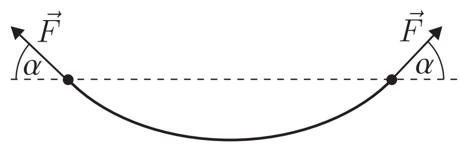
Zadania

$\boxed{1.}$ Kamióny idú po diaľnici stálou rýchlosťou 120 km.h^{-1}. Akou rýchlosťou musí ísť obslužné auto, ak má mať dlhodobo rovnakú priemernú rýchlosť ako kamióny, ale chce si vždy po dvoch hodinách jazdy urobiť pätnásťminútovú prestávku?

$\boxed{2.}$ Jednu loptičku vyhodíme zo zeme nahor rýchlosťou v, druhú necháme v tom istom momente voľne padať z výšky h, presne nad prvou loptičkou. V akej výške sa tieto loptičky zrazia?

$\boxed{3.}$ Môj starý varič je taký slabý, že keď som naň minulú zimu postavil liter vody v ešuse a miešal ju vareškou, dokázal ju ohriať maximálne na 80°C. Keď som varič vypol, ale vodu som naďalej miešal, za minútu jej teplota klesla o 2°C. Odhadnite výkon variča. Tepelná kapacita vody je 4,2 kJ.kg^{-1}.K^{-1}.

$\boxed{4.}$ Mirko má reťaz hmotnosti M. Oba konce drží v rovnakej výške silou rovnakej veľkosti F. Pod akým uhlom α vzhľadom na horizontálnu rovinu pôsobia tieto sily?

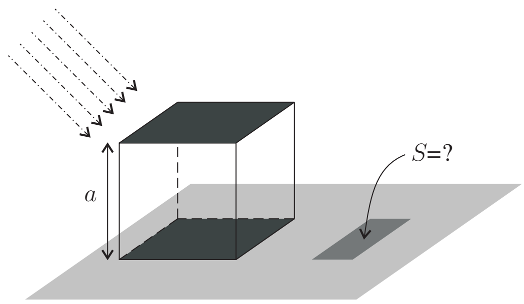


$\boxed{5.}$ Výletná loď príde po Dunaji z Bratislavy na Devín za hodinu a dvadsať minút, späť za pol hodiny. Koľkokrát rýchlejšie ide loď vzhľadom na vodu ako voda vzhľadom na breh?

$\boxed{6.}$ Plechový pohárik má tvar valca s polomerom r a výškou h bez hornej podstavy. V akej výške je jeho ťažisko, ak je celý vyrobený z rovnakého materiálu?

$\boxed{7.}$ Ak dva odpory zapojím sériovo, dostanem odpor 9 Ω, ak paralelne, dostanem odpor 2 Ω. Aké sú tieto odpory?

$\boxed{8.}$ Kocka s dĺžkou hrany a vyrobená z materiálu s indexom lomu n je položená na čiernej podložke, pričom jej horná podstava je tiež začiernená tak, aby neprepúšťala ani neodrážala svetlo. Rovnobežne s jednou dvojicou stien kocky svieti pod uhlom 45° na podložku svetlo. Aká plocha podložky zostane neosvetlená?



$\boxed{9.}$ Máme dva variče (každý z nich sa správa ako rezistor s nemenným odporom) a zapájame ich do siete s konštantným napätím. Keď ich zapájame samostatne, jeden z nich má výkon P_1, druhý výkon P_2. Aký celkový výkon dostaneme, keď ich zapojíme sériovo?

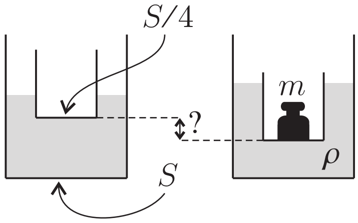
$\boxed{10.}$ Do vane priteká voda objemovým prítokom Q, ale keďže vaňa je už plná, voda preteká cez okraj. Do vane tiež prilievame mydlo objemovým prítokom q. Aká bude objemová koncentrácia mydla vo vani (pomer objemu mydla k objemu vane) po dlhom čase, ak sa voda s mydlom vo vani dobre premiešavajú?

$\boxed{11.}$ Ako ďaleko doskočí žaba, ak skáče šikmo rýchlosťou veľkosti v a počas skoku dosiahne maximálnu výšku h?

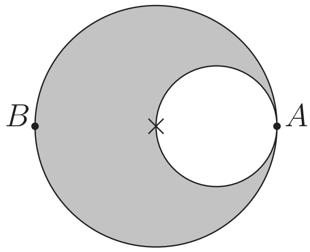
$\boxed{12.}$ Medeným drôtom o priereze $S = 1\,\mathrm{mm}^2$ tečie prúd $I = 0{,}1\,\mathrm{A}$. Vypočítajte priemernú posuvnú rýchlosť vodivostných elektrónov v drôte, ak na každý atóm medi pripadajú dva vodivostné elektróny. Relatívna atómová hmotnosť medi je $A = 63{,}5$, jej hustota je $\rho = 7900\,\mathrm{kg.m^{-3}}$. Náboj elektrónu je $e = 1{,}60.10^{-19}\,\mathrm{C}$ a atómová hmotnostná jednotka $u = 1{,}66.10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

$\boxed{13.}$ Nová družica obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe v tej istej rovine ako Zem. Dlhodobým pozorovaním môžeme zistiť, že na oblohe sa vzďaluje od Slnka najviac na 60°. Aká je jej doba obehu okolo Slnka?

$\boxed{14.}$ Vo valcovom sude s obsahom podstavy S je naliata voda s hustotou ρ, v ktorej pláva valcová nádoba s obsahom podstavy $S/4$. O koľko klesne táto nádoba vzhľadom na sud, ak do nej položíme závažie s hmotnosťou m? Predpokladajte, že nádoba bude plávať aj po vložení závažia.



$\boxed{15.}$ V istej guľovej planéte z homogénneho materiálu našli dutinu tvaru gule, dotýkajúcu sa povrchu planéty v bode A i jej stredu. Veľkosť tiažového zrýchlenia v bode A je a. Aká je veľkosť tiažového zrýchlenia v protiľahlom bode B?

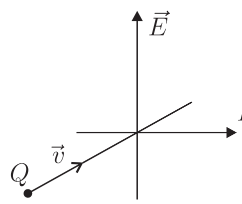


$\boxed{16.}$ Vzduch okolo Kubovej vzducholode má štvrtinový tlak oproti tomu v kabíne a teplotu $T_v = -50°\mathrm{C}$. Aká bude jeho teplota, keď ho kompresor rýchlo stlačí na tlak v kabíne?

$\boxed{17.}$ Lietadlo lieta na spiatočnej linke medzi dvoma letiskami. Ak fúka vietor v smere rovnobežnom s jeho trasou, cesta tam a späť mu trvá čas T_1. Ak vietor fúka rovnakou rýchlosťou v smere kolmom na jeho trasu, rovnaká cesta mu trvá čas T_2. Koľko trvá takáto cesta za bezvetria? Rýchlosť lietadla vzhľadom na vzduch je vo všetkých prípadoch rovnaká, lietadlo lieta po tej istej priamej dráhe.

$\boxed{18.}$ Akvárium v tvare kocky so stranou a bez hornej podstavy je do polovice naplnené vodou s hustotou ρ. Akú prácu musíme vykonať na vyliatie vody preklopením akvária?

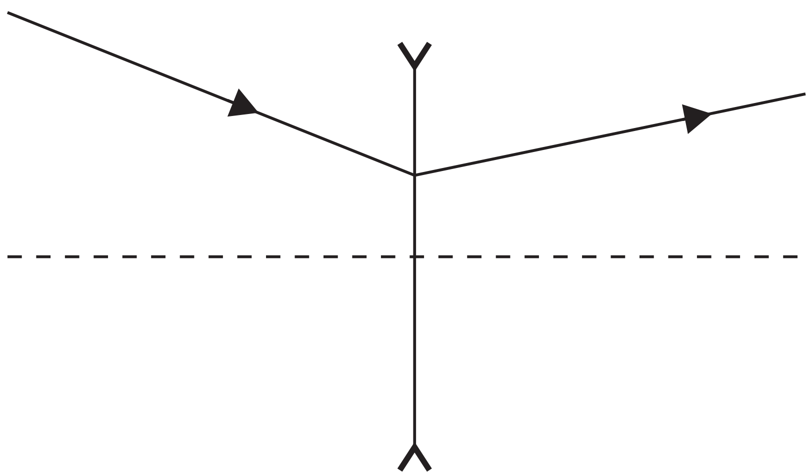
$\boxed{19.}$ Častica s nábojom Q vletela rýchlosťou v do elektrického poľa s intenzitou veľkosti E. Aké veľké má byť magnetické pole B, aby sa častica aj naďalej pohybovala rovnomerne priamočiaro? Rýchlosť častice, smer elektrického a smer magnetického poľa sú na seba kolmé, tak ako na obrázku. Tiaž neuvažujte.



$\boxed{20.}$ V akej výške sa ustáli voda vo vani, ak je na jej dne odtok s prierezom S a napúšťame do nej vodu objemovým prietokom Q?

$\boxed{21.}$ Korálik hmotnosti m je navlečený na zvislo upevnenej kruhovej obruči, po ktorej sa môže pohybovať bez trenia. Koráliku udelíme takú rýchlosť, aby jedným smerom obiehal po obruči, ale v najvyššom bode na ňu nepôsobil žiadnou silou. Akou silou pôsobí korálik na obruč v najnižšom bode svojej dráhy?

$\boxed{22.}$ Na obrázku je znázornená ideálna šošovka, jej optická os a dráha jedného lúča pri prechode šošovkou. Zakreslite do obrázku jej ohnisko.



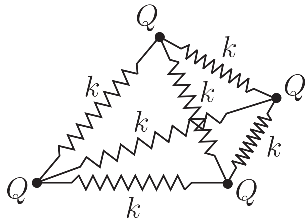
$\boxed{23.}$ Planéta malého princa je homogénna guľa s polomerom R. Malý princ na jej povrch upevnil raketový motor, ktorý na ňu po zapnutí začne pôsobiť silou veľkosti F v smere dotyčnicovom k povrchu. V jeho planéte sa nachádza priamka, ktorej body majú v okamihu spustenia motora nulové zrýchlenie. Ako ďaleko od motora sa táto priamka nachádza?

$\boxed{24.}$ Pokrievka hrnca má polomer R a hmotnosť M. Voľne zakrytý prázdny hrniec zohrievame na teplotu T a istý čas ho udržujeme na tejto teplote. Potom zdroj tepla vypneme a hrniec necháme vychladnúť na teplotu okolia T_0. Akú silu potrebujeme na odtrhnutie pokrievky od hrnca?

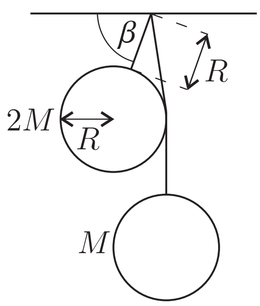
$\boxed{25.}$ Akú najväčšiu vzdialenosť môžem prejsť, ak idem stále na juhovýchod?

$\boxed{26.}$ Skákavá loptička sa po dopade na dokonale tvrdú podložku odrazí do polovičnej výšky, z akej bola pustená. Zavesíme dve takéto rovnaké loptičky na jeden záves za rovnako dlhé špagáty, jednu z nich vychýlime do pravého uhlu a pustíme. Aké budú maximálne výchylky (uhly ktoré zvierajú ich špagáty so zvislicou) oboch loptičiek po prvej zrážke?

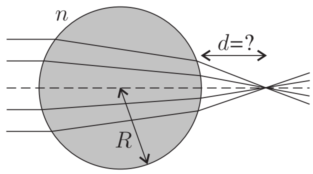
$\boxed{27.}$ Štyri guličky sú spojené pružinami tuhosti k s pokojovými dĺžkami a. Aký náboj Q treba priviesť na každú z guličiek, aby sa objem štvorstenu nimi tvoreného zdvojnásobil?



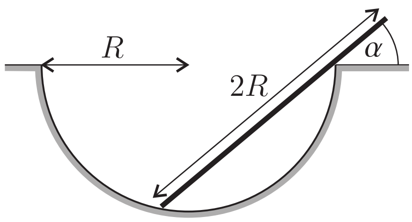
$\boxed{28.}$ Z vodorovného stropu visí na špagáte dĺžky R guľa s polomerom R a hmotnosťou $2M$. Z rovnakého miesta visí druhá guľa s hmotnosťou M, pričom jej špagát je dostatočne dlhý na to, aby sa gule nedotýkali. Medzi špagátom a prvou guľou je nulové trenie. Aký je uhol β, ktorý zviera prvý špagát so stropom?



$\boxed{29.}$ Máme guľu s polomerom R a indexom lomu n, pričom platí $1 < n < 2$. V akej vzdialenosti d od povrchu gule sa zaostruje slnečné svetlo?



$\boxed{30.}$ Máme misku tvaru polgule s polomerom R. Miska je upevnená s okrajom vo vodorovnej polohe, keď do nej vložíme paličku s dĺžkou $2R$. Aký uhol α bude zvierať palička s horizontálnou rovinou, ak je trenie medzi paličkou a miskou nulové?



$\boxed{31.}$ Rezistory s odporom R sú pozapájané v hranách pravidelného dvanásťstena. Určte odpor medzi jeho dvoma protiľahlými vrcholmi.

Riešenia

$\boxed{1.}$ Aby malo obslužné auto rovnakú priemernú rýchlosť ako kamióny, musí v priebehu každého svojho cyklu trvajúceho dve a štvrť (čiže deväť štvrtín) hodiny prejsť rovnakú dráhu ako kamióny. Keďže počas tohto cyklu 15 minút odpočíva, musí túto dráhu prejsť už za 2 hodiny. Ak si označíme jeho hľadanú rýchlosť ako v, rovnosť prejdených dráh môžeme zapísať ako

$$120\,\mathrm{km.h^{-1}} \cdot \tfrac{9}{4}\,\mathrm{h} = v \cdot 2\,\mathrm{h}.$$

Vidíme, že rýchlosť obslužného auta musí byť $\frac{9}{8} \cdot 120\,\mathrm{km.h^{-1}} = 135\,\mathrm{km.h^{-1}}$.

$\boxed{2.}$ Mohli by sme si napísať závislosť výšky oboch loptičiek od času, položiť ich do rovnosti a vyriešiť sústavu rovníc. Všimnime si však, že obe loptičky po pustení padajú voľným pádom, len spodná okrem toho dostala do vienka rýchlosť v smerom nahor. Z pohľadu padajúceho pozorovateľa je teda horná loptička nehybná a spodná sa pohybuje rýchlosťou v nahor. Loptičky sa teda stretnú po čase $t = h/v$. Ich výšku h_z v tomto čase zistíme napríklad z pohybu hornej loptičky:

$$h_z = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g\frac{h^2}{v^2} = h\left(1 - \frac{gh}{2v^2}\right).$$

$\boxed{3.}$ Keď sa teplota vody ustálila na 80°C, celý tepelý výkon P, ktorý varič dodával ešusu s vodou, sa míňal na tepelné straty. Po vypnutí variča sa tepelný výkon pominul, ešus však stále strácal teplo s výkonom P. Keďže tepelné straty závisia najmä od tvaru hrnca, množstva vody a jej teploty, a keďže tieto sa počas spomínanej minúty príliš nezmenili, môžeme ich tiež považovať za konštantné. Ak teda ešus za minútu stratil teplo $Q = mc\Delta T = 1\,\mathrm{kg} \cdot 4200\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{K} = 8400\,\mathrm{J}$, pre jeho stratový výkon bude platiť

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{8400\,\mathrm{J}}{60\,\mathrm{s}} = 140\,\mathrm{W}.$$

Taký je teda aj približný výkon variča. (Vo výpočtoch sme zanedbali aj tepelnú kapacitu ešusu, avšak tepelná kapacita bežného ešusu je asi 5% tepelnej kapacity jedného litra vody.)

$\boxed{4.}$ Keďže je reťaz v pokoji, musí byť celková sila na ňu pôsobiaca nulová. Okrem iného musí byť nulová aj jej vertikálna zložka, tvorená tiažovou silou a vertikálnymi zložkami síl, ktorými pôsobí Mirko. Ak tieto sily pôsobia pod uhlom α vzhľadom na horizontálnu rovinu, ich vertikálne zložky budú mať veľkosť $F \sin \alpha$. Dostávame teda rovnosť

$$Mg - 2F \sin \alpha = 0,$$

odkiaľ $\alpha = \arcsin \frac{Mg}{2F}$.

$\boxed{5.}$ Označme si rýchlosť vody v Dunaji vzhľadom na breh ako v a rýchlosť lode vzhľadom na vodu ako w. Ak pôjde loď po prúde, jej rýchlosť vzhľadom na breh bude $w + v$; ak pôjde proti prúdu, rýchlosti sa budú naopak odčítavať a vzhľadom na breh bude mať rýchlosť $w - v$. Nech L je vzdialenosť medzi Bratislavou a Devínom, potom dostávame

$$\frac{L}{w+v} = 30\,\mathrm{min} \qquad \text{a} \qquad \frac{L}{w-v} = 80\,\mathrm{min}.$$

Vydelením týchto dvoch rovníc dostaneme vzájomný vzťah pre rýchlosti v a w:

$$\frac{\frac{L}{w+v}}{\frac{L}{w-v}} = \frac{30}{80} \qquad \text{čiže} \qquad \frac{w-v}{w+v} = \tfrac{3}{8},$$

z ktorého ľahko vyjadríme ich podiel $\frac{w}{v}$. Dostávame $\frac{w}{v} = \frac{11}{5}$, loď ide teda $\frac{11}{5}$-krát rýchlejšie ako voda v Dunaji.

$\boxed{6.}$ Pre hľadanie výšky ťažiska použijeme vzťah

$$h_T = \frac{\sum_i h_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{h_P m_P + h_B m_B}{m_P + m_B}$$

kde h_P a h_B sú postupne výška ťažiska podstavy a bočnej steny (plášťa) pohárika nad podstavou a m_P a m_B sú ich hmotnosti. Pre výšky zrejme platí $h_P = 0$ a $h_B = \frac{h}{2}$. Čo sa týka hmotností, celý pohárik je vyrobený z rovnakého materiálu, takže má všade rovnakú hmotnosť na jednotku plochy. Označme túto plošnú hustotu ako σ. Hmotnosti jednotlivých častí sú potom ich plochy násobené plošnou hustotou, čiže

$$m_P = \pi r^2 \sigma \qquad \text{a} \qquad m_B = 2\pi r h \sigma.$$

Výška ťažiska je teda

$$h_T = \frac{0 \cdot \pi r^2 \sigma + \frac{h}{2} \cdot 2\pi r h \sigma}{\pi r^2 \sigma + 2\pi r h \sigma} = \frac{h^2}{r + 2h}.$$

$\boxed{7.}$ Označme odpory ako R_1 a R_2. Vieme, že ak sú tieto dva odpory zapojené sériovo, ich výsledný odpor bude $R_1 + R_2$, ak sú zapojené paralelne, výsledný odpor bude $\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$. Získavame teda sústavu rovníc

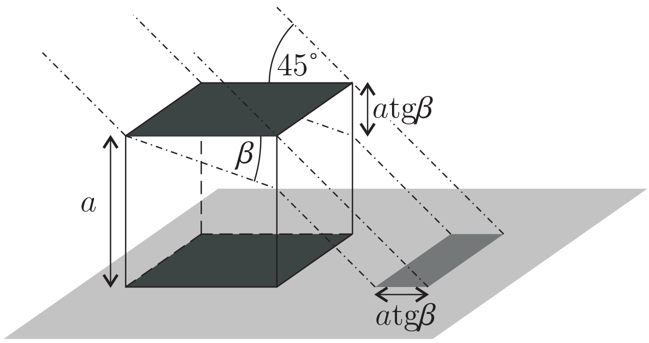
$$R_1 + R_2 = 9\,\Omega \qquad \text{a} \qquad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\,\Omega,$$

ktorej riešením dostaneme veľkosti odporov $6\,\Omega$ a $3\,\Omega$.

$\boxed{8.}$ Svetelné lúče dopadajú na bočnú stenu pod uhlom $45°$ a do kocky prenikajú pod uhlom β, pre ktorý zo zákona lomu platí

$$\sin\beta = \frac{\sin 45°}{n} = \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Z obrázku vidno, že sa stačí zamerať na lúč dopadajúci na hornom okraji ľavej steny. Ten vyjde z kocky na pravej stene vo vzdialenosti $a\,\mathrm{tg}\,\beta$ od hornej steny, pod rovnakým uhlom $45°$, ako do nej vošiel.



Keďže pracujeme v rozmedzí uhlov $0°$ a $90°$, môžeme $\mathrm{tg}\,\beta$ upraviť ako

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin\beta^2}}.$$

Ak dosadíme $\sin\beta = \frac{1}{n\sqrt{2}}$, dostaneme $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}$. Keďže zatienená plocha má tvar obdĺžnika, ktorého dlhší rozmer je totožný s dĺžkou hrany kocky a kratší je rovný $a\,\mathrm{tg}\,\beta$, neosvetlená časť podložky bude mať obsah

$$S = a^2\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a^2}{\sqrt{2n^2 - 1}}.$$

$\boxed{9.}$ Označme si napájacie napätie ako U. Použité variče majú zrejme rozdielne odpory, označme ich R_1 a R_2. Pre výkon elektrického spotrebiča pri konštantnom napätí platí dobre známy vzťah $P = UI = \frac{U^2}{R}$, pre výkony jednotlivých spotrebičov teda platí

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \qquad \text{a} \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_2}.$$

Ak ich zapojíme sériovo, ich celkový odpor bude $R = R_1 + R_2$ a celkový výkon bude teda
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{\frac{U^2}{P_1} + \frac{U^2}{P_2}} = \frac{P_1 P_2}{P_2 + P_2}.$$

$\boxed{10.}$ Keďže vaňa má stály objem a je už plná, cez okraj z nej preteká presne toľko kvapaliny, koľko z nej vyteká von. Ak predpokladáme, že objemy kvapalín sa sčítavajú (v reálnych situáciach to nie je vždy presne tak, ale teraz lepšie informácie o vlastnostiach vody a mydla nemáme), musí byť objemový výtok vždy $Q + q$.
V ustálenom stave bude z vane vytekať toľko mydla, koľko do nej napúšťame, takže jeho výtok bude tiež q. Ak by sme nabrali do vedra všetko čo vytečie z vane za jednu sekundu, dostali by sme teda $Q + q$ litrov kvapaliny, z čoho by bolo q litrov mydla. V každom litri kvapaliny, ktorý vytečie z vane, bude teda $\frac{q}{Q+q}$ litrov mydla. Keďže sa však mydlo s vodou vo vani premiešavajú, nabratá kvapalina vo vedre sa ničím nelíši od tej čo je vo vani, okrem toho, že mala tú smolu byť práve pri okraji. Koncentrácia mydla vo vani v ustálenom stave je teda tiež $\frac{q}{Q+q}$. Keď je vo vani vyššia koncentrácia mydla, bude ho odtekať viac ako pritekať a koncentrácia sa bude znižovať. Ak je naopak vo vani menej mydla ako $\frac{q}{Q+q}$, bude ho odtekať menej ako q a jeho koncentrácia sa bude zvyšovať. Po dlhom čase sa teda jej hodnota bude blížiť práve ku $\frac{q}{Q+q}$.

$\boxed{11.}$ Rozdeľme si počiatočnú rýchlosť žaby na horizontálnu zložku v_x a vertikálnu v_y, ďalej budeme študovať tieto zložky jej pohybu nezávisle.
Vo vertikálnom smere bude žaba zrýchľovať zrýchlením $-g$ (mínus značí smer nadol). Na začiatku má jej vertikálna rýchlosť hodnotu v_y a v najvyššom bode dráhy je nulová, do tohto bodu sa teda dostane za čas $t = \frac{0-v_y}{-g} = \frac{v_y}{g}$. Za tento čas prejde vo vertikálnom smere dráhu $h = v_y t + \frac{1}{2}(-g)t^2 = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g}$, odkiaľ si vieme vyjadriť $v_y^2 = 2gh$.
Z pravouhlého trojuholníka navyše vieme, že pre zložky rýchlosti platí $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, čiže $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v^2 - 2gh}$. Žaba sa v najvyššom bode svojej dráhy nachádza presne v polovici trvania skoku, preto bude celková dĺžka trvania skoku T rovná $2t$. Dosadením zo vzťahu pre t a v_y dostávame
$$T = 2t = 2\frac{v_y}{g} = 2\frac{\sqrt{2gh}}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$
Za čas T sa žaba v horizontálnom smere posunie o $d = v_x T$, čo bude výsledná dĺžka skoku. Z rovníc pre v_x,v_y a T dostávame
$$d = v_x T = 2\sqrt{v^2 - 2gh}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{2h}\sqrt{\frac{v^2}{g} - 2h}.$$

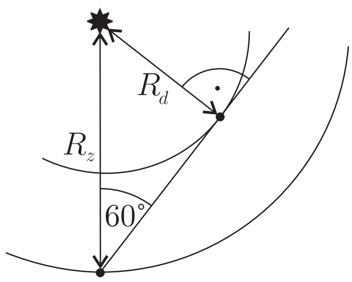
$\boxed{12.}$ Nasekajme si v mysli drôt na valčeky s dĺžkou d a vyberme si jeden z nich. V tomto kúsku o hmotnosti $m = \rho V = \rho S d$ sa nachádza $N_0 = \frac{m}{Au}$ atómov medi a podľa zadania teda dvakrát toľko vodivostných elektrónov. Ak by sa všetky vodivostné elektróny hýbali jedným smerom rýchlosťou v, tak za čas $t = \frac{d}{v}$ prejdú všetky z tejto časti do nasledovného kusu. Zároveň z predošlého kusu pretečú elektróny do nášho atď. – elektróny sa presunú z každého dielika do nasledovného. Prierezom tečie prúd I, to znamená, že ním za čas t prejde $N = Q/e = It/e$ elektrónov. Za čas $t = \frac{d}{v}$ to ale majú byť práve všetky vodivostné elektróny, ktoré boli v jednom dieliku, teda

$$\frac{Id}{ev} = \frac{It}{e} = N = 2N_0 = 2\frac{m}{Au} = 2\frac{\rho S d}{Au}.$$

Odtiaľ ľahko vyjadríme

$$v = \frac{IAu}{2eS\rho} \approx 4{,}17\ \mu\mathrm{m.s^{-1}}.$$

$\boxed{13.}$ Družica sa na oblohe vzďaľuje od Slnka najviac o $60°$, takže priamka vedená zo Zeme, ktorá zviera so spojnicou Zem-Slnko uhol $60°$, bude dotyčnicou kruhovej dráhy družice. Dotyčnica kružnice je kolmá na jej polomer (viď obrázok), takže získavame pravouhlý trojuholník, ktorého jeden uhol je $60°$, prepona je polomer dráhy Zeme (dĺžky R_z) a odvesna polomer dráhy družice (dĺžky R_d):



Z neho dostávame vzťah pre R_d a R_z:

$$R_d/R_z = \sin 60°.$$

Dobu obehu družice okolo Slnka T_d vypočítame použitím tretieho Keplerovho zákona

$$\frac{T_d^2}{R_d^3} = \frac{T_z^2}{R_z^3},$$

kde $T_z = 1$ rok je doba obehu Zeme okolo Slnka. Vyjadrením T_d a dosadením z prvej rovnice dostávame

$$T_d = T_z\sqrt{\frac{R_d^3}{R_z^3}} = T_z\sqrt{(\sin 60°)^3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{roka} \approx 0{,}806\,\text{roka}.$$

$\boxed{14.}$ Archimedov zákon pre malú nádobu hovorí, že hmotnosť vody vytlačenej nádobou je rovná hmotnosti nádoby (a jej obsahu, samozrejme). Keď teda do nádoby vložíme závažie s hmotnosťou m, objem jej ponorenej časti stúpne o $\frac{m}{\rho}$. Pri obsahu podstavy $S/4$ toto znamená, že nádoba musí klesnúť o $\frac{m}{\rho}/\frac{S}{4} = \frac{4m}{\rho S}$ vzhľadom na hladinu vody. Keďže objem ponorenej časti nádoby stúpol o $\frac{m}{\rho}$, musela stúpnuť aj hladina vody v sude, a to presne o toľko, akoby sme doň doliali $\frac{m}{\rho}$ vody. Pri obsahu podstavy S to znamená stúpnutie hladiny o $\frac{m}{\rho S}$. Vzhľadom na sud teda nádoba klesne o $-\frac{m}{\rho S} + \frac{4m}{\rho S} = \frac{3m}{\rho S}$.

$\boxed{15.}$ Kým sa pustíme do riešenia tejto úlohy, spomeňme si, že tiažové zrýchlenie vo vzdialenosti x od guľovej planéty s hmotnosťou m je $\varkappa\frac{m}{x^2}$ (za predpokladu, že x nie je menšie ako polomer planéty).
Ak by sme guľovú dutinu vyplnili rovnakým materiálom z akého je zvyšok planéty, v bodoch A aj B by bolo tiažové zrýchlenie rovné $\varkappa\frac{M}{R^2}$, kde M je hmotnosť plnej guľovej planéty a R jej polomer. Jediné, čo sme však vyplnením dutiny urobili je, ze sme pridali planétku s polovičným polomerom do miesta, kde bola predtým dutina. Táto planétka má osminový objem oproti veľkej, jej hmotnosť je teda $M/8$. V bode A preto táto planétka spôsobuje gravitačné zrýchlenie $\varkappa\frac{M/8}{(R/2)^2}$ a v bode B zrýchlenie $\varkappa\frac{M/8}{(3R/2)^2}$, všetko v smere do stredu veľkej planéty. Gravitačné zrýchlenia od deravej planéty a planétky v dutine sa nám teda pekne sčítajú a môžeme napísať

$$a + \varkappa\frac{M/8}{(R/2)^2} = \varkappa\frac{M}{R^2} \qquad \text{a} \qquad b + \varkappa\frac{M/8}{(3R/2)^2} = \varkappa\frac{M}{R^2}.$$

Odtiaľ vyjadríme $a = \frac{1}{2}\varkappa\frac{M}{R^2}$ a $b = \frac{17}{18}\varkappa\frac{M}{R^2}$, čiže

$$b = \frac{17}{9}a.$$

$\boxed{16.}$ Kompresor podľa zadania stláča vzduch rýchlo, ten si teda so svojím okolím nestihne vymeniť veľa tepla a preto dej môžeme pokladať za adiabatický. Pre nejaké skúmané množstvo vzduchu potom platí rovnica $pV^{\varkappa} = \text{konšt}$, kde $\varkappa \approx 1{,}4$ pre vzduch. Zároveň preň platí, samozrejme, aj všeobecná stavová rovnica plynu $pV/T = \text{konšt}$. Keď umocním túto rovnicu na $\varkappa$ a potom výsledok predelím prvou rovnicou, dostanem vzťah

$$\frac{p^{\varkappa-1}}{T^{\varkappa}} = \text{konšt.},$$

v ktorom figurujú už iba nám známe veličiny p a T. Ak označíme tlak v kabíne p_0, môžeme písať rovnosť pre stav skúmaného množstva vzduchu pred stlačením (ľavá strana ronvice) a po stlačení (pravá strana):

$$\frac{\left(\frac{p_0}{4}\right)^{\varkappa-1}}{T_v^{\varkappa}} = \frac{p_0^{\varkappa-1}}{T^{\varkappa}},$$

odkiaľ dostaneme teplotu vzduchu po stlačení

$$T = 4^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\, T_v \approx 331\,\mathrm{K} \approx 58°\mathrm{C}.$$

$\boxed{17.}$ Nech v je rýchlosť lietadla vzhľadom na vzduch, w rýchlosť vetra v prvých dvoch prípadoch a D vzdialenosť letísk. Potom

$$T_1 = \frac{D}{v+w} + \frac{D}{v-w} = \frac{2Dv}{v^2 - w^2}.$$

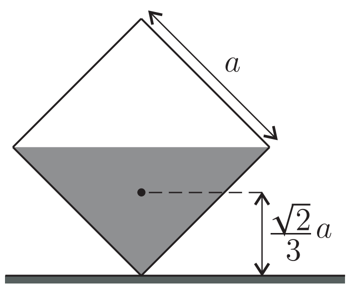
V druhom prípade musí pilot lietadlo nasmerovať „mimo" priameho smeru, aby kompenzoval unášanie vetrom. Výsledná rýchlosť musí byť kolmá na rýchlosť vetra, vznikne nám teda pravouhlý trojuholník, z ktorého dostaneme veľkosť výslednej rýchlosti $\sqrt{v^2 - w^2}$. Odtiaľ

$$T_2 = \frac{2D}{\sqrt{v^2 - w^2}}.$$

Hľadaný čas letu za bezvetria je jednoducho

$$T = \frac{2D}{v} = \frac{T_2^2}{T_1}.$$

$\boxed{18.}$ Pri ideálnom preklápaní sa pohybujeme tak pomaly, že hladina vody v kocke bude stále vodorovná a voda nebude mať prakticky žiadnu kinetickú energiu. My potrebujeme je dostať akvárium s vodou do labilnej polohy, t.j. aby sa ťažisko vody nachádzalo nad hranou akvária okolo ktorej ho prevraciame. Na začiatku sa ťažisko vody nachádzalo vo výške $\frac{a}{4}$. Pri pohľade z boku sa zdá, že v labilnej polohe voda vypĺňuje trojuholník v dolnej časti akvária. Jej ťažisko sa nachádza v dvoch tretinách výšky tohto trojuholníka, teda vo výške $\frac{\sqrt{2}}{3}a$:



Práca potrebná na prevrátenie akvária je potom jednoducho súčin zmeny výšky ťažiska násobenej hmotnosťou vody a tiažovým zrýchlením. Ak uvážime, že hmotnosť vody je daná súčinom polovice objemu kocky a hustoty vody, dostávame pre hľadanú prácu

$$W = \left(\frac{1}{2}a^3\rho\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{3} - \frac{a}{4}\right)g = \rho a^4 g\left(\frac{4\sqrt{2}-3}{24}\right).$$

$\boxed{19.}$ Elektrická sila pôsobiaca na časticu má veľkosť $F_e = QE$ a smer zhodný so smerom elektrickej intenzity E, pre kladne nabitú časticu orientáciu nahor (pre zápornú dole). Magnetická sila má veľkosť $F_m = QvB$ (lebo vektory rýchlosti a magnetickej indukcie sú na seba kolmé) a smer kolmý na oba vektory rýchlosti aj magnetickej indukcie, pričom jej orientácia pre kladný náboj Q je dole (pre záporný hore). Ak sa častica nemá vychyľovať zo svojej dráhy, výslednica síl pôsobiacich na ňu musí byť nulová. Vidíme, že pre akýkoľvek náboj Q (kladný i záporný) majú magnetická a elektrická sila pre nami danú situáciu smer zhodný a orientáciu opačnú. Preto výsledná požiadavka na priamočiary pohyb je len požiadavka na rovnosť veľkostí oboch síl

$$QE = F_e = F_m = QvB, \qquad \text{odkiaľ dostávame} \qquad B = \frac{E}{v}.$$

$\boxed{20.}$ Ak je výška vody vo vani h, tlak na jej dne bude o ρgh väčší ako atmosferický tlak p_a okolo vane. Nehybná voda na dne vane má teda tlak $p_a + \rho gh$, pričom po prejdení výtokom naberie nejakú rýchlosť v a jej tlak klesne na p_a. Z Bernoulliho rovnice $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konšt.}$ dostávame

$$(p_a + \rho gh) + 0 = p_a + \tfrac{1}{2}\rho v^2,$$

z čoho $v = \sqrt{2gh}$. Pri priereze odtoku S bude objemový výtok z vane $Q_{\text{von}} = Sv = S\sqrt{2gh}$. Ak je stav vody vo vani ustálený, objemový prítok sa musí rovnať výtoku, čiže $Q = Q_{\text{von}} = S\sqrt{2gh}$. Odtiaľ

$$h = \frac{Q^2}{2gS^2}.$$

$\boxed{21.}$ Označme rýchlosť koráliku v najvyššom bode trajektórie ako u a pozrime sa na celú situáciu z jeho pohľadu. Aby na obruč nijako nepôsobil, musia byť v rovnováhe všetky sily naň pôsobiace v zvislom smere, t.j. odstredivá a tiažová sila:

$$\frac{mu^2}{r} = mg.$$

Ak si odtiaľ vyjadríme rýchlosť u, môžeme si spočítať kinetickú energiu koráliku v najvyššom bode

$$E = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mgr.$$

Označme rýchlosť koráliku v najnižšom bode ako v. Zo zákona zachovania energie musí platiť

$$\frac{1}{2}mv^2 = E + mg(2r) = \frac{1}{2}mgr + 2mgr = \frac{5}{2}mgr.$$

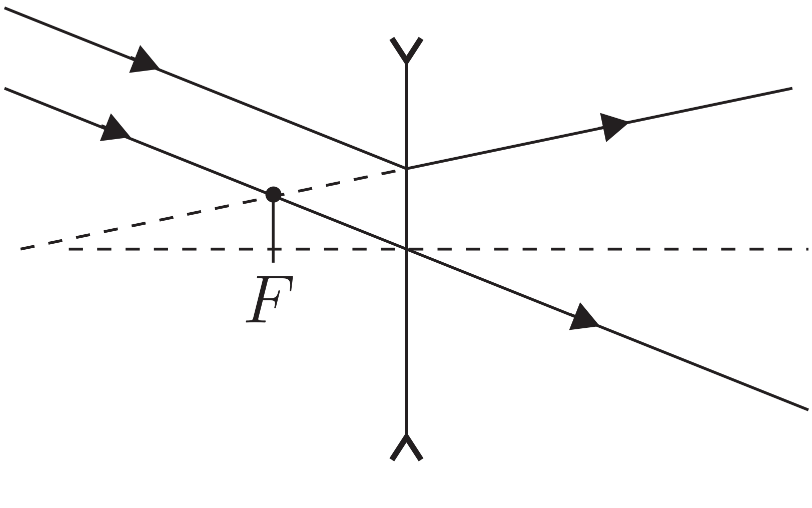
Rýchlosť v najnižšom bode trajektórie bude teda

$$v = \sqrt{5gr}.$$

V tomto bode pôsobí korálik na obruč súčtom tiažovej a odstredivej sily, pretože majú súhlasný smer. Pre hľadanú silu preto platí

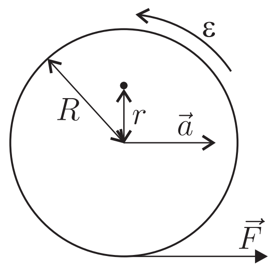
$$F = \frac{mv^2}{r} + mg = 6mg.$$

$\boxed{22.}$ Šošovka na obrázku je zrejme rozptylka. Vieme, že ak do rozptylky zasvietime rovnobežný zväzok lúčov rovnobežne s optickou osou, dostaneme neskutočný obraz v ohnisku – to znamená, lúče za šošovkou vyzerajú, akoby vychádzali z ohniska. Ak do šošovky zasvietime tento rovnobežný zväzok pod iným uhlom, znova dostaneme neskutočný obraz, tentoraz mimo optickej osi, ale v rovnakej vzdialenosti od šošovky ako ohnisko. Dráhu jedného lúča máme už v obrázku. Keďže lúč prechádzajúci stredom šošovky sa na nej neláme, vieme si do obrázka zakresliť dráhu druhého lúča, pred šošovkou rovnobežného s prvým.



Potom nám už len stačí nájsť obraz, z ktorého zdanlivo vychádzajú oba lúče za šošovkou, premietnuť ho na optickú os, a máme jedno ohnisko šošovky. Druhé bude samozrejme na druhej strane, symetricky podľa roviny šošovky.

$\boxed{23.}$ Situáciu budeme skúmať z inerciálnej vzťažnej sústavy, ktorej počiatok je pred zážihom motora v strede (ťažisku) planéty malého princa. Tá je výhodná preto, lebo v nej nemáme žiadne zotrvačné sily (lebo je inerciálna) a taktiež vektor do ťažiska je nulový a potom rovnica pre moment sily vyzerá veľmi príťažlivo (jednoducho). Potom v tejto sústave platí, že zrýchlenie ťažiska planéty je $a_T = F/m$ a uhlové zrýchlenie planéty je $\varepsilon = M/J$, kde $M = FR$ je celkový moment síl pôsobiacich na planétu a $J = \frac{2}{5}mR^2$ je jej moment zotrvačnosti.



My hľadáme priamku (kolmú na obrázok) takú, že jej zrýchlenie a je nulové. Ak je jej vzdialenosť od stredu planéty r, musí pre ňu platiť $a = a_T - \varepsilon r = 0$, z čoho ľahko nachádzame

$$r = \frac{a_T}{\varepsilon} = \frac{F/m}{FR/J} = \frac{2}{5}R.$$

Teraz si ešte treba uvedomiť fakt, že toto je vzdialenosť od stredu planéty a smeruje „preč“ od motora (inak by sa zrýchlenia sčitovali). Hľadaná vzdialenosť priamky od motora je $\frac{7}{5}R$.

$\boxed{24.}$ Nech p_a je atmosferický tlak v okolí hrnca. Na začiatku je v hrnci tiež tlak p_a, pri zohrievaní začne stúpať. Ak však stúpne nad $p_a + \frac{Mg}{S}$, nadvihne pokrievku a trocha vzduchu vyfučí, až kým tlak neklesne naspäť pod $p_a + \frac{Mg}{S}$. Nateraz predpokladajme, že toto sa naozaj stane, takže v čase, keď má vzduch v hrnci teplotu T, bude jeho tlak $p_a + \frac{Mg}{s}$. Pri chladnutí bude tlak už len klesať, a ak pokrievka dobre prilieha, prisaje sa k hrncu a žiaden vzduch už neunikne ani nepribudne. Ba čo viac, vzduch v hrnci nebude meniť svoj objem, chladnutie bude teda izochorické. Zo stavovej rovnice $\frac{pV}{T} =$ konšt. a podmienky $V =$ konšt. získame rovnicu pre stavové veličiny hrnca pred a po vychladnutí:

$$\frac{p_a + \frac{Mg}{s}}{T} = \frac{p_0}{T_0},$$

kde p_0 je tlak v hrnci po vychladnutí. Rozdiel tlakov nad a pod pokrievkou bude teda

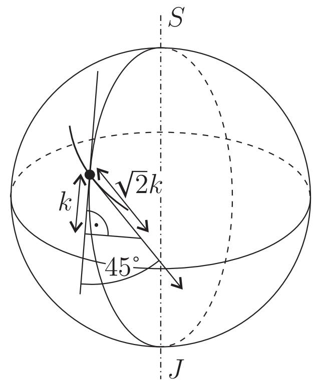
$$p_a - p_0 = p_a - \frac{T_0(p_a + \frac{Mg}{S})}{T} = p_a\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - \frac{T_0}{T}\frac{Mg}{S}.$$

Sila pôsobiaca na pokrievku bude potom

$$F = (p_a - p_0)S + Mg = (p_a S + Mg)\left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

V prípade, že tlak počas zohrievania nedosiahol $p_a + \frac{Mg}{S}$ (ľahko sa ukáže že to je práve vtedy, keď F vyjde menšie než Mg), jednoducho ochladne na pôvodnú teplotu a dosiahne pôvodný tlak p_a. Ak je teda vyššie vypočítané F menšie než Mg (alebo ak pokrievka dobre netesní), potrebná sila na zdvihnutie pokrievky bude jednoducho Mg.

$\boxed{25.}$ Urobme nasledovný myšlienkový pokus (Gedankenexperiment), aby sme si ujasnili, čo to znamená ísť na juhovýchod. Fero chce ísť stále na juhovýchod a tak si zoberie na pomoc Dana. Aby sa Ferovi ľahšie šlo presne na juhovýchod, Dano vždy urobí k krokov na juh a k krokov na východ, a na mieste, kam prišiel počká na Fera, ktorý sa vyberie priamo za ním. Ak je k dostatočne malé, t.j. v oblasti, kde sa nachádzajú Fero a Dano môžeme považovať Zem za plochú a rovnobežky s poludníkmi za na seba kolmé priamky, je jasné, že kým Dano kráčal „okolo“ štvorca so stranou k krokov, Fero pôjde po jeho uhlopriečke a Dano stretne po $\sqrt{2}k$ krokoch.



Vidíme, že ak sa budú pohybovať podľa tejto procedúry, Fero vždy prejde $\sqrt{2}$-krát väčšiu vzdialenosť na juhovýchod ako Dano na juh. No a teraz už len ostáva zodpovedať otázku, koľko najviac vieme ísť na juh. A odpoveď je, že no predsa zo severného pólu na južný, teda na juh vieme prejsť najviac vzdialenosť πR, kde R je polomer Zeme. Najväčšia vzdialenosť, ktorú vieme prejsť na juhovýchod, je potom $\sqrt{2}\pi R \approx 28300\,\mathrm{km}$.

$\boxed{26.}$ Prvý dôležitý parameter, ktorý treba spočítať, je koeficient odrazivosti loptičky, teda pomer jej rýchlostí pred a po odraze od tvrdej podložky. Ak sme ju v experimente nechali padať z výšky h a jej rýchlosť bezprostredne pred dopadom bola v, zo zákona zachovania energie dostaneme (m je hmotnosť loptičky)

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad \text{odkiaľ} \qquad v = \sqrt{2gh},$$

Podobne si môžeme z maximálnej výšky po odraze spočítať rýchlosť u bezprostredne po odraze, $u = \sqrt{gh}$. Pre koeficient odrazivosti k teda platí

$$k = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{hg}}{\sqrt{2hg}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

V druhom experimente je situácia o kus zložitejšia, pretože už sa loptička neodráža od nepohyblivej podložky, ale od loptičky s rovnakou hmotnosťou. Urobíme teda nasledovný trik. Pri dopade na zem si môžeme predstaviť, že sa loptička odráža od tenkej dosky, do ktorej súčasne zospodu narazí rovnakou rýchlosťou taká istá loptička. Tým dodáme situácii symetriu bez toho, že by sa zmenil výsledok experimentu. A teraz zo situácie vynechajme dosku. Čo sa stane? Zo symetrie vyplýva, že rozhranie medzi odrážajúcimi sa loptičkami bude stále rovinné, presne v mieste, kde bola predtým doska. A ak zanedbáme (trecie) sily vo vodorovnom smere, bude horná loptička pri odraze cítiť presne to isté, čo cítila pri odraze od tenkej dosky. Inými slovami, budú na ňu pôsobiť rovnaké sily a odrazí sa rovnakou rýchlosťou ako od tuhej podložky.

Pozrime sa teraz na naše dve loptičky. Zo zákona zachovania energie dostávame pre rýchlosť loptičky uvoľnenej zo závesu dĺžky L bezprostredne pred zrážkou $v = \sqrt{2gL}$. Táto loptička sa nepružne zráža s visiacou loptičkou, čo už pripomína predošlú situáciu, problému len treba dodať symetriu. Pozrime sa teda na celú situáciu vo vzťažnej sústave, ktorá sa pohybuje rovnakým smerom ako uvoľnená loptička, ale polovičnou rýchlosťou $\frac{v}{2}$. V tejto sústave sa loptičky pohybujú oproti sebe rovnakými rýchlosťami $\frac{v}{2}$, obe sa teda odrazia akoby od pevnej nehybnej dosky a ich rýchlosti po zrážke v tejto vzťažnej sústave budú $k\frac{v}{2} = \frac{v}{2\sqrt{2}}$. Ak sa vrátime do našej vzťažnej sústavy, dostávame pre rýchlosti loptičiek

$$u_{1,2} = \tfrac{v}{2} \pm \tfrac{v}{2\sqrt{2}} = \tfrac{v}{2}(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Potom sa už ďalej všetko správa podľa zákona zachovania mechanickej energie. Pre závislosť potenciálnej energie loptičky od výchylky φ možno jednoduchou geometriou odvodiť vzťah $E_p = mgL(1 - \cos\varphi)$, z porovnania energií potom dostávame rovnosť

$$E_p = mgL(1 - \cos\varphi_{1,2}) = \frac{1}{2}m\left(\tfrac{v}{2}(1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right)^2 = E_k.$$

Ak dosadíme za rýchlosť v a z rovnice vyjadríme výchylky loptičiek, dostaneme

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 11,9^\circ \qquad \text{a} \qquad \varphi_2 = \arccos\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 74,2^\circ.$$

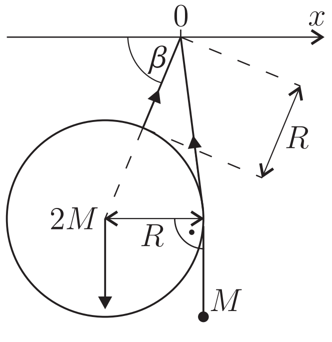
$\boxed{27.}$ Objem štvorstena je úmerný a^3. To znamená, že na zdvojnásobenie objemu potrebujeme každú pružinu predĺžiť $\sqrt[3]{2}$-krát.
Predpokladajme teraz, že na guličkách je taký náboj Q, že objem štvorstena sa zdvojnásobil. Zamerajme sa na jednu z guličiek. Pôsobia na ňu sily troch pružín veľkosti kx, kde $x = a(\sqrt[3]{2} - 1)$ je predĺženie každej pružiny. Tiež na ňu pôsobia rovnako veľké sily od ostatných troch guličiek nabitých na náboj Q, ktoré majú rovnaký smer ale opačnú orientáciu ako sily od pružín. (Každú silu od pružiny vieme „spárovať“ s elektrostatickou silou od jednej z guličiek, ktorá má opačný smer.) Všimnime si, že keďže je gulička je v rovnováhe, musí byť výslednica každého páru síl nulová. Z rovnosti trojíc síl totiž vyplýva, že všetky páry síl majú rovnako veľké výslednice, buď v smere síl kx, alebo v smere elektrostatických síl. Je zrejmé, že ak by boli tieto výslednice párov síl nenulové, aj výslednica všetkých síl pôsobiacich na guličku by bola nenulová. Dostávame teda rovnicu pre jeden pár síl:

$$ka(\sqrt[3]{2} - 1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(\sqrt[3]{2}a)^2}.$$

Riešením tejto rovnice dostaneme

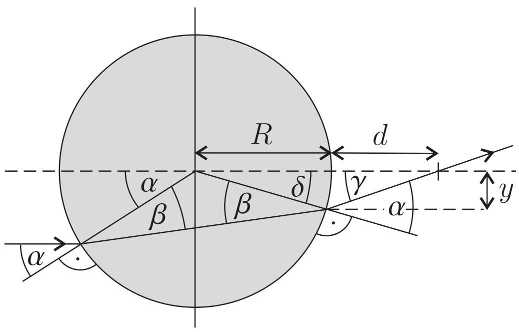
$$Q = \sqrt{2^{\frac{8}{3}}(\sqrt[3]{2} - 1)\pi\varepsilon_0 ka^3} \approx 2{,}277\sqrt{\varepsilon_0 ka^3}.$$

$\boxed{28.}$ Využijeme veľmi rafinovane fakt, že sústava môže byť v pokoji len vtedy, ak je uchytená nad ťažiskom. Spoločné ťažisko oboch gúľ teda leží priamo pod bodom závesu. Teraz si ešte uvedomíme, že dlhší špagát pôsobí na povrch ťažšej gule kolmo, lebo trenie medzi ním a guľou je nulové. Nuž, a aby sa tá guľa nehýbala, tak určite moment síl vzhľadom na jej stred musí byť nulový. Sily od špagátu smerujú do stredu, takže ich moment sily je nulový; tiaž pôsobí v ťažisku, takže jej moment sily vzhladom na ťažisko je tiež nulový; nutne potom musí byť nulový aj moment sily pôsobiacej cez kratší špagát, na ktorom visí – to znamená, tento špagát musí tiež ťahať kolmo na jej povrch (a teda smerom od jej stredu).



Naložíme podmienku o spoločnom ťažisku do rovnice $2Mx_{2M} + Mx_M = 0$, pričom vieme že $x_{2M} = -2R\cos\beta$ resp. $x_M = x_{2M} + R$. Dosadením dostaneme $\beta = \arccos\frac{1}{6} \approx 80{,}41°$.

$\boxed{29.}$ Najprv si musíme uvedomiť, že guľa nie je ideálna šošovka, preto nebude zaostrovať všetky rovnobežné lúče do jedného bodu. Pozrime sa iba na lúče prechádzajúce blízko jej stredu, teda také, ktorých uhol dopadu bude malý. Spomeňme si pri tom na približný vzťah $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$ platiaci pre takéto uhly. Nech je uhol dopadu nejakého lúča α, jeho uhol lomu β a uhol, pod ktorým pretne optickú os po prechode guľou, γ. Nakreslíme si to všetko do veľkého obrázku a pomocou α a β si vyjadríme všetky možné uhly. Neskôr sa nám budú hodiť najmä $\delta = 180° - \alpha - (180° - 2\beta) = 2\beta - \alpha$ a $\gamma = 180° - \delta - (180° - \alpha) = 2\alpha - 2\beta$.

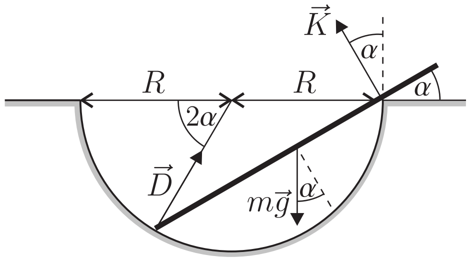


Zo Snellovho zákona lomu máme $n\sin\beta = \sin\alpha$, keďže sú však všetky naše uhly malé, môžeme napísať $n\beta = \alpha$. Všimnime si tiež, že uhol pod ktorým dopadá lúč na druhé rozhranie je β, preto bude druhý uhol lomu znova α (ako na obrázku). Pre vzdialenosť y bude platiť $y \approx R\operatorname{tg}\delta \approx R\delta$ a takisto $y \approx d\operatorname{tg}\gamma \approx d\gamma$. Pre vzdialenosť d teda dostávame (približne)

$$d = \tfrac{y}{\gamma} = R\tfrac{\delta}{\gamma} = R\frac{2\beta - \alpha}{2\alpha - 2\beta} = R\frac{2\beta - n\beta}{2n\beta - 2\beta} = R\frac{2 - n}{2(n-1)}.$$

Všetky rovnobežné lúče prechádzajúce blízko stredu gule sa teda budú pretínať približne v takejto vzdialenosti od jej (odvráteného) povrchu.

$\boxed{30.}$ Úlohu by sme mohli vyriešiť nájdením vzťahu pre energiu paličky a jeho minimalizáciou. Na toto však potrebujeme derivovať, preto si ukážeme riešenie pomocou síl.



Ak je hmotnosť paličky m, v ťažisku na ňu pôsobí tiažová sila veľkosti mg smerom nadol. Ďalej je tu reakčná sila veľkosti D od dna misky, ktorá je kolmá na dno, pretože trenie je nulové. Nakoniec na paličku pôsobí reakčná sila veľkosti K od kraja misky, ktorá bude tentoraz kvôli absencii trenia kolmá na paličku. (Ak by nebola kolmá, pri malom posúvaní paličky by konala prácu, čo dokáže len trecia sila.) Aby sa palička nehýbala, musí byť súčet síl na ňu pôsobiacich nulový. Tiež musí byť nulový súčet momentov síl na ňu pôsobiacich, napríklad aj vzhľadom na jej bod dotyku s dnom misky. Ak si dôkladne pooznačujeme všetky uhly ako na obrázku, tieto dve podmienky ľahko napíšeme v troch rovniciach (pre vodorovnú zložku sily, zvislú zložku sily, moment sily vzhľadom na spodný koniec).

$$D\cos 2\alpha - K\sin\alpha = 0$$
$$D\sin 2\alpha + K\cos\alpha - mg = 0$$
$$mgR\cos\alpha + K(2R\cos\alpha) = 0$$

Z tretej rovnice vyjadríme $K = \frac{mg}{2}$, z prvej $D = K\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$, dosadíme všetko do druhej a dostaneme

$$\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \cos\alpha - 2 = 0.$$

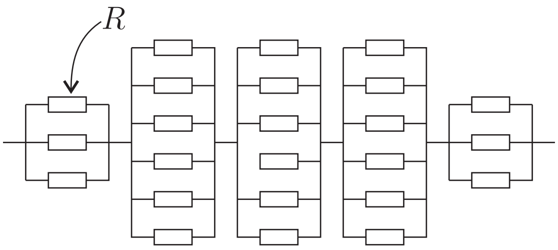
Použitím vzťahov $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ túto nepeknú rovnicu rýchlo upravíme do tvaru

$$4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0.$$

Toto je už len kvadratická rovnica pre $\cos\alpha$, ktorej riešenia sú $\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$. Zjavne iba riešenie s + môže byť kosínusom nejakého rozumného uhla, čiže

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right).$$

$\boxed{31.}$ Zavesme si náš dvanásťsten za jeden zo zapojených vrcholov. Všimnime si, že kvôli osovej symetrii podľa zvislej osi (prechádzajúcej práve cez dva zapojené vrcholy) bude v bodoch s rovnakou výškou rovnaký elektrický potenciál. Takéto skupiny bodov môžeme potom vodivo spojiť, pretože týmito spojeniami aj tak nebude tiecť žiadny prúd. Po zlúčení týchto skupín bodov bude schéma vyzerať nasledovne.



Z nej už výsledný odpor R_v ľahko dopočítame:

$$R_v = \frac{1}{3}R + \frac{1}{6}R + \frac{1}{6}R + \frac{1}{6}R + \frac{1}{3}R = \frac{7}{6}R.$$