh = \frac{1}{2}m(v\sin\alpha)^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}$$

Hľadaný výkon je

$$P = \frac{1}{2}S\rho\frac{(2gh)^{3/2}}{\sin^3\alpha} = 4{,}0\,\mathrm{W}$$

$\boxed{24.}$ Na každú dosku pôsobia tri sily: gravitačná, normálová sila od valca a sila od kĺbu. Posledná z nich zabezpečuje, že doska neskĺzne po valci dole. Veľkosť tejto sily by bolo možné vypočítať, smer sa však dá uhádnuť. Sila pôsobiaca na ľavú dosku má byť zrkadlovo symetrická a zároveň má byť reakciou na silu v obrázku. To sa dá splniť iba tak, že sila v kĺbe je vodorovná



Hľadáme ustálený stav, čo znamená, že súčet všetkých síl aj momentov síl pôsobiacich na dosky je nulový. Vhodnou voľbou bodu na počítanie momentov síl je kĺb, pretože vtedy má sila pôsobiaca v kĺbe nulový moment.

$$\frac{1}{2}mgl\sin\alpha = xF_\mathrm{N}$$

Rameno sily F_N dostaneme z geometrie problému $x = R/\tan\alpha$, takže

$$\frac{1}{2}mgl\sin\alpha = F_N\frac{R}{\tan\alpha}$$

Z rovnováhy síl v zvislom smere máme $mg = F_N \sin\alpha$, čo po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dáva hľadaný pomer

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{2}\sin^2\alpha\tan\alpha$$

$\boxed{25.}$ Čo môže spôsobiť, že kužeľ vypláva z diery? Je to vztlaková sila pôsobiaca smerom nahor. Pôvod vztlakovej sily je v rozdielnom hydrostatickom tlaku pri vrchnej a spodnej strane telesa. Časť kužeľa však nemá zospodu vodu, preto vztlaková sila pôsobí iba na tie časti kužeľa, ktoré (pri pohľade zhora) prečnievajú mimo diery. Objem tejto časti je

$$V = \frac{1}{3}\pi l r^2 - \frac{1}{3}\pi\frac{l}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^2 - \pi\frac{2l}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{20}{3^4}\pi l r^2$$

Vztlaková sila pôsobiaca na kužeľ je

$$F_{\mathrm{vz}} = \frac{20}{3^4}\pi l r^2 \rho_{\mathrm{v}} g$$

Na oblasť priamo nad dierou pôsobí len tlak zhora na podstavu, tlaková sila pôsobí smerom nadol a jej veľkosť je

$$F_{\mathrm{t}} = \rho_{\mathrm{v}} g h \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2$$

Okrem nich pôsobí na kužeľ tiažová sila veľkosti

$$F_{\mathrm{g}} = \frac{1}{3}\pi l r^2 \rho g$$

Tieto tri sily sú v hraničnom prípade v rovnováhe

$$F_{\mathrm{g}} + F_{\mathrm{t}} = F_{\mathrm{vz}}$$

Dosadením za sily dostaneme minimálnu hodnotu hustoty kužeľa, pri ktorej nevypláva z diery

$$\rho = \left(\frac{20}{27} - \frac{h}{3l}\right)\rho_{\mathrm{v}}$$

$\boxed{26.}$ Tu je dôležité si uvedomiť, že guľočka sa odrazí nekonečne veľakrát. To znie však až priveľmi odstrašujúco, treba si teda uvedomiť ešte dačo iné. To dačo v tomto prípade je, že pri každej zrážke so zemou zostane loptičke *ten istý* zlomok energie. V písmenkách to znamená, že

$$\frac{E_{\text{po dopade}}}{E_{\text{pred dopadom}}} = \text{konšt}$$

Pri dopade je táto energia rovná kinetickej energii, počas pohybu sa však premení na potenciálnu energiu v najvyššom bode. To „konšt." vyššie je preto rovné podielu $\frac{mgh}{mgH} = h/H$. Takto vieme povedať, že ak loptička po n odrazoch vyletela do výšky h_n, po $n+1$ vyjde do výšky

$$h_{n+1} = h_n\frac{h}{H}$$

Keď vieme, ako bude vyzerať pohyb loptičky, poďme spočítať koľko bude trvať. Najprv voľný pád výšky H. Pre ten platí

$$\frac{1}{2}gt_0^2 = H \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Ďalej výstup do výšky h a pád späť. Ten potrvá dvakrát toľko ako čas voľného pádu t_1 z výšky $h = \frac{h}{H}H$. Keď predchádzajúci výsledok použijeme na pád z výšky h, dostaneme

$$2t_1 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pri ďalšom výstupe dosadíme $\left(\frac{h}{H}\right)^2 H$ namiesto $h = \frac{h}{H}H$, čím získame čas

$$2t_2 = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{h}{H}\right)$$

a zrejme po n odrazoch

$$2t_n = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Tieto časy už treba len sčítať. Tu využijeme známy vzťah pre súčet nekonečného geometrického radu. Pre $|x| < 1$ platí[3]

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

V našom prípade pre čas pohybu loptičky platí

$$\begin{aligned} t &= t_0 + 2\left[t_1 + t_2 + \ldots\right] \\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}}\left\{1 + 2\left[\left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{2}{2}} + \ldots\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1 + 2\frac{\sqrt{\frac{h}{H}}}{1-\sqrt{\frac{h}{H}}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{\sqrt{H}+\sqrt{h}}{\sqrt{H}-\sqrt{h}} \end{aligned}$$

[3]Dôkaz: Označme hľadaný súčet ako s. Potom platí

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + \ldots &= s \\ x + x\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right) &= s \\ x + xs &= s, \end{aligned}$$

odkiaľ už vidno hľadaný výsledok pre s.

27. Označme si látkové množstvo N_2O_4 pri teplote T_1 ako n. Vieme ho vypočítať zo stavovej rovnice $p_1V = nRT_1$. Z tohto látkového množstva zostane po zohriatí vo forme N_2O_4 n_1 molov a na NO_2 sa rozpadne n_2 molov. Ako sa dá uhádnuť z chemického vzorca, jedna molekula N_2O_4 sa rozpadá na dve molekuly NO_2. Látkové množstvá jednotlivých plynov pri teplote T_2 sú n_1 pre N_2O_4 a $2n_2$ pre NO_2. Nás zaujíma pomer počtu častíc, ktorý sa dá vyjadriť cez látkové množstvá ako $n_1/2n_2$.

Tlak p_2 vieme napísať ako súčet tlaku N_2O_4 p_{N2O4} a tlaku NO_2 p_{NO2}, ktoré vyjadríme zo stavovej rovnice.

$$p_2 = p_{\mathrm{N2O4}} + p_{\mathrm{NO2}} = \frac{n_1RT_2}{V} + \frac{2n_2RT_2}{V}$$

Ak do tejto rovnice dosadíme $n = p_1V/RT_1 = n_1 + n_2$, dostaneme

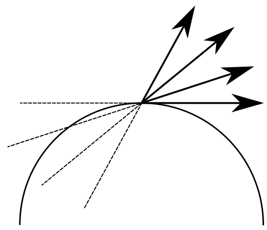
$$n_1 = \frac{V}{R}\left(2\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)$$

$$n_2 = \frac{V}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right)$$

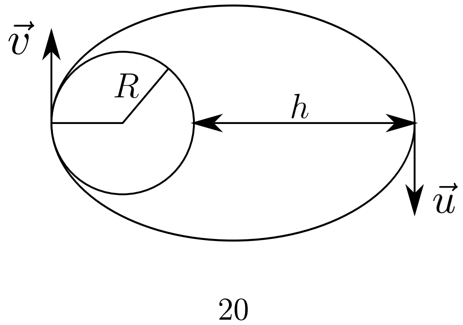
Hľadaný pomer je

$$\frac{n_1}{2n_2} = \frac{2\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}}{2\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right)}$$

28. Najskôr sa musíme vysporiadať s tým, že máme zadanú len veľkosť rýchlosti a chýba nám uhol, pod ktorým bola kamera vystrelená. Ten je však určený jednoznačne tým, že kamera má obehnúť planétu a dopadnúť na miesto štartu, čo sa dá docieliť iba tak, že vektor rýchlosti leží v dotykovej rovine k povrchu planéty v bode štartu. Vo všetkých ostatných prípadoch by sa sonda musela na miesto štartu vracať cez planétu.



A teraz môžeme začať kresliť a počítať. Označme si najvyššiu výšku kamery nad povrchom planéty h a rýchlosť v tomto bode u. Rýchlosť u je rovnobežná s rýchlosťou v (má ale opačný smer).



Môžeme si zapísať zákon zachovania energie a zákon zachovania momentu hybnosti (m je hmotnosť kamery):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mu^2 - \kappa\frac{mM}{R+h}$$
$$mRv = m(R+h)u$$

Z druhej rovnice vyjadríme u a dosadíme do prvej. Po vydelení m a označení skupiny konštánt $\kappa M/R = v_{\mathrm{k}}^2$ dostaneme[4]

$$\frac{1}{2}v^2 - v_{\mathrm{k}}^2 = \frac{1}{2}\frac{R^2}{(R+h)^2}v^2 - \frac{v_{\mathrm{k}}^2 R}{R+h}$$

Po úpravách dostaneme rovnicu pre h

$$h^2\left(\tfrac{1}{2}v^2 - v_{\mathrm{k}}^2\right) + hR\left(v^2 - v_{\mathrm{k}}^2\right) = 0$$

Rovnica má dve riešenia, jedno nezaujímavé ($h = 0$, ktoré zodpovedá miestu štartu resp. dopadu) a druhé predstavujúce výšku, ktorú sme chceli vypočítať.

$$h = \frac{v_{\mathrm{k}}^2 - v^2}{\frac{1}{2}v^2 - v_{\mathrm{k}}^2}R = \frac{\frac{\kappa M}{R} - v^2}{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\kappa M}{R}}R$$

$\boxed{29.}$ Na spočítanie periódy potrebujeme poznať hmotnosť telesa a silu, ktorou bude vracané do rovnovážneho stavu. Hmotnosť je objem krát hustota

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{\rho_{vody}}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3\rho_{vody}$$

Na výpočet sily, ktorá pôsobí na loptu, použijeme Archimedov zákon. Musíme ho ale použiť rozumne. Vieme, že rovnovážna poloha bude vtedy, keď bude hladina práve v polovici lopty. Cize pokiaľ loptu potlačíme o H nižšie, tak vytlačí $\pi R^2 H$ vody, keďže πR^2 je jej prierez a predpokladáme, že $H << R$ takže sa tento prierez počas kmitania veľmi nezmení. Archimedov zákon nám potom hovorí, že sila pôsobiaca na loptu bude

$$F = \pi R^2 H g\rho_{vody}$$

Keď poznáme silu, vieme napísat závislosť zrýchlenia od polohy

$$ma = -\pi R^2 H g\rho_{\mathrm{vody}} = -kH$$

Porovnaním tohto vzťahu s klasickým kyvadlom dostaneme periódu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi R^3\rho_{\mathrm{vody}}}{\pi R^2 g\rho_{\mathrm{vody}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}$$

[4]Označenie v_{k}^2 nie je náhodné, ide o druhú mocninu rýchlosti, ktorou sa pohybuje družica po kruhovej dráhe vo vzdialenosti R od stredu planéty.

30. Pozrime sa na jeden lúč svetla v rovine, v ktorej sa nachádza tento lúč a os kužeľa. Lúč zostane v tejto rovine pri odraze od stien kužeľa, lebo steny sú kolmé na túto rovinu v miestach kde ju pretínajú. Týmto sa nám problém zredukoval na problém dvoch zrkadiel v rovine. Jediné, čo nás zaujíma, je to, či sa lúč niekedy dostane k priesečníku zrkadiel bližsie ako r. Podľa týchto zrkadiel si môžeme odzrkadliť celý priestor. Ak si potom zrkadlá odmyslíme, máme situáciu, v ktorej zdroj svieti na guľu s polomerom r. Hľadanie lúča, ktorú už dopadne do detektora v kuželi, je ekvivalentné hľadaniu lúča, ktorý už dopadne na guľu v tejto novej situácii.

Potrebujeme zistiť, pod akým najväčším uhlom od osi, môže lúč letieť tak aby prišiel k stredu na vzdialenosť r. Z geometrie trojuholníku pre okrajový prípad keď sa lúč dotkne gule s polomerom r dostaneme, že tento uhol je $\beta = \arcsin \frac{r}{a}$. Posledná vec je vypočítať, koľko lúčov vyjde pod uhlom menším ako β. Zo vzorca pre priestorový uhol dostaneme, že detektor zaberá $\Omega = 2\pi(1 - \cos\beta)$. To znamená, že do detektora dopadne časť svetla rovná

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi(1-\cos\beta)}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\arcsin\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right)$$

31. Na úvod si spomeňme, že impedančné charakteristiky jednotlivých súčiastok sú $\hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C}$ a $\hat{Z}_L = i\omega L$. Zadanie ďalej špecifikuje špeciálnu hodnotu frekvencie zdroja $\omega = 1/\sqrt{LC}$. To je však skvelé, všimnite si totiž, že

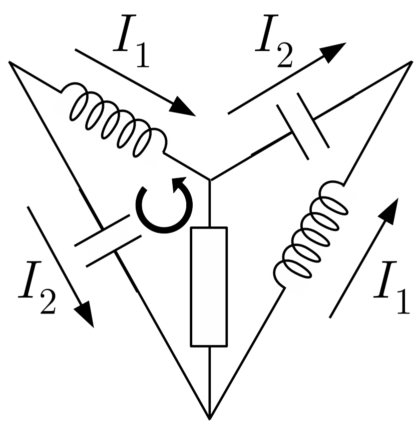
$$\omega L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega C},$$

čo sa zhodou okolností rovná výberu odporu R v zadaní. Impedancie súčiastok teda v našom probléme možno zapísať ako

$$\hat{Z}_R = R \qquad \hat{Z}_L = iR \qquad \hat{Z}_C = -iR,$$

A teraz šup rýchlo nájsť riešenie.

Rovnako ako v predošlej úlohe o schéme tvaru „Trojstenu“, pozrime sa najprv na dolnú vetvu, ktorá v tomto prípade pozostáva z dvoch cievok, dvoch kondenzátorov a jedného rezistora. Všimnite si, že táto vetva je symetrická, kvôli čomu je prúd prechádzajúci oboma cievkami, ako aj oboma kondenzátormi rovnaký. Označme ich $\hat{I}_1$, resp. $\hat{I}_2$. Keďže prúd sa nestráca, rezistorom prechádza smerom nahor prúd $\hat{I}_2 - \hat{I}_1$.



Teraz, ak využijeme Kirchhoffov zákon o napätiach pre slúčku označenú na obrázku, dostaneme vzťah medzi $\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2$

$$\begin{aligned} -iR\hat{I}_2 + R(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) &= R\hat{I}_1 \\ \hat{I}_2\,(1-i) &= \hat{I}_1\,(1+i)\,, \end{aligned}$$

Ďalej vieme, že napätie na zdroji sa musí rovnať spádu napätia v obvode. Odtiaľ máme druhú rovnicu

$$iR\hat{I}_1 - iR\hat{I}_2 = \hat{U}$$
$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \frac{i\hat{U}}{R},$$

Získali sme dve rovnice o dvoch neznámych, ktorých riešenie je

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{2R}\,(1-i) \qquad \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}}{2R}\,(1+i)\,,$$

Prúd prechádzajúci odporom je jednoducho $\hat{U}/R$. Celkový prúd pretekajúci obvodom je súčet všetkých prúdov, čiže

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R} + \frac{\hat{U}}{2R}\,(1-i) + \frac{\hat{U}}{2R}\,(1+i) = \frac{2\hat{U}}{R},$$

Pre amplitúdu celkového prúdu preto platí $I_\mathrm{m} = 2U_\mathrm{m}/R$.

$\boxed{32.}$ Zaoberajme sa najskôr prípadom, kedy má loď v trupe len malú dieru s plochou S v hĺbke h'. Z Bernoulliho rovnice (rovnosť kinetickej energie a potenciálnej energie vyplývajúcej z hydrostatického tlaku) vieme vypočítať rýchlosť, ktorou tečie voda dierou.

$$v = \sqrt{2gh'}$$

Prietok Q (objem vody, ktorý prejde dierou za jednotku času) je

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = vS = \sqrt{2gh'}S$$

Prietok vody malou dierou vieme vypočítať, čo prietok trhlinou zo zadania? Uvedomíme si, že trhlinu tvaru čiary si možno predstaviť ako veľa dier v hĺbkach od h po $h + l$. Celkový prietok trhlinou je potom súčet prietokov cez jednotilivé diery (ktoré si môžeme predstaviť ako obdĺžniky s hrúbkou x a výškou $\Delta h'$).

$$Q = \sum_{h'=h}^{h+l} v(h')S = \sum_{h'=h}^{h+l} v(h')x\Delta h'$$

Presnejšie, ide o súčet cez spojite veľa dier, teda integrál

$$Q = \int_h^{h+l} v(h')x \;\mathrm{d}h' = \int_h^{h+l} \sqrt{2gh'}x \;\mathrm{d}h' = \sqrt{2g}x \int_h^{h+l} \sqrt{h'}\mathrm{d}h'$$

a ten vieme explicitne vypočítať

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}x\left[(h+l)^{3/2} - h^{3/2}\right]$$