Kapitola 1

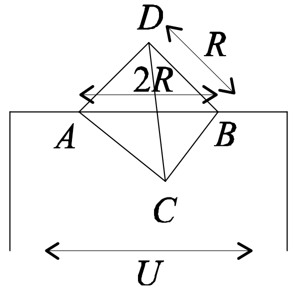
Zadania

$\boxed{1.}$ Predpokladajte, že Venuša i Zem obiehajú okolo Slnka rovnakým smerom po kružniciach v jednej rovine. Doba obehu Venuše okolo Slnka je približne 5/8 zemského roka. Aká časť (zemského) roka uplynie medzi dvoma priblíženiami oboch planét (okamih, keď je Venuša presne medzi Slnkom a Zemou)?

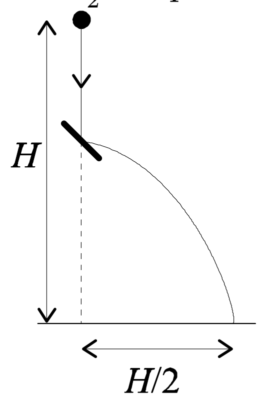
$\boxed{2.}$ Na trati Piešťany - Bratislava dlhej $s = 100\,\mathrm{km}$ je momentálne výluka - prebieha jej oprava. Prejaví sa to tak, že cez deň vlaky na tejto trati musia chodiť menšou rýchlosťou, ako by mohli, keby sa pri koľajniciach neponevieralo veľa robotníkov. Meškajú preto $\Delta t = 20\,\mathrm{min}$ oproti normálnemu času. V noci chodia vlaky bez meškania, teda o $\Delta v = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ rýchlejšie ako cez deň. Akou rýchlosťou chodia tieto vlaky v noci?

$\boxed{3.}$ Ak po naklonenej rovine s uhlom sklonu α stúpa bez trenia kvádrik s počiatočnou rýchlosťou v, dostane sa do maximálnej vzdialenosti l od miesta, z ktorého vyštartoval. Do akej vzdialenosti sa dostane kvádrik, ak koeficient trenia medzi ním a naklonenou rovinou bude rovný $f = \frac{3}{4}\tan\alpha$?

$\boxed{4.}$ Kostra štvorstenu $ABCD$ je vyrobená z odporového drôtu tak, že každá hrana má odpor R, iba odpor úsečky AB je $2R$. Aký prúd bude prechádzať obvodom, ak na konce tejto úsečky pripojíme napätie U?



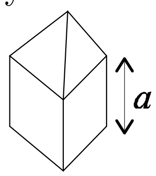
$\boxed{5.}$ Z výšky H púšťame malú guličku. Do akej výšky máme umiestniť malú, hladkú, o 45° naklonenú plôšku tak, aby gulička po pružnom odraze od nej doletela presne do miesta vzdialeného $\frac{H}{2}$ od pôvodného miesta dopadu?



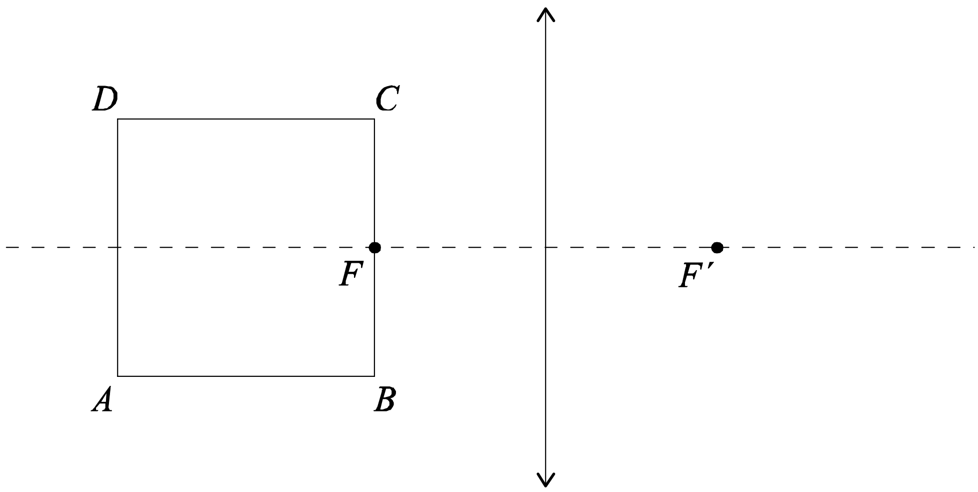
$\boxed{6.}$ Mestá New Orleans a Káhira sa obe nachádzajú na 30° severnej zemepisnej šírky. New Orleans leží na 90° západnej, Káhira na 30° východnej zemepisnej dĺžky. Aká časť rovnobežky (v kilometroch) sa nachádza medzi týmito mestami? Rátajte kratšiu z dvoch možných častí.

$\boxed{7.}$ V nádobe s objemom $V = 1\,\mathrm{l}$ sa nachádza jeden gram dusíka a jeden gram kyslíka. Aký je pri teplote $T = 400\,\mathrm{K}$ tlak vo vnútri tejto nádoby?

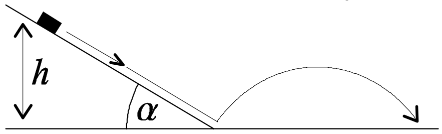
$\boxed{8.}$ V akej výške (od podlahy) sa nachádza ťažisko paličkovej kostry trojbokého domčeka, ktorého strecha je zostrojená z pravidelného štvorstenu a obytná časť z trojbokého hranola. Všetky hrany útvaru majú dĺžku a a rovnakú hmotnosť.



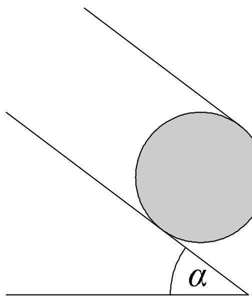
$\boxed{9.}$ Nájdite obraz štvorca $ABCD$ pri zobrazení spojkou s ohniskom v bode F. Stred strany BC, ktorá je na optickú os šošovky kolmá, sa nachádza presne v tomto ohnisku.



$\boxed{10.}$ Dolu naklonenou rovinou so sklonom $\alpha = 30°$ sa bez trenia šmýka malé teliesko. Keď sa po prekonaní výškového rozdielu $h = 1\,\mathrm{m}$ došmýka na jej úpätie, pružne sa odrazí od vodorovného povrchu a ďalej sa pohybuje ako pri šikmom vrhu. Do akej vzdialenosti od úpätia naklonenej roviny toto teliesko dopadne?



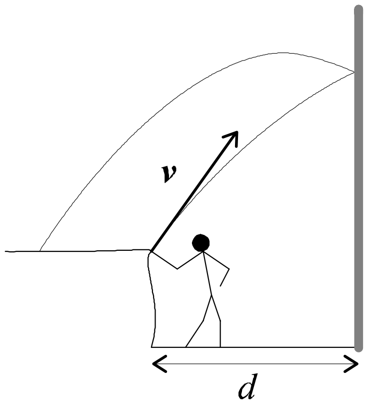
$\boxed{11.}$ Valec je položený na naklonenej rovine so sklonom α. Na ňom je namotaná tenká niť, ktorá je mimo valca rovnobežná s rovinou a nakoniec upevnená. Aký najmenší môže byť koeficient f statického trenia medzi valcom a naklonenou rovinou, aby sa valec nezačal šmýkať nadol?



$\boxed{12.}$ Stojíme na kraji loďky hmotnosti M. My máme hmotnosť m. Rozbehneme sa vzhľadom na loďku so zrýchlením a. S akým zrýchlením sa pohybujeme vzhľadom na vodu?

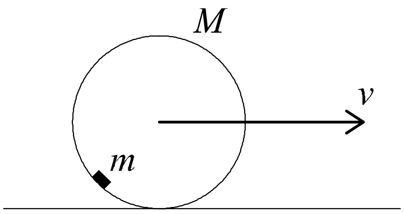
$\boxed{13.}$ Juraj stojí v jame vo vzdialenosti $d = 3\,\mathrm{m}$ od veľmi vysokej steny. Ako ďaleko za jamu môže odrazom od steny hodiť loptičku, ak hádže maximálnou rýchlosťou $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$? Odraz od steny je dokonale pružný a loptička opúšťa

Jurajovu ruku na okraji jamy, teda v nulovej výške. Odpor vzduchu zanedbajte.



$\boxed{14.}$ Na vodorovnej priamke sa nachádzajú rovnomerne rozmiestnené tri body A, B a C v tomto poradí. V jednom okamihu sa bod A začne pohybovať rýchlosťou v nahor a bod C z nulovej počiatočnej rýchlosti začne zrýchlovať smerom nadol so zrýchlením a. Matematicky popíšte, ako sa má v zvislom smere pohybovať bod B, aby všetky tri body ostali na jednej priamke.

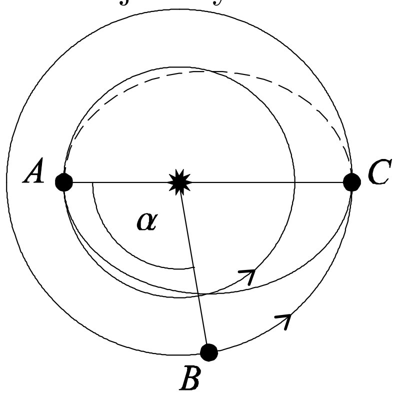
$\boxed{15.}$ Po vodorovnej rovine sa bez prešmykovania rýchlosťou $v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ valí dutý valec (bez podstáv), vo vnútri ktorého sa nachádza malé teliesko. Koeficient trenia telieska o vnútro valca je $f = 0,1$. Po prejdení akej vzdialenosti sa valec prvýkrát zastaví, ak hmotnosti valca a telieska sú $M = 5\,\mathrm{kg}$ a $m = 1\,\mathrm{kg}$? Predpokladajte, že teliesko sa vzhľadom na os valca nepohybuje.



$\boxed{16.}$ Na počiatku bola nehmotná palička AB dĺžky l a v bode B sa nachádzal hmotný bod. Jedného dňa sa bod A začal z ničoho nič pohybovať rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v kolmo na AB a ťahať za sebou bod B. Rýchlosť A sa pri tom nemenila - stále bola rovnako veľká, kolmá na POČIATOČNÝ stav úsečky. Za aký čas sa úsečka AB otočila o $360°$? Všetko sa samozrejme nachádza vo vákuu a mimo gravitačného poľa.

$\boxed{17.}$ Dve hracie karty sa opierajú vrchnými koncami o seba. Aký najmenší uhol α môžu tieto dve karty zvierať, ak koeficient trenia medzi nimi a podložkou je $f = 0,1$?

$\boxed{18.}$ Predstavte si, že chcete zo Zeme vyslať sondu na Mars. Výpočty múdrych fyzikov ukázali, že energeticky najvýhodnejšia je takzvaná Hohmanovská trajektória (obr. A, B - polohy Zeme a Marsu v okamihu štartu sondy, C je miesto, kde sa sonda stretne s Marsom). Predpokladajte, že Zem a Mars na sondu gravitačne nepôsobia, po štarte sa teda sonda pohybuje po elipse, ktorej perihélium je v bode A a afélium v bode C. Aký veľký je uhol α medzi Zemou, Slnkom a Marsom v čase štartu rakety? Predpokladajte, že obe planéty obiehajú okolo Slnka v tej istej rovine po kružniciach a polomer obežnej dráhy Marsu je $1,52-$násobok polomeru obežnej dráhy Zeme.



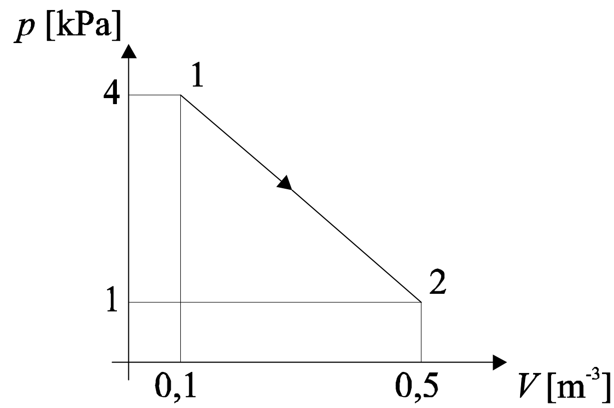
$\boxed{19.}$ Na závese dĺžky $L = 0,5\,\mathrm{m}$ visí plastelínová gulička s hmotnosťou $M = 1\,\mathrm{kg}$. Vo vodorovnom smere do nej rýchlosťou v vletí náboj hmotnosti $m = 5\,\mathrm{g}$ a uviazne v nej. Pre aké hodnoty rýchlosti v sa záves pretrhne, ak vydrží maximálnu napínajúcu silu $F = 15\,\mathrm{N}$?

$\boxed{20.}$ Vypočítajte odpor medzi dvoma susednými bodmi štvorca, ktorého strany majú odpor R a protiľahlé vrcholy sú spojené drôtom s odporom $R/2$.

$\boxed{21.}$ Vo vode je podstavou nadol položený kužeľ s hmotnosťou $m = 1\,\mathrm{kg}$, výškou $h = 0,2\,\mathrm{m}$ a polomerom podstavy $r = 0,1\,\mathrm{m}$. Akou silou je pritláčaný na dno nádoby s hĺbkou $H = 1\,\mathrm{m}$, ak medzi ním a dnom nie je ani voda, ani vzduch (t.j. nádoba i kužeľ sú dokonale hladké)?

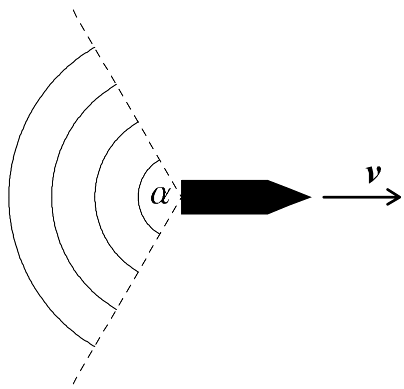
$\boxed{22.}$ Vo vzdialenosti $3R$ od planéty s polomerom R a hmotnosťou M je kruhová rýchlosť rovnako veľká ako úniková rýchlosť z povrchu planéty s polomerom r a hmotnosťou m. Aký je pomer $r : R$ polomerov týchto planét, ak majú rovnakú hustotu?

$\boxed{23.}$ Na obrázku je zobrazený dej s ideálnym plynom $1 \to 2$. Pri akom objeme dosiahne tento plyn maximálnu teplotu?

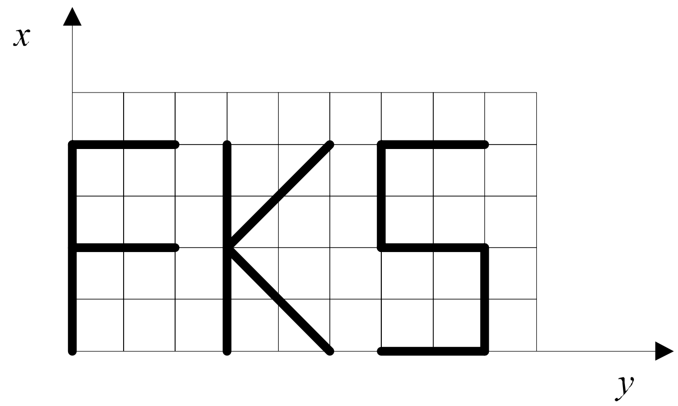


$\boxed{24.}$ Malý neskúsený Tomáš našiel kúsok ľahko ohybnej krajčírskej gumy, ktorej dĺžka v nenatiahnutom stave bola l. Hneď ako zistil, že pri naťahovaní sa správa ako pružina s tuhosťou $k = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, na jeden koniec gumy priviazal malé závažie s hmotnosťou $m = 0,04\,\mathrm{kg}$ a zatiaľ čo druhý zvieral pevne v ruke, natiahol gumu vo vodorovnom smere na dĺžku $2l$. Potom závažie pustil. Za aký čas od tohto okamihu sa závažie dotkne Tomášovej ruky? Pokles závažia pod vplyvom gravitácie je za takýto krátky čas zanedbateľný.

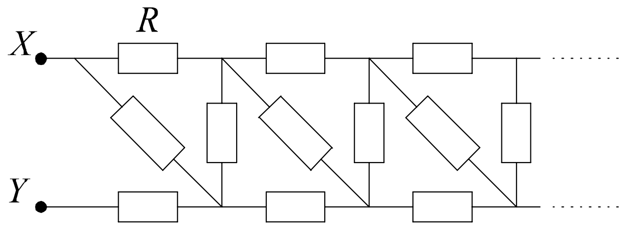
$\boxed{25.}$ Stano stál na kopci pri Dunaji a tešil sa z krásneho výhľadu, keď tu zrazu zbadal na rieke loď. Tá sa vzhľadom na neho pohybovala rýchlosťou $v = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ po prúde. Keď sa Stanislav lepšie pozrel, zbadal, že za loďou bol trojuholník z vĺn s vrcholovým uhlom $\alpha = 60°$. O chvíľu išla okolo Stana iná loď, taktiež rýchlosťou v, ibaže proti prúdu rieky a vrcholový uhol trojuholníka vymedzujúceho rozvlnenú časť hladiny bol $\beta = 30°$. Ako rýchlo tečie voda v Dunaji, ak predpokladáme, že táto rýchlosť je v celej rieke rovnaká? Predpokladajte, že rýchlosť šírenia vĺn nezávisí od rýchlosti lode.



$\boxed{26.}$ Nájdite ťažisko nápisu FKS na obrázku. Sieť, do ktorej je nápis vpísaný, je tvorená nehmotnými jednotkovými štvorčekmi a každé písmeno je zostrojené z rovnakých tenkých homogénnych paličiek. Obe súradnice ťažiska zaokrúhlite na dve desatinné miesta.



$\boxed{27.}$ Vypočítajte odpor medzi bodmi X a Y takéhoto nekonečného rebríka, ak každý rezistor má odpor R:

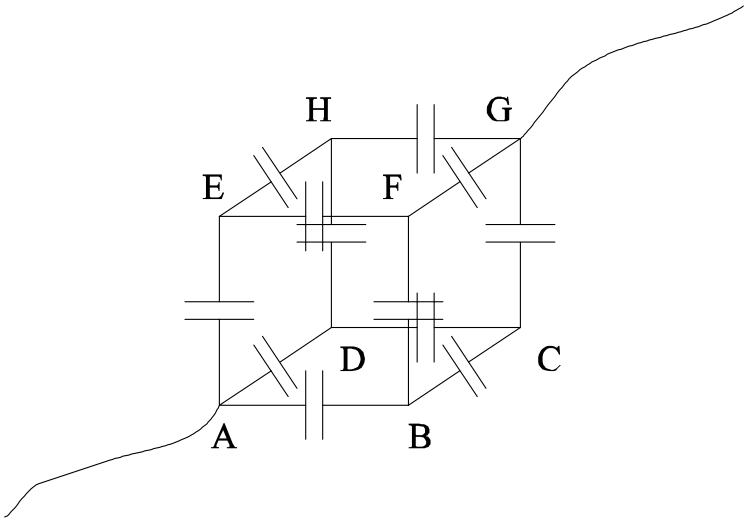


$\boxed{28.}$ V rovnakej vzdialenosti ako Zem obieha okolo Slnka družica, ktorá má tvar gule. Aká je rovnovážna teplota tejto družice, ak efektívna teplota Slnka je $T_S = 5800\,\mathrm{K}$? Predpokladajte, že Slnko aj družica žiaria ako dokonale čierne telesá príslušných teplôt.

$\boxed{29.}$ Gulička s nábojom $Q = 1\,\mathrm{C}$ a hmotnosťou $m = 50\,\mathrm{g}$ je zavesená v horizontálnom homogénnom magnetickom poli. V najnižšej polohe jej vo vodorovnom smere udelíme rýchlosť $v_0 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ tak, aby odstredivá a magnetická sila mali rovnaký smer. Aká musí byť minimálna veľkosť magnetickej indukcie B nášho poľa, aby gulička konala pohyb po kružnici v zvislom smere? Dĺžka závesu je $l = 0,4\,\mathrm{m}$.

$\boxed{30.}$ Rýchlosťou $v = 0,2\ c$, kde c je rýchlosť svetla, sa od nás vzďaľuje kozmická loď. Ďalekohľadom pozorujeme, ako na hodinách v kozmickej lodi ubehla jedna minúta. Ako dlho sme to pozorovali?

$\boxed{31.}$ Nájdite kapacitu medzi dvoma koncami telesovej uhlopriečky kocky, ak jedna strana má kapacitu C.


H
G
E
F
D
C
A
B

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Označme obežné doby oboch planét ako T_Z, T_V. Planéty obiehajú po kružniciach uhlovými rýchlosťami $\frac{2\pi}{T_Z}$, resp. $\frac{2\pi}{T_V}$. Jeden obeh Venuše trvá menej ako jeden rok, takže aj uhlová rýchlosť Venuše pri obehu okolo Slnka je väčšia. Skúmajme teraz hodnotu uhla φ, ktorý nech je rovný uhlu zovretému Venušou, Slnkom a Zemou. Jeho hodnota na začiatku je zrejme 0 a potom po nejakom čase t sa bude meniť ako rozdiel uhlov opísaných sprievodičmi Venuše a Zeme, teda

$$\varphi = \frac{2\pi}{T_V}t - \frac{2\pi}{T_Z}t.$$

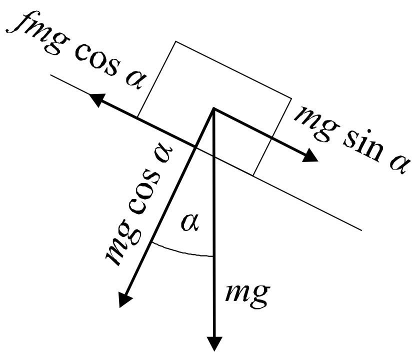
Planéty sa opäť priblížia vtedy, keď bude hodnota tohto uhla rovná 2π, z čoho dostaneme $t = \frac{T_V T_Z}{T_Z - T_V} = \frac{5}{3}$ roka.

$\boxed{2.}$ Označme hľadanú rýchlosť ako v a čas, ktorý trvá cesta nemeškajúcemu, vlaku ako t. Zrejme platí

$$\begin{aligned} vt &= s \\ (t+\Delta t)(v-\Delta v) &= s. \end{aligned}$$

Po dosadení dostaneme kvadratickú rovnicu $\Delta t\ v^2 - \Delta v \Delta t\ v - s\Delta v = 0$, ktorej korene sú $\dfrac{\Delta v \Delta t \pm \sqrt{(\Delta v \Delta t)^2 + 4s\Delta v \Delta t}}{2\Delta t}$. Ľahko zistíte, že rozumné (kladné) riešenie je so znamienkom +, ktoré je po dosadení zadaných číselných hodnôt rovné približne $88{,}10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

$\boxed{3.}$ Najprv sa pozrime na zdanlivo odlišný problém. Povedzme, že na našu naklonenú rovinu sme položili kvádrik zo zadania. Aký najmenší môže byť koeficient trenia f_n, aby sa nezačal šmýkať nadol? Odpoveď nájdeme pomocou obrázka.



Ak rozložíme tiažovú silu veľkosti mg, kde g je tiažové zrýchlenie a m hmotnosť kvádrika, na zložku kolmú a rovnobežnú s naklonenou rovinou, zistíme, že kvádrik sa snaží rozhýbať sila s veľkosťou $mg\sin\alpha$. K naklonenej rovine je pritláčaný silou $mg\cos\alpha$, čo pri nenulovom koeficiente trenia spôsobí treciu silu maximálnej veľkosti $f_n mg\cos\alpha$. Táto trecia sila nemusí mať maximálnu veľkosť -- je to len reakcia na rovnobežnú zložku tiažovej sily. Maximálna hodnota trecej sily je len hraničným prípadom, kedy sa kvádrik ide už už zošmyknúť. Najmenší koeficient trenia potrebný na udržanie kvádrika teda dostaneme z rovnosti

$$f_n mg\cos\alpha = mg\sin\alpha \Rightarrow f_n = \tan\alpha,\ f = \frac{3}{4}f_n.$$

Vráťme sa k pôvodnému zadaniu. Ako sa tak kvádrik šmýka hore naklonenou rovinou, brzdí ho nejaká sila F, ktorej veľkosť je zrejme $mg\sin\alpha$. Vieme, že spomalenie kvádrika je úmerné tejto sile a jeho brzdná dráha (pôvodne l) je nepriamo úmerná jeho spomaleniu. Preto ak sa pridaním trenia táto sila $k-$krát zväčší, brzdná dráha sa $k-$krát zmenší. Zistiť k nie je až taký problém - keby bol koeficient trenia rovný f_n, išlo by o $k=2$, pretože veľkosť trecej sily by bola rovnaká ako veľkosť zložky tiažovej sily rovnobežnej s rovinou. Trením s $f=\frac{3}{4}f_n$ silu nezdvojnásobíme, ale pridáme iba jej $\frac{3}{4}-$násobok, teda $k = 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow$ kvádrik sa zastaví po prejdení vzdialenosti $\frac{4}{7}l$, t.j. po $\frac{4}{7}$ vzdialenosti, ktorú by prešiel, keby naňho nepôsobila trecia sila.

$\boxed{4.}$ Hľadaný prúd označme I. Keďže polohy bodov C a D na obrázku sú vzhľadom na AB rovnocenné, nie je dôvod, aby niektorý z týchto dvoch bodov mal výšší potenciál ako druhý. Takže napätie medzi bodmi C a D je $0\,\mathrm{V}$. V praxi to znamená, že odporom CD nebude tiecť nijaký prúd, preto ho môžeme odstrániť. Dostaneme tak schému, ktorej odpor už vieme dopočítať pomocou pravidiel pre paralelne a sériovo zapojené rezistory.

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} \Rightarrow I = \frac{3U}{2R}$$

$\boxed{5.}$ Nech veľkosť rýchlosti guličky pri dopade na plôšku je v a hľadaná výška je h. Podľa zákona zachovania energie pre guličku s hmotnosťou m dostaneme $mg\,(H-h)=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{2g\,(H-h)}$. Odraz je pružný, preto uhol dopadu je rovný uhlu odrazu, po ktorom bude mať rýchlosť vodorovný smer. Pôjde teda o pohyb zložený z voľného pádu z výšky h a rovnomerného pohybu s rýchlosťou v vo vodorovnom smere. Tento pohyb teda bude trvať čas $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (lebo $h=\frac{1}{2}gt^2$). Vo vodorovnom smere zatiaľ preletí gulička vzdialenosť $vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{4h\,(H-h)}$, čo je však podľa zadania rovné $\frac{H}{2}$. Platí teda rovnosť

$$\frac{H}{2}=\sqrt{4h\,(H-h)}.$$

Úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu s koreňmi $\frac{16\pm\sqrt{256-64}}{32}H$. Podmienku $h<H$ spĺňa riešenie $\frac{2-\sqrt{3}}{4}H\approx 0,067\ H$.

$\boxed{6.}$ Celková dĺžka rovnobežky je $2\pi r$, kde r je vzdialenosť ľubovoľného bodu na 30. rovnobežke od zemskej osi. Tento polomer ľahko vyrátame z pravouhlého trojuholníka, kde R je polomer Zeme. Podiel $r/R=\cos 30°$, a teda $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R\approx 5524\,\mathrm{km}$. Rozdiel v zemepisných šírkach miest je $120°$, z celkového obvodu sa teda medzi mestami nachádza $\frac{120°}{360°}\,2\pi r\approx 11570\,\mathrm{km}$.

$\boxed{7.}$ Ak máme v nádobe viacero druhov plynu, výsledný tlak bude jednoduchým súčtom ich čiastočných tlakov. Tlak dusíka a kyslíka označme p_{N_2} a p_{O_2} a už nám nič nebráni v napísaní stavových rovníc

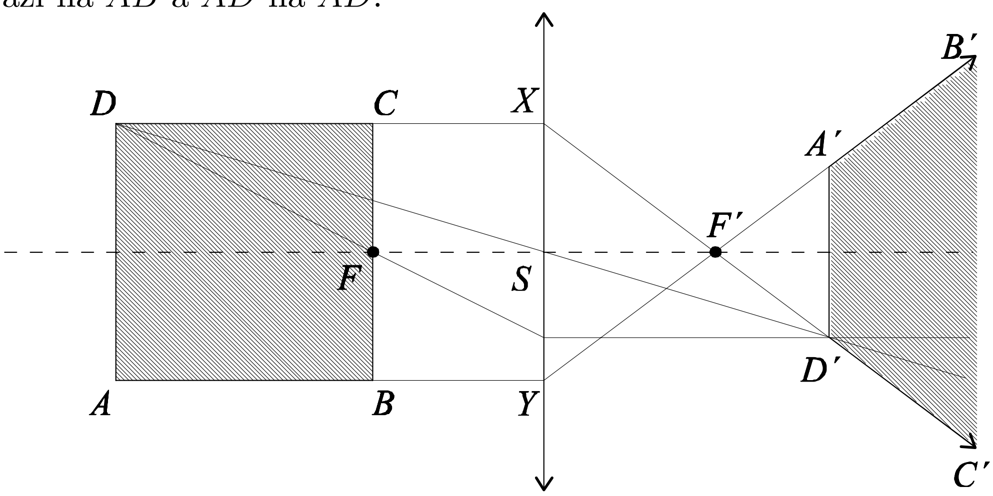
$$\begin{aligned} p_{O_2}V &= \frac{m}{M_{O_2}}R_mT \\ p_{N_2}V &= \frac{m}{M_{N_2}}R_mT, \end{aligned}$$

kde $m=1\,\mathrm{g}$, R_m je mólová plynová konštanta a M_{N_2}, M_{O_2} sú mólové hmotnosti dusíka a kyslíka. V nádobe je preto tlak $p_{O_2}+p_{N_2}=\dfrac{M_{O_2}+M_{N_2}}{M_{O_2}M_{N_2}}\dfrac{mR_mT}{V}\approx 222,59\,\mathrm{kPa}$.

$\boxed{8.}$ Celý náš objekt je zostrojený z dvanástich paličiek. Vďaka súmernosti nášho útvaru ho môžeme rozdeliť na štyri také trojice paličiek, ktoré majú ťažisko v rovnakej výške. Prvá trojica pozostáva zo šikmých paličiek tvoriacich strechu domčeka. Ich ťažisko sa nachádza vo výške $a+h/2$, kde h je výška strechy, t.j. pravidelného štvorstenu s hranou dĺžky a. Geometrickými úvahami využívajúcimi Pytagorovu vetu dospejeme k vzťahu $h=\sqrt{\frac{2}{3}}\ a$, takže ťažisko tejto trojice sa nachádza vo výške $\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\,a$. Ďalšie trojice paličiek majú ťažiská vo výškach $a, a/2$ a 0. Máme štyri skupiny paličiek s rovnakými hmotnosťami a známymi výškami, takže výška ťažiska je rovná priemeru týchto výšok, čo je

$$\frac{\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}a + a + \frac{1}{2}a + 0}{4} = \frac{15+\sqrt{6}}{24}\,a \approx 0,727\,a.$$

$\boxed{9.}$ Pri riešení budeme používať klasické finty geometrickej optiky. Využijeme skutočnosť, že lúč rovnobežný s optickou osou sa láme tak, aby prechádzal ohniskom a naopak, lúč prechádzajúci ohniskom sa bude lámať tak, aby bol rovnobežný s optickou osou. Navyše, lúč prechádzajúci stredom šošovky sa neláme vôbec. Lúč, ktorý vyšle ľubovoľný bod úsečky DC rovnobežne s optickou osou sa teda láme v smere polpriamky XC'. Táto polpriamka bude obsahovať celú úsečku DC. Pritom bod D sa zobrazí do bodu D' a C do nekonečna. DC sa teda zobrazí na $D'C'$ (C' je imaginárny bod v nekonečne). Podobne AB sa zobrazí na $A'B'$ a AD na $A'D'$.

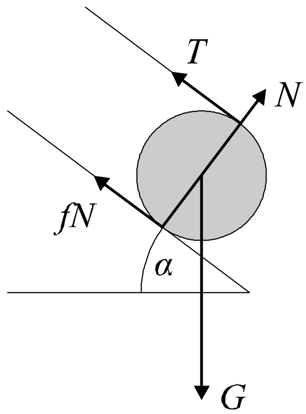


Obrazom štvorca $ABCD$ preto bude plocha ohraničená úsečkou $A'D'$ a polpriamkami smerujúcimi z jej koncov k nekonečne vzdialeným obrazom B' a C'.

$\boxed{10.}$ Ako prvú musíme zistiť veľkosť rýchlosti v telieska pri odraze. Keďže počas jeho šmýkania ho nebrzdila nijaká trecia sila, bude platiť zákon zachovania energie v tvare $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, kde g je (ako zvyčajne) veľkosť tiažového zrýchlenia. Predpokladáme pružný odraz telieska, preto uhol dopadu telieska α na vodorovný povrch bude rovnaký ako uhol jeho odrazu. Vďaka tomu pôjde po odraze už len o šikmý vrh pod uhlom α s nulovou počiatočnou výškou. Tento pohyb môžeme rozdeliť na vodorovný a zvislý. Vo vodorovnom smere sa teliesko pohybuje konštantnou rýchlosťou veľkosti $v\cos\alpha$. V zvislom smere je jeho pohyb zložitejší, lebo je ovplyvňované tiažovou silou. Ak počiatočná rýchlosť v zvislom smere je $v\sin\alpha$, potom teliesko dopadne na podložku po čase

$\frac{2v\sin\alpha}{g}$. Nuž a za tento čas sa vo vodorovnom smere dostane do vzdialenosti $\frac{2v\sin\alpha}{g}\, v\cos\alpha = 2h\sin 2\alpha \approx 1,73\,\mathrm{m}$, čo sme vlastne chceli vypočítať.

$\boxed{11.}$ Aby bol valec v pokoji, musí byť vektorový súčet síl, ktoré naň pôsobia, rovný nule. Označme tiažovú silu pôsobiacu na valec ako G, silu napínajúcu špagát ako T a kolmú reakciu naklonenej roviny ako N. Zaujíma nás hraničný prípad, keď je veľkosť trecej sily medzi valcom a naklonenou rovinou rovná fN.



V smere rovnobežnom aj kolmom na rovinu musí byť súčet pôsobiacich síl rovný nule, preto

$$\begin{aligned} G\sin\alpha - fN - T &= 0 \\ N - G\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

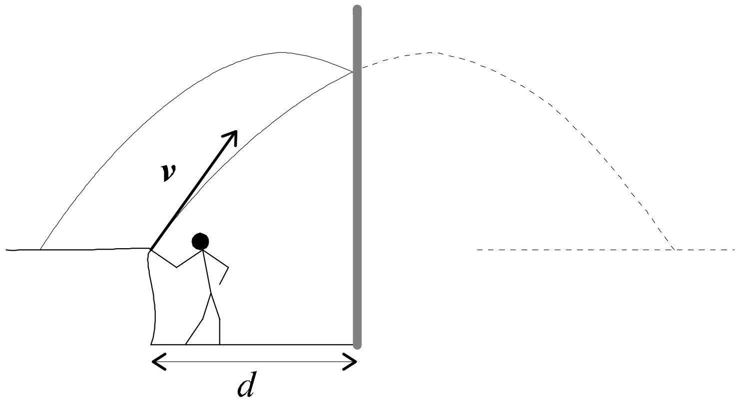
Aby sa valec neotáčal, musí byť nulový aj výsledný moment všetkých síl, pričom nezáleží na tom, vzhľadom na ktorý bod ho počítame. Ak si ako vzťažný bod vyberieme stred podstavy valca, jediné dve sily s nenulovým (navzájom opačným) momentom budú fN a T. Ich ramená sú rovnako veľké, preto sa musia rovnať aj ich veľkosti.

$$T = fN$$

Riešením sústavy týchto troch rovníc dostaneme najmenší potrebný koeficient trenia $f = \frac{1}{2}\tan\alpha$.

$\boxed{12.}$ Označme veľkosť zrýchlenia loďky vzhľadom na vodu ako A. Naše zrýchlenie v stojacej (inerciálnej) vzťažnej sústave je potom $a - A$. Aby sme dosiahli takéto zrýchlenie, musíme sa od loďky odrážať silou $m\,(a - A)$. Podľa zákona akcie a reakcie je to rovnako veľká sila ako tá, ktorou je poháňaná loď, preto $MA = m\,(a - A)$. Z toho máme $A = \frac{m}{m+M}\, a$. Nás zaujíma výraz $a - A$, čo je po úprave $\frac{M}{m+M}\, a$.

$\boxed{13.}$ Kľúčovým zistením pre riešenie tohto príkladu je myšlienka, že keby sme "odrazenú" dráhu loptičky zobrazili stenou (akoby zrkadlom), bude dráhou obyčajná parabola klasického šikmého vrhu.



Počítajme teda tak, ako keby nijaká stena neexistovala. Vzdialenosť, do ktorej Juraj dohodí, označíme s, a keď si spomenieme na stenu, výsledok príkladu bude $s - 2d$. Vieme, že z nulovej výšky pri danej rýchlosti dohodíme najďalej práve vtedy, keď hádžeme pod uhlom 45° (pokiaľ zanedbávame odpor vzduchu). V zvislom i vodorovnom smere štartuje loptička s tou istou počiatočnou rýchlosťou $v \sin 45° = v \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}v$. Vo vodorovnom smere ide o pohyb konštantou rýchlosťou, takže

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}vt,$$

kde t je čas letu loptičky. Tento čas dostaneme, ak si uvedomíme, že v zvislom smere ide o pohyb s konštantným zrýchlením g. Čas výstupu loptičky do najvyššej polohy je $\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}v}{2g}$, preto $t = \frac{\sqrt{2}v}{g}$. Po dosadení dostaneme $s = \frac{v^2}{g}$. Juraj teda dohodí za seba do vzdialenosti $\frac{v^2}{g} - 2d \approx 16,94\,\mathrm{m}$.

$\boxed{14.}$ Predpokladajme, že by sme riešili tú istú úlohu, ale bod A by stál na mieste. Bod B by sa potom musel pohybovať nadol so zrýchlením $\frac{a}{2}$. Podobne, keby bod C stál, bod B by sa mal pohybovať rýchlosťou $\frac{v}{2}$ nahor. V našom prípade ani A a ani C nestoja, B sa teda bude pohybovať súčasne so zrýchlením $\frac{a}{2}$ nadol a s počiatočnou rýchlosťou $\frac{v}{2}$ nahor.

$\boxed{15.}$ Najprv si musíme uvedomiť, ako bude celý pohyb dutého valca prebiehať. Dochádza v ňom k treniu telieska o jeho vnútorný povrch, pričom bude dochádzať k stratám kinetickej energie celej sústavy (napríklad jej premena na teplo). Z tohto dôvodu bude valec postupne spomaľovať. Ak sa na celú vec pozrieme z pohľadu malého telieska, zistíme, že ono prešlo vzhľadom na vnútorný povrch kolesa dráhu l, pričom zhodou okolností ide o tú istú dráhu, o ktorú sa prekotúľalo celé koleso. Ak je sila pritláčajúca teliesko k povrchu kolesa rovná F, potom brzdiaca sila vykonala prácu rovnú Ffl. Podľa zákona zachovania energie má byť táto práca rovná počiatočnej kinetickej energii kolesa a telieska, teda

$$Ffl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde $J = MR^2$ je moment zotrvačnosti dutého valca s polomerom R a $\omega = \frac{v}{R}$ je jeho uhlová rýchlosť. Po dosadení za tieto veličiny a úprave dostaneme $l = \frac{1}{Ff}\left(\frac{m}{2} + M\right)v^2$. Ostáva už len vypočítať F. Nech spojnica stredu valca s telieskom zviera so zvislou priamkou uhol α. Tradičným postupom spočívajúcim v rozkladaní tiažovej sily na zložky a porovnaním jednej z nich s trecou silou zistíme, že $\tan\alpha = f$ a teliesko je k vnútornému povrchu valca pritláčané silou veľkosti $mg\cos\alpha$, čo je podľa vyššie napísaného rovné F. Použitím vzťahu

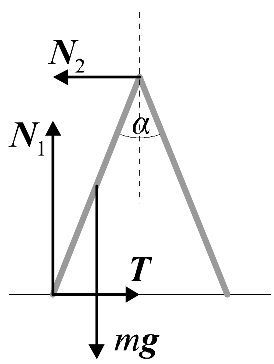
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

dostaneme $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, preto $F = \frac{mg}{\sqrt{1+f^2}}$. Po dosadení a úprave

$$l = \frac{\sqrt{1+f^2}}{2gf}\left(1 + \frac{2M}{m}\right)v^2 \approx 5,63\,\mathrm{m}.$$

$\boxed{16.}$ Najvýhodnejšie je riešiť túto úlohu vo vzťažnej sústave spojenej s pohybujúcim sa bodom A. V okamihu, keď sa bod A začína pohybovať v klasickej vzťažnej sústave, je to to isté, ako keby sme rýchlosť v udelili bodu B v sústave spojenej s A. Naša vzťažná sústava je inerciálna, a preto na bod B nepôsobia nijaké zotrvačné sily. Jediné, čo ovplyvňuje jeho pohyb, je nehmotná palička, vďaka ktorej sa bude pohybovať po kružnici s polomerom l (a teda obvodom $2\pi l$) rýchlosťou veľkosti v. K otočeniu úsečky AB teda dôjde po uplynutí času $\frac{2\pi l}{v}$.

$\boxed{17.}$ Označme hmotnosť jednej karty ako m. Na každú z kariet budú pôsobiť štyri sily - tiažová, ktorej veľkosť je rovná mg, trecia sila T a v dotykových bodoch normálové sily N_1, N_2.



Nás zaujíma hraničná situácia, kedy $T = fN_1$.V rovnováhe musia byť súčty vodorovných aj zvislých síl rovné nule, preto

$$\begin{aligned} N_1 - mg &= 0 \\ fN_1 - N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Podobná podmienka platí aj pre momenty síl, pretože keby bol výsledný moment počítaný vzhľadom na niektorý bod rôzny od nuly, karty by sa začali otáčať. V tomto príklade je výhodné počítať momenty síl vzhľadom na dotykový bod karty a podložky. Jediné dve sily, ktorých ramená sú rôzne od nuly sú tiažová sila a N_2. Ak označíme dĺžku karty ako l, platí

$$N_2 l \cos\frac{\alpha}{2} - mg\frac{l}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Dosadením do prvých dvoch rovníc dostaneme hraničný uhol $\alpha = 2\arctan 2f \approx 22°37'$.

$\boxed{18.}$ Na vyriešenie tohto príkladu nám bude stačiť Keplerov zákon v tvare

$$\frac{T^2}{(1\text{rok})^2} = \frac{a^3}{(1\text{AU})^3},$$

kde 1 AU $= 149,6.10^9$ m je polomer obežnej dráhy Zeme. V zadaní je povedané, že k štartu dôjde v perihéliu a k pristátiu v aféliu dráhy, takže let sondy na Mars bude trvať polovicu obežnej doby prislúchajúcej telesu obiehajúcemu okolo Slnka po celej elipse. Označme túto obežnú dobu ako T, pričom máme na pamäti, že let trval čas $T/2$. V čase pristátia sú Zem, Slnko a Mars na jednej priamke, teda $|\sphericalangle A \text{ Slnko } C| = \pi = 180°$. Ak je obežná dráha Marsu T_M, potom pred časom $T/2$ bol tento uhol o $\frac{2\pi}{T_M}\frac{T}{2}$ menší, teda naše hľadané $\alpha = \pi - \frac{\pi T}{T_M}$. Podľa vyššie napísaného Keplerovho zákona môžeme povedať, že

$$\frac{T^2}{T_M^2} = \frac{a^3}{a_M^3} \Rightarrow \frac{T}{T_M} = \left(\frac{a}{a_M}\right)^{3/2},$$

kde a a a_M sú hlavé polosi dráh vesmírnej sondy a Marsu. Ak podobne označíme aj polos (pre elipsu podobnú kružnici to je v podstate polomer) zemskej dráhy ako a_Z, potom by z obrázka v zadaní malo byť zrejmé, že $a = \frac{a_M + a_Z}{2}$. Zo zadania vieme, že $a_M = 1,52\, a_Z$ takže $a = \frac{1+\frac{1}{1,52}}{2}\, a_M$. Po dosadení do Keplerovho zákona máme

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_M} &= \left(\frac{1+\frac{1}{1,52}}{2}\right)^{3/2} = \left(\frac{63}{76}\right)^{3/2} \\ \alpha &= \pi\left(1 - \frac{T}{T_M}\right) \approx 44°9'. \end{aligned}$$

Uhol medzi Zemou, Slnkom a Marsom bol v okamihu štartu rakety rovný približne $44^\circ 9'$, resp. $44,15^\circ$.

$\boxed{19.}$ Záves bude najviac namáhaný tesne po zásahu nábojom, pretože rýchlosť plastelínovej gule a aj zložka tiažovej sily rovnobežná so závesom s rastúcou výchylkou klesajú. Pri zrážke musí platiť zákon zachovania hybnosti, preto ak rýchlosť gule po zásahu označíme u, potom

$$mv = (m + M)\, u.$$

Vlákno je napínané odstredivou i tiažovou silou, preto pre hraničný prípad platí

$$F = \frac{(m+M)}{L}\, u^2 + (m+M)\, g = \frac{m^2}{L\,(m+M)}\, v^2 + (m+M)\, g.$$

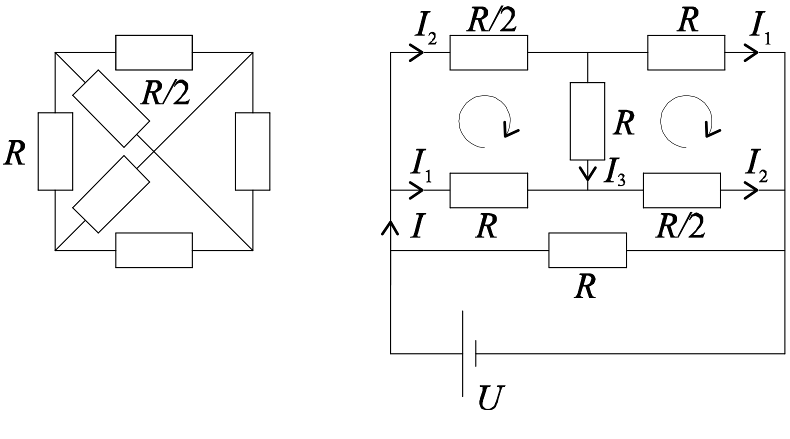
Pre rýchlosť náboja tak dostaneme podmienku

$$v > \frac{\sqrt{L\,(m+M)\,(F - mg - Mg)}}{m} \approx 321,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

$\boxed{20.}$ Jednou z možností riešenia príkladu je použiť prvý a druhý Kirchhoffov zákon:

1. súčet prúdov vchádzajúcich do uzla je rovný nule,
2. súčet úbytkov napätí na rezistoroch sa rovná súčtu napätí zdrojov v uzavretom obvode siete.

"Odporný" štvorec môžeme prekresliť podľa zapojenia na obrázku:



$$1. \quad \Rightarrow \quad I - I_1 - I_2 = I_2 - I_1 - I_3 = 0\,\mathrm{A}$$

$$2. \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{2} I_2 + R I_3 - R I_1 = R I_1 + \frac{R}{2} I_2 - U = 0\,\mathrm{V}$$

Riešením tejto sústavy dostaneme prúd $I = \frac{7U}{5R}$, preto odpor vrchnej časti obvodu, ktorá je paralelne zapojená k jednému odporu R, je rovný $\frac{5}{7}R$. Hľadaný odpor preto bude $\frac{\frac{5}{7}R.R}{\frac{5}{7}R+R} = \frac{5}{12}R$. Riešeniu sústavy rovníc sa ľahko vyhneme, ak pred ich napísaním ešte trochu porozmýšľame. Štvorec má 4 rohy, ktoré majú svoje potenciály. V našom prípade môžme predpokladať, že dva susedné rohy, medzi ktorými hľadáme odpor, majú potenciály rovné 1 V a −1 V. Potenciály zvyšných dvoch rohov budú (vďaka symetrii) U a $-U$. Teraz stačí vyriešiť len jednu rovnicu (prvý Kirchhoffov zákon pre uzol s napätím U.) Z Ohmovho zákona dorátame prúdy tečúce v obvode. Delením 2 V (celkový potenciálový rozdiel medzi skúmanými vrcholmi) celkovým prúdom dostávame hľadaný odpor.

$\boxed{21.}$ Na kužeľ pôsobia dve sily - tiažová sila s veľkosťou mg a časť vztlakovej sily. Časť preto, lebo pri vztlakovej sile sme normálne zvyknutí na to, že jej veľkosť je $\rho V g$, kde ρ je hustota vody, V objem ponorenej časti telesa a g tiažové zrýchlenie. Nemali by sme však zabúdať na jej pôvod. Hydrostatický tlak v kvapaline je tým väčší, čím sme hlbšie ponorení. Vztlaková sila teda vzniká tak, že na spodnú časť telesa pôsobí väčšia tlaková sila ako na hornú časť, preto výsledná sila smeruje nahor. Keby teda kužeľ voľne plával celý ponorený vo vode, podľa horeuvedeného známeho vzťahu je veľkosť naň pôsobiacej vztlakovej sily rovná $\rho\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) g$. V našom prípade voda (ani atmosférický tlak) nemôžu pôsobiť na podstavu kužeľa, vztlakovú silu bude treba upraviť o túto hodnotu. Tlak na dne nádoby je rovný $\rho g H + p_A$, kde p_A je atmosférický tlak. Keby pod kužeľom bola voda, na jeho podstavu by pôsobila sila s veľkosťou $(\rho g H + p_A)\ \pi r^2$. Voda tam však nie je, preto túto silu treba od $\rho\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) g$ odpočítať. Veľkosť výslednej sily pritláčajúcej kužeľ na dno nádoby dostaneme ako

$$mg - \left[\rho\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) g - (\rho g H + p_A)\ \pi r^2\right] \approx 3480,67\,\mathrm{N}.$$

$\boxed{22.}$ Aby sme spočítali tento príklad, potrebujeme nájsť vzťahy pre kruhovú a únikovú rýchlosť. Už názov napovedá, že kruhová rýchlosť by mohla byť taká, pri ktorej teleso obieha po kruhovej dráhe okolo planéty v danej vzdialenosti. Odstredivá a gravitačná sila pôsobiaca na teleso s nejakou (napríklad jednotkovou) hmotnosťou sa teda navzájom vyrovnajú, čo môžeme zapísať rovnicou

$$\frac{v_k^2}{3R} = \frac{\kappa M}{(3R)^2} \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{3R}}.$$

Na výpočet únikovej rýchlosti použijeme pre zmenu zákon zachovania energie. Ak teleso vyhodíme únikovou rýchlosťou, znamená to, že má dostatočne veľkú kinetickú energiu na to, aby sa mohlo vzdialiť ľubovoľne ďaleko, čiže do nekonečna. Potenciálna energia je v nekonečne nulová, teda stačí, aby celková zmena potenciálnej energie $0-\left(-\frac{\kappa m}{r}\right)$ počítanej pre teleso s jednotkovou hmotnosťou, bola rovná kinetickej energii, ktorú telesu udelíme pri štarte - $\frac{1}{2}v_u^2$. Preto platí

$$\frac{1}{2}v_u^2=\frac{\kappa m}{r}\Rightarrow v_u=\sqrt{\frac{2\kappa m}{r}}.$$

Rýchlosti sme nepočítali všeobecne, ale tak, ako boli dané pre jednotlivé planéty, preto podľa zadania $v_k=v_u\Rightarrow\frac{M}{3R}=\frac{2m}{r}$. Ďalej vieme, že hustota oboch planét je rovnaká, označme ju teda ρ. Potom zrejme $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ a $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, kde sme použili vzťah pre objem gule. Toto stačí dosadiť do $\frac{M}{3R}=\frac{2m}{r}$ a dostaneme vytúžený výsledok $r:R=1:\sqrt{6}\approx 0,408$.

$\boxed{23.}$ Na začiatok sa skúsme zamyslieť, kde by sme tak asi teplotné maximum mohli očakávať. Množina bodov na $p-V$ diagrame, v ktorých má plyn nejakú konštantnú teplotu T je hyperbola (izoterma), ktorá je tým bližšie počiatku súradnicove sústavy, čím je T menšie. My teda vlastne hľadáme najteplejšiu izotermu, ktorá ešte má s našim grafom nejaký spoločný bod. Toto je však matematicky náročná úloha, poďme teda rátať. Uvažujme stavovú rovnicu ideálneho plynu v tvare $pV=nR_mT$, kde p je tlak, V objem a T teplota. n a R_m sú konštanty. V $p-V$ diagrame je nakreslená závislosť $p\left(V\right)=\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}\left(V-V_1\right)+p_1$, čo je rovnica priamky prechádzajúcej bodmi $\left[V_1,p_1\right],\left[V_2,p_2\right]$. Dosadením do stavovej rovnice dostaneme

$$T=\frac{p_2-p_1}{\left(V_2-V_1\right)nR_m}\,V^2+\frac{1}{nR_m}\left(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1\right)V.$$

Nás zaujíma maximum teploty ako funkcie objemu, ktorej grafom je parabola s koreňmi $V=0\,\mathrm{m}^3$ a $V=-\frac{V_2-V_1}{p_2-p_1}\left(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1\right)$. Graf paraboly je súmerný podľa zvislej priamky prechádzajúcej jej maximom, preto hľadaný objem dostaneme ako aritmetický priemer oboch riešení rovnice $T\left(V\right)=0\,\mathrm{K}$, t.j.

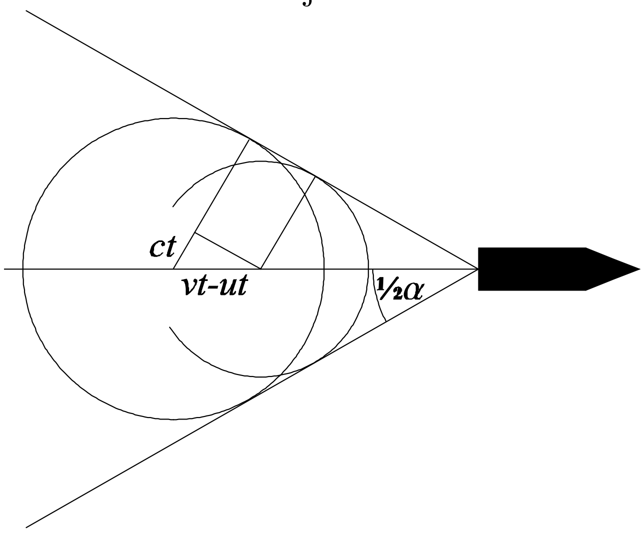
$$-\frac{V_2-V_1}{2\left(p_2-p_1\right)}\left(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1\right)=\frac{19}{60}\,\mathrm{m}^3\approx 0,317\,\mathrm{m}^3.$$

Vo všeobecnosti by sa mohlo stať, že $V\notin\langle V_1,V_2\rangle$. V takom prípade leží maximum grafu $T\left(V\right)$ mimo spomenutého intervalu a riešením príkladu by bol jeden z objemov V_1,V_2.

$\boxed{24.}$ Rozdeľme pohyb závažia na dve časti. Prvú polovicu dráhy sa bude pohybovať nerovnomerne zrýchleným pohybom, lebo guma správajúca sa ako pružina s tuhosťou k je natiahnutá. Druhú polovicu dráhy sa závažie bude pohybovať rovnomerne priamočiaro, pretože guma je ohybná a bude sa ľahko krčiť, aby neprekážala telesu v pohybe. Prvá polovica pohybu je štvrtinou kmitu harmonického oscilátora, takže jej zodpovedá čas $\frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. Na začiatku bola potenciálna energia gumy rovná $\frac{1}{2}kl^2$ a počas jej skracovania sa celá premení na kinetickú energiu závažia, teda $\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}mv^2$, kde v je rýchlosť, ktorou bude závažie pokračovať v rovnomernom priamočiarom pohybe. Druhej polovici dráhy preto bude zodpovedať čas $\frac{l}{v}$. Po dosadení za $v = l\sqrt{\frac{k}{m}}$ a pridaní prvého času dostaneme hľadaný výsledok ako

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{l}{v} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{m}{k}} = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,514\,\mathrm{s}.$$

$\boxed{25.}$ Ak chceme tento príklad vypočítať, musíme sa najskôr zamyslieť, ako sa vlny za loďou šíria. Po tom, ako loď prešla nejakým miestom na hladine, vytvorila v ňom rozruch, ktorý sa šíri všetkými smermi rovnako, takže keby bol takýto rozruch vyvolaný iba v jednom bode, hrebene vĺn by boli sústredné kružnice a zväčšovali by sa približne konštantnou rýchlosťou (rýchlosť šírenia vĺn na hladine vody). Vlny, ktoré Stano pozoroval, však vznikli sčítaním príspevkov od všetkých takýchto bodových zdrojov, ktoré ostávajú rozmiestnené na jednej priamke za loďou. Z obrázku je zrejmé, že trojuholník môže za loďou vzniknúť iba v prípade, že rýchlosť lode vzhľadom na vodnú hladinu je väčšia ako rýchlosť šírenia vĺn na hladine c. Nech rýchlosť, ktorou tečie voda v rieke, je u. Rozoberme najprv prvý prípad, kedy loď pláva po prúde rieky a ramená trojuholníka vĺn za ňou zvierajú uhol α.



Všimnime si dve miesta, medzi ktorými prechádzala loď čas t. Keby sme si mali iba vlny spôsobené v týchto miestach, dostali by sme dve kružnice, z ktorých polomer jednej by bol o ct väčší ako polomer druhej. Z obrázka vidíme, že pre uhol α potom platí vzťah

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{ct}{vt - ut} = \frac{c}{v - u}.$$

Ak podobný vzťah použijeme pri lodi plávajúcej hore prúdom, ktorej rýchlosť vzhľadom na okolotečúcu vodu je $v + u$, dostaneme sústavu rovníc

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{v - u}, \ \sin\frac{\beta}{2} = \frac{c}{v + u},$$

ktorých riešením dostaneme

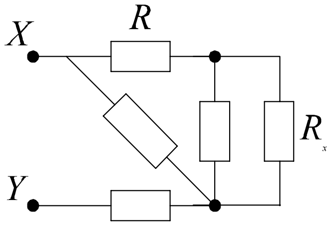
$$u = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}}\, v \approx 0{,}954\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

$\boxed{26.}$ Každý z vás (nešťastných riešiteľov študujúcich tento príklad) si môže doma overiť, že ak teleso pozostávajúce z n častí, z ktorých $i-$ ta má hmotnosť m_i a ťažisko v bode $\overrightarrow{r_i}$, podoprie v bode

$$\overrightarrow{r_T} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

toto teleso sa nebude pod vplyvom tiažovej sily nijako pohybovať. Ide totiž o známy vzťah na výpočet polohy ťažiska zložitejšieho telesa. Okrem dvoch šikmých paličiek v písmene K majú všetky rovnakú hmotnosť. Bude preto stačiť, ak každú paličku nahradím jej stredom s jednotkovou hmotnosťou, iba spomenuté dve paličky budú mať hmotnosť $\sqrt{2}$. V menovateli nám vystupuje súčet hmotností všetkých paličiek, ktorý je rovný $11 + 2\sqrt{2}$. Vzťah pre polohový vektor ťažiska nápisu znamená, že ak chceme vedieť jeho vodorovnú súradnicu, namiesto $\overrightarrow{r_i}$ bude v sume v čitateli vystupovať vodorovná súradnica $i-$ tej paličky, teda pri jednotkových hmotnostiach súčet vodorovných súradníc. Súradnice šikmých paličiek v písmene K opäť treba vynásobiť $\sqrt{2}$. Rovnakým postupom pre zvislú súradnicu dostaneme polohu ťažiska $\left[\frac{43+8\sqrt{2}}{11+2\sqrt{2}}, \frac{24+4\sqrt{2}}{11+2\sqrt{2}}\right] \approx [3{,}93; 2{,}14]$.

$\boxed{27.}$ Označme hľadaný odpor R_x. V schéme, ktorej odpor máme spočítať, sa stále opakuje ten istý štvorec s uhlopriečkou. Keď teda jeden štvorec zo začiatku pridáme, resp. odoberieme, celkový odpor sa nesmie zmeniť (lebo tých štvorcov je tam stále nekonečne veľa). To znamená, že odpor tohto zapojenia je stále R_x.



Tento odpor však vieme porátať klasickými metódami. Dostávame teda rovnicu

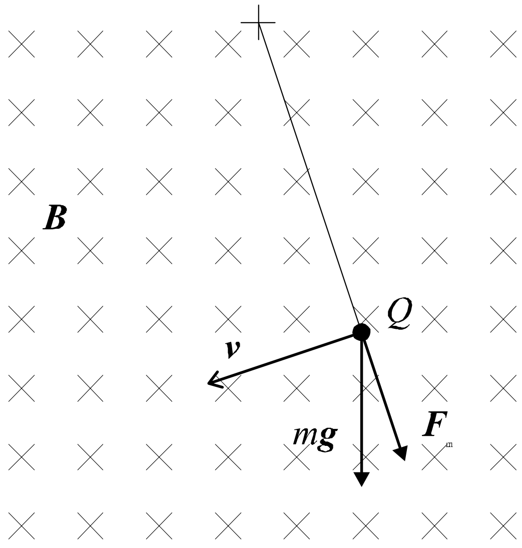
$$R_x = R + \frac{R\left(R + \frac{RR_x}{R+R_x}\right)}{R + \left(R + \frac{RR_x}{R+R_x}\right)}.$$

Jej riešením je $R_x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R \approx 1,618\ R$.

$\boxed{28.}$ Na tento príklad budeme potrebovať Stefanov-Boltzmanov zákon, ktorý hovorí, že jednotka plochy dokonale čierneho telesa pri teplote T vyžiari za jednotku času σT^4 Joulov. Ak polomer Slnka označíme r_S, potom jeho povrch vyžaruje s výkonom $P = 4\pi r_S^2 \sigma T_S^4$. My by sme potrebovali vedieť, koľko z tohto výkonu dopadne na povrch družice, pretože ten musí byť rovný výkonu ňou vyžarovanému. Polomer obežnej dráhy Zeme je R. Ak Slnko obalíme myslenou guľovou plochou s takýmto polomerom, musí ňou za jednotku času prejsť rovnako veľa energie ako povrchom Slnka, preto na jednotku plochy v tejto vzdialenosti pripadá výkon $\frac{P}{4\pi R^2}$. Plocha prierezu družice s polomerom r je πr^2, preto za jednotku času na ňu zo Slnka dopadná energia $\frac{P}{4\pi R^2}\ \pi r^2 = \frac{Pr^2}{4R^2}$. Naproti tomu výkon vyžarovaný družicou pri teplote T je $4\pi r^2 \sigma T^4$. Pre rovnovážny stav teda platí

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \frac{Pr^2}{4R^2} \Rightarrow T^4 = \frac{r_S^2 T_S^4}{4R^2} \Rightarrow T = T_S\sqrt{\frac{r_S}{2R}} \approx 279,74\,\mathrm{K}.$$

$\boxed{29.}$ Najprv si skúsme rozmyslieť, či sa má gulička pohybovať v rovine rovnobežnej alebo kolmej na siločiary magnetického poľa, alebo niekde medzi tým. Ak si nakreslím obrázok, ľahko prídem na to, že keby nešlo o pohyb kolmý na siločiary, gulička by sa nepohybovala v rovine, lebo magnetická sila by ju stáčala nabok (pohyb po kružnici musí byť v jednej rovine). Situácia preto bude vyzerať podobne ako na obrázku:



Teraz nám magnetické pole pomôže - v kritickej (najvyššej) polohe bude spolu s odstredivou silou kompenzovať gravitačnú, a tak udrží niť napnutú. V najvyššom bode kružnice označme veľkosť rýchlosti ako u a magnetickú silu F_m. Vieme, že $F_m = QuB$. Vieme aj to, že magnetická sila je kolmá na smer pohybu, preto nemôže konať nijakú prácu a netreba ju zohľadňovať v zákone zachovania energie. Podľa spomenutého zákona zachovania platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 + 2mgl \Rightarrow u = \sqrt{v_0^2 - 4gl}.$$

Aby sa aj v tomto najvyššom bode svojej dráhy gulička pohybovala po kružnici, musí byť súčet veľkostí odstredivej a magnetickej sily väčší, alebo rovný tiažovej sile, preto v hraničnom prípade platí

$$\frac{mu^2}{l} + QuB = mg \Rightarrow B = \frac{m\left(gl - u^2\right)}{Qlu},$$

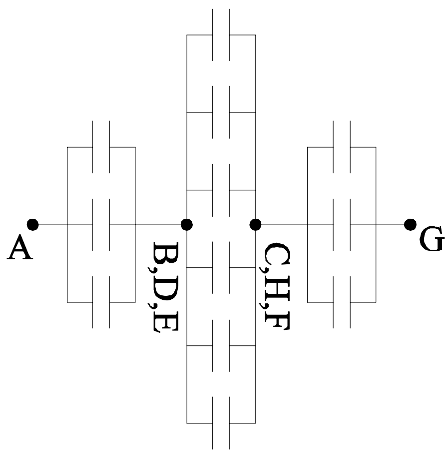
odkiaľ po dosadení za u máme

$$B = \frac{m\left(5gl - v_0^2\right)}{Ql\sqrt{v_0^2 - 4gl}} \approx 0,821\,\mathrm{T}.$$

Všimnite si, že ak je rýchlosť v_0 dosť veľká, dostaneme záporné B. Znamená to, že odstredivá sila je v najvyššom bode väčšia ako tiažová, a teda vládze prekonávať aj opačne pôsobiacu magnetickú silu.

$\boxed{30.}$ Najprv si musíme uvedomiť, že rýchlosť rakety je dosť veľká, preto musíme započítať aj relativistické efekty, tj. dilatáciu času. To, čo trvá v rakete čas t, budeme pozorovať ako dej trvajúci $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$–krát dlhšie. Za čas $\frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ raketa preletí vzdialenosť $\frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. To spôsobí, že svetlo ručičky hodín (nemusí svietiť, stačí ak nejaké svetlo z rakety odráža, inak by sme ju nevideli) štartujúce na konci nami sledovanej minúty má dráhu o $\frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ dlhšiu ako svetlo štartujúce na jej začiatku, preto sa omešká ešte o $\frac{1}{c}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{t}{\sqrt{c^2/v^2-1}}$. Pozorovanie jednej minúty na hodinách kozmickej lode preto na Zemi trvalo čas $\frac{1\,\mathrm{min}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{1\,\mathrm{min}}{\sqrt{c^2/v^2-1}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\mathrm{min} \approx 1,22\,\mathrm{min} \approx 73,5\,\mathrm{s}$.

$\boxed{31.}$ Pri riešení tohto príkladu použijeme ten istý trik ako pri počítaní kocky s odpormi, ktorú už niektorí z vás možno poznajú. Povedzme, že k bodom A a G sme priložili napätie U. Zo súmernosti vyplýva, že trojice bodov B, D, E a C, H, F majú rovnaký potenciál. Ak teda body v týchto trojiciach pospájam vodivými drôtmi, nikto si nič nevšimne, pretože nimi nikdy nebude tiecť prúd. Keď to však urobím, je to to isté, ako keby som body v každej trojici zlepil do jedného uzla, takže dostanem schému:



Podľa pravidiel pre výpočet kapacity kondenzátorov zapojených za sebou a vedľa seba dostaneme pre výslednú kapacitu C_{AG}

$$\frac{1}{C_{AG}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} \Rightarrow C_{AG} = \frac{6}{5}C.$$