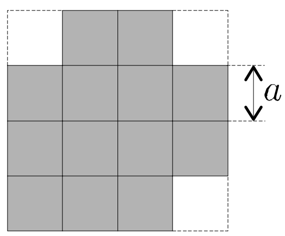
Kapitola 1

Zadania

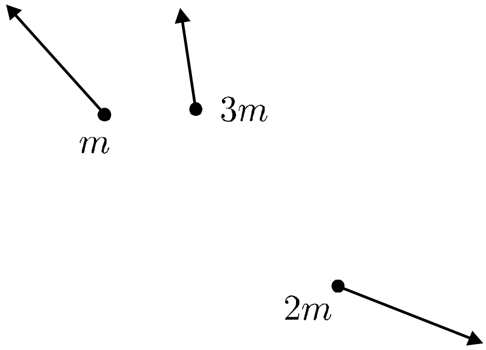
$\boxed{1.}$ Vlak, ktorý chodieva z mesta A do mesta B rýchlosťou 60 km/h sa pravidelne stretáva s vlakom, ktorý chodí opačným smerom, v polovici trate. Raz mešká 45 min. Vtedy sa stretne s oprotiidúcim vlakom po prejdení jednej tretiny vzdialenosti miest A a B. Akou rýchlosťou chodí oprotiidúci vlak, ak vzdialenosť oboch miest je 140 km? Zrýchlenie a brzdenie v staniciach neuvažujte.

$\boxed{2.}$ Peťko ráno zaspal. Hodina mu začne za čas t. Preto sa z domu rozbehne so zrýchlením veľkosti a. V polovici cesty si však uvedomí, že to nestihne. Preto dvakrát zvýši svoje zrýchlenie, vďaka čomu dobehne na vyučovanie presne načas. Koľko by meškal, keby bežal celú cestu so zrýchlením a?

$\boxed{3.}$ Na obrázku je znázornený štvorec so stranou $4a$, z ktorého chýbajú tri rohové štvorčeky so stranou veľkosti a. Aká je vzdialenosť ťažiska tohto útvaru od stredu veľkého štvorca?



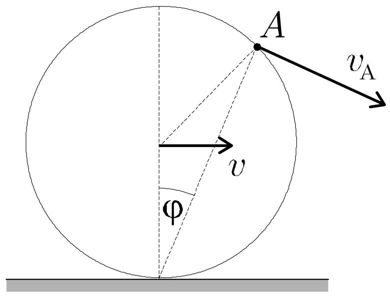
$\boxed{4.}$ Akou rýchlosťou sa pôvodne pohybovala bomba, ktorá sa po výbuchu rozletela na tri kusy, letiace podľa obrázka? Úlohu riešte graficky (t.j. priamo do zadania narysujte výslednú rýchlosť). Kusy majú hmotnosti m, $2m$ a $3m$, ich rýchlosti sú zakreslené na obrázku.



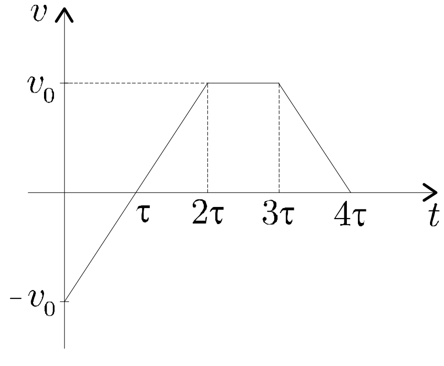
$\boxed{5.}$ Homogénna retiazka dĺžky l leží na hladkom stole, pričom malý kúsok zo stola prečnieva. Na začiatku ešte retiazku držíme, ale keď ju pustíme, začne zo stola skĺzavať (trenie neuvažujte). Koľko prečnieva retiazka zo stola, pokiaľ má akurát rýchlosť v?

$\boxed{6.}$ Tyč dĺžky l sa skladá z dvoch materiálov. Polovica tyče je z materiálu hustoty ρ_1, druhá polovica tyče je zhotovená z materiálu s hustotou ρ_2. V akej vzdialenosti od stredu tyče sa nachádza jej ťažisko?

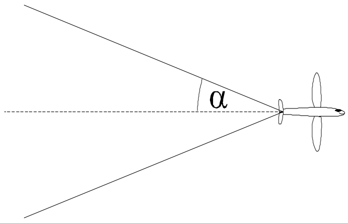
$\boxed{7.}$ Obruč s polomerom R sa valí po ceste rýchlosťou v. Nájdite rýchlosť bodu A na obruči, ktorý zviera so zvislicou uhol φ.



$\boxed{8.}$ Na obrázku je znázornená závisloť rýchlosti auta od času. Načrtnite závislosť dĺžky prejdenej dráhy (t.j. stav tachometra) od času. Predpokladajte, že v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ je na tachometri nula.



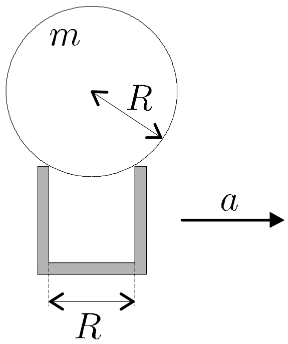
$\boxed{9.}$ Lietadlo sa pohybuje trikrát rýchlejšie ako zvuk a vytvára rázovú vlnu v tvare kužeľa. Aký je uhol α na obrázku?



$\boxed{10.}$ Keď teleso nechám voľne padať, dopadne na zem za určitý čas. Ako rýchlo ho musím hodiť smerom nadol, aby som tento čas skrátil na polovicu?

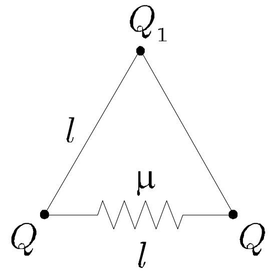
$\boxed{11.}$ Človek stojí na okraji loďky dĺžky L, ktorá je trikrát ťažšia ako on. O koľko sa posunie loďka, keď človek prejde z jedného konca na druhý?

$\boxed{12.}$ Dokonale hladký homogénny valec s hmotnosťou m je položený na vozíku, ktorého vzdialenosť medzi prednou a zadnou stenou je rovnaká ako polomer podstavy valca R (pozri obr.). Vozík sa začne pohybovať so zrýchlením a. Nájdite veľkosti síl N_1 a N_2, ktoré pôsobia na zadnú a prednú stranu vozíka.



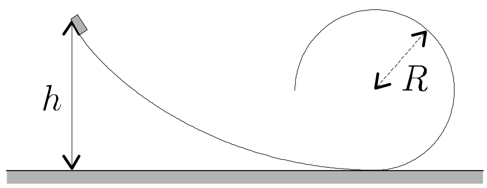
$\boxed{13.}$ Jano stojí na brehu rovnej rieky šírky d, ktorej prúd má rýchlosť v_0. Dokáže plávať rýchlosťou $\sqrt{2}\,v_0$ a kráča rýchlosťou $2v_0$. Má dve možnosti, ako sa dostať na druhý breh (na miesto, ktoré je presne oproti nemu) Možnosť A: nestarať sa o prúd a plávať priamo k opačnému brehu. Samozrejme, že ho prúd kúsok "odnesie", a rozdiel si potom musí odšlapať. Možnosť B: bude plávať tak, že vektor jeho výslednej rýchlosti bude stále smerovať na protiľahlé miesto na opačnom brehu a dorazí priamo do neho. Jano ako správny fyzik si zvolil rýchlejší spôsob. Ktorý to bol a koľko času ním ušetril?

$\boxed{14.}$ Tri náboje veľkosti Q_1 a Q sú spojené dvoma paličkami dĺžky l a jednou pružinou tuhosti μ (pozri obr.). Pružina má v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. Aké majú mať veľkosti náboje, aby v rovnovážnej polohe vznikol rovnostranný trojuholník?



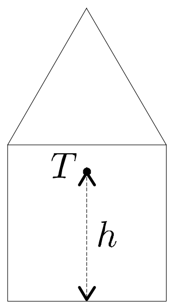
15. Pravítko dĺžky d voľne visí vo výške h nad podložkou, v ktorej je malý otvor (h je výška nižšieho konca pravítka nad podložkou). Pravítko pustíme. Čas, ktorý pravítko letí otvorom, je t. Určte výšku h.

16. Teleso sa bez trenia kĺže po "šmykľavke" na obrázku, ktorá má ukončenie v tvare kruhu s polomerom R. Z akej najmenšej výšky h musíme teleso spustiť, aby sa dostalo až na najvyšší bod kruhového zakončenia.



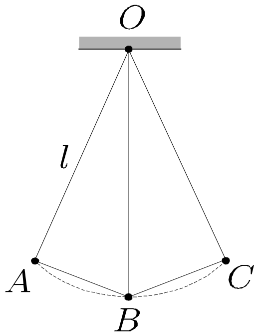
17. Na dne nádoby s hĺbkou h, ktorá je naplnená vodou s hustotou ρ, držíme pingpongovú loptičku s hmotnosťou m a objemom V, ktorý je oveľa menší ako objem nádoby. Ak loptičku pustíme, začne sa pod vplyvom vztlakovej sily rýchlo pohybovať smerom nahor. Do akej maximálnej výšky h_m vyskočí loptička nad hladinu? Odpor vody a vzduchu zanedbajte.

18. Domček na obrázku sa skladá zo štvorca so stranou a, na ktorom je umiestnený rovnostranný trojuholník. V akej výške h (nad "podlahou") sa nachádza ťažisko domčeka?

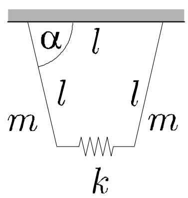


19. Fajoslav chce veľa svetla, tak zobral 30 W, 60 W a 90 W žiarovku (napájacie napätie 220 V) a zapojil ich za seba (opäť na napätie 220 V). S akým príkonom bude svietiť táto sústava? Predpokladajte, že odpor žiarovky je konštantný.

20. Jeden zo spôsobov, ako odhadnúť periódu malých kmitov kyvadla dĺžky l je nahradiť kružnicovú trajektóriu priamymi spojnicami (pozri obr.). Vypočítajte čas, za ktorý by sa dostal hmotný bod po naklonených rovinách po trase $A - B - C - B - A$.

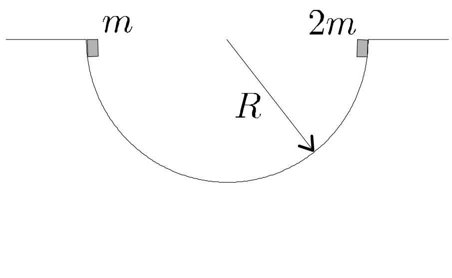


21. Na stene sú vo vzdialenosti l kĺbovito upevnené dve tyče hmotnosti m a dĺžky l (pozri obr.). Druhým koncom sú navzájom spojené pružinou tuhosti k. Pružina má v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. Akej dĺžky majú byť paličky, ak je sústava v rovnováhe a ak je uhol, ktorý zvierajú so stenou, veľkosti α?



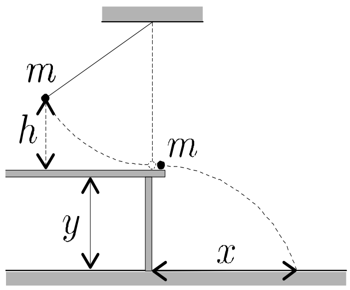
22. Skrutku zaťahujeme momentom veľkosti M. Akou silou je táto skrutka tlačená dovnútra, ak pootočenie skrutky o uhol φ spôsobí jej posunutie o vzdialenosť x.

23. Dve telesá s hmotnosťami m a $2m$ spustíme súčasne z vrchu hladkej polguľovej nádoby s polomerom R (pozri obr.). Po ich zrážke, ktorá bude dokonale nepružná, sa začnú pohybovať ako jedno teleso. Nájdite maximálny uhol ich odklonu počas ich pohybu.

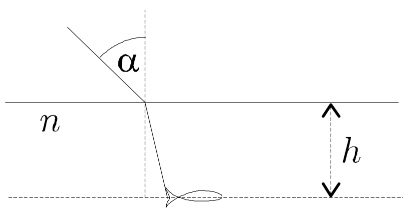


$\boxed{24.}$ Vo vodorovnom homogénnom elektrickom poli intenzity E hodíme pod uhlom α počiatočnou rýchlosťou v_0 teleso s hmotnosťou m a nábojom veľkosti Q. Aká má byť veľkosť intenzity tohto poľa E, aby teleso dopadlo späť na miesto, odkiaľ bolo hodené?

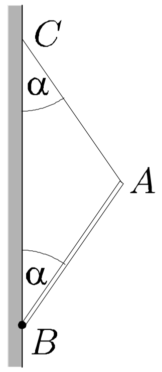
$\boxed{25.}$ Na špagáte dĺžky l visí guľôčka s hmotnosťou m, ktorá je vychýlená z rovnovážnej polohy do výšky h. Pri poklese zhodí z okraja stola takú istú guľôčku s hmotnosťou m (pozri obr.). Do akej vzdialenosti x od stola dopadne zhodená guľôčka, ak má stôl výšku y?



$\boxed{26.}$ Domorodec sa chystá uloviť oštepom rybu, ktorá sa nachádza v hĺbke $h = 0,5\,\mathrm{m}$ a pláva smerom od lovca. Ten ju vidí pod uhlom $\alpha = 45^\circ$ (meraným od kolmice na hladinu) a mieri na jej chvost. Po jej ulovení však s prekvapením zistil, že rybu zasiahol presne do hlavy. Aká dlhá je ryba, ak je index lomu vody rovný $n = 1,33$. Výsledok zaokrúhlite na centimetre.

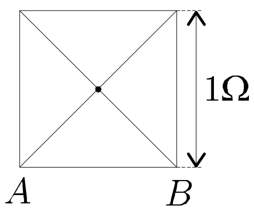


$\boxed{27.}$ Spodný koniec B tyče AB s hmotnosťou m je kĺbovo upevnený o zvislú stenu. Tyč je uchytená o stenu špagátom AC. Vypočítajte silu, ktorou je napínaný špagát, ak $\angle ABC = \angle BCA = \alpha$.

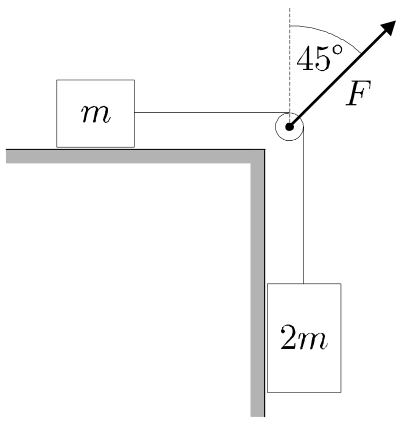


$\boxed{28.}$ Najmenšia vzdialenosť Halleyho kométy od Slnka je $r_{\mathrm{min}} = 0,6\,\mathrm{AU}$ (astronomická jednotka $= 1,5.10^8\,\mathrm{km}$ - vzdialenosť Zeme od Slnka). Perióda jej obehu je $T = 76\,\mathrm{rokov}$. Určite, ako najďalej (v jednotkách AU) sa dostane od Slnka.

$\boxed{29.}$ Aký je odpor drôteného štvorca medzi bodmi A a B? Odpor drôtu, z ktorého je schéma zhotovená, je priamo úmerný jeho dĺžke a jedna strana štvorca má odpor 1 Ω.

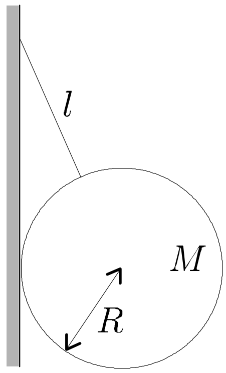


$\boxed{30.}$ Na obrázku sú dve rovnaké závažia s hmotnosťou m, z ktorých jedno je prevesené cez kladku a klesá, zatiaľ čo druhé sa šmýka po dokonale hladkej vodorovnej podložke. Akou silou je napínané vlákno držiace kladku, ak zviera so zvislicou uhol 45°?

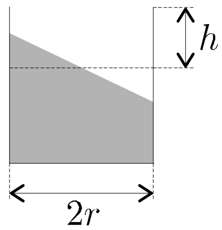


$\boxed{31.}$ Akou veľkou silou F pôsobí guľa na zvislú stenu(pozri obr.)? $R = 5m$,

$l = 8m$, hmotnosť gule je M. Trenie je nulové.

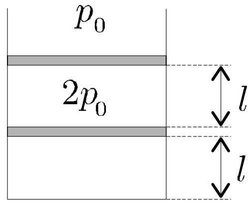


$\boxed{32.}$ Predstavte si, že sedíte v lietadle a neposlúchli ste múdru letušku. Tá vám radila, aby ste pred štartom zasunuli vyklápací stolík, ktorý je pred vami. Vy však na ňom máte položený pohár v tvare valca s vnútorným polomerom r, naplnený džúsom tak, že od hladiny k jeho okraju chýba už len výškový rozdiel h. Aké môže byť maximálne zrýchlenie a štartujúceho lietadla, aby sa z pohára nevyliala ani kvapka džúsu? Veľkosť tiažového zrýchlenia je g.

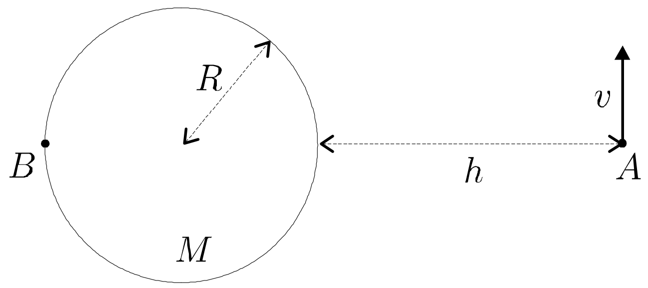


$\boxed{33.}$ Plávajúca kocka s hranou a je do polovice ponorená v kvapaline. Aká je perióda kmitov kocky, ak ju vychýlime v zvislom smere? Predpokladajte, že hladina je nekonečne veľká. Veľkosť tiažového zrýchlenia je g.

$\boxed{34.}$ V zvislej nádobe sa nachádzajú v rovnováhe dva rovnako ťažké piesty. Vzdialenosť medzi nimi a vzdialenosť prvého z nich od dna je l. Tlak vzduchu medzi piestami je $2p_0$, kde p_0 je atmosférický tlak (pozri obr.). Na vrchný piest zatlačíme tak, že sa dostane na miesto, kde bol predtým spodný piest. V akej vzdialenosti odo dna sa bude nachádzať spodný piest? Plyn má po celý čas konštantnú teplotu T.

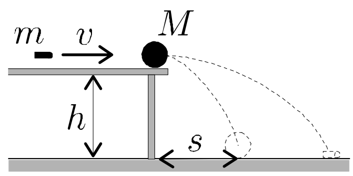


$\boxed{35.}$ Akú rýchlosť musí mať teleso v bode A, aby dopadlo do bodu B, ak sa nachádza vo výške h nad povrchom planéty? Hmotnosť planéty je M, polomer R.



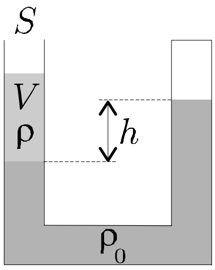
$\boxed{36.}$ Vaňa má tvar kvádra s výškou $h = 0,5\,\mathrm{m}$. Keď odtok vane upchám zátkou a naplno otvorím prítok vody, naplní sa vaňa za čas $t = 120\,\mathrm{s}$. Keď teraz zastavím vodu a otvorím odtok, voda začne odtekať. Za čas $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ klesne hladina vody o malú vzdialenosť $\Delta h = 0,5\,\mathrm{cm}$. V akej výške l sa ustáli vodná hladina, keď naraz pustíme naplno prítok vody a otvoríme odtok? Predpokladajte, že ak hladina vane je a nad odtokom, výtoková rýchlosť vody je rovná $\sqrt{2ga}$. Tiažové zrýchlenie $g = 9,81\,\mathrm{ms}^{-2}$. Výsledok zaokrúhlite tak, aby sa od skutočného nelíšil viac ako 1 cm.

$\boxed{37.}$ Na kraji stola výšky h je položená gulička hmotnosti M. Narazí do nej náboj hmotnosti m letiaci rýchlosťou v. Preletí ňou a obe telesá padnú na zem. Do akej vzdialenosti doletí náboj, ak gulička padla od stola vo vzdialenosti s?

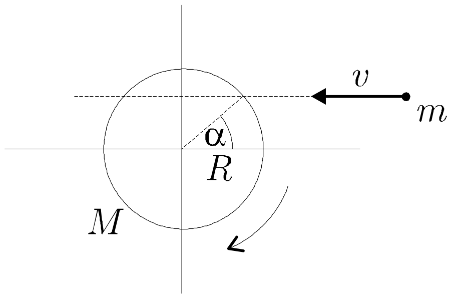


$\boxed{38.}$ Z naklonenej roviny s uhlom sklonu $\alpha = 30°$ hádžeme hmotný bod (počiatočná poloha hmotného bodu je na naklonenej rovine). Pod akým uhlom β, meraným od vodorovnej roviny, musíme tento hmotný bod hodiť, aby sa po dokonale pružnom odraze od naklonenej roviny vrátil naspäť do bodu, z ktorého bol hodený?

$\boxed{39.}$ V U-trubici s prierezom S je naliata kvapalina hustuty ρ_0. Jeden koniec trubice vzduchotesne uzavrieme, pričom vzduch, ktorý sme uzavreli má objem V_0. Potom do druhého konca dolejeme kvapalinu objemu V s menšou hustotou ρ. Aká je táto hustota, ak rozdiel hladín pôvodnej kvapaliny po ustálení je h? (t.j. hladiny sú v pokoji a teplota v uzavretej časti je taká istá, ako pred dolievaním druhej kvapaliny)

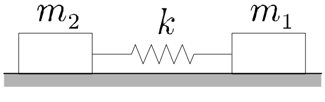


$\boxed{40.}$ Malé teleso hmotnosti m narazí neznámou rýchlosťou v do gule s hmotnosťou M a polomerom R, ktorá sa otáča okolo stredu s periódou T (os rotácie je kolmá na rovinu papiera, pozri obr.). Ťažisko gule bolo na začiatku v pokoji. Po zrážke sa guľa prestala otáčať, ale pohybuje sa rovnomerne priamočiaro. Aká je rýchlosť gule po zrážke? Moment zotrvačnosti gule je $\frac{2}{5}MR^2$ a zrážka bola dokonale nepružná.

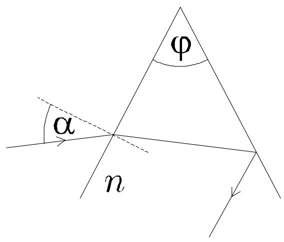


$\boxed{41.}$ Lyžiar sa kĺže dole po svahu, ktorý má tvar paraboly s rovnicou $y = x^2$. Na začiatku sa lyžiar nachádza v bode $[-3, 9]$, pričom je v pokoji. Vplyvom gravitácie sa začne pohybovať. Koeficient trenia medzi jeho lyžami a svahom je $\mu = 0,4$ a veľkosť tiažového zrýchlenia je $g = 9,81\,\mathrm{ms^{-2}}$. Odpor vzduchu zanedbajte. Akú rýchlosť bude mať lyžiar v bode $[-1, 1]$? Všetky číselné údaje sú v metroch. Výsledok zaokrúhlite na stotiny metrov za sekundu.

$\boxed{42.}$ Na dokonale hladkej vodorovnej podložke je pružina s tuhosťou k, na ktorej koncoch sú dve závažia s hmotnosťami m_1 a m_2. Aká bude perióda kmitov sústavy, ak niektoré zo závaží vychýlime z rovnovážnej polohy?

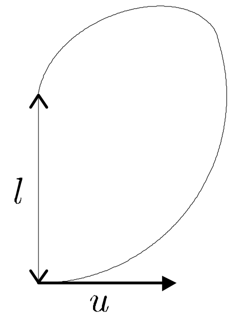


$\boxed{43.}$ Hranol s vrcholovým uhlom φ je zhotovený zo skla s indexom lomu n. Pri akom uhle dopadu α na jednu stenu hranola lúč nevyjde z hranola cez druhú stenu?



$\boxed{44.}$ Tri nádoby s rovnakým objemom sú prepojené zatvárateľnými kohútikmi. Prvá nádoba obsahuje plyn s hmotnosťou m_1, tretia obsahuje rovnaký plyn s hmotnosťou m_3 a v druhej nádobe je vákuum. Na začiatku spojíme druhú a tretiu nádobu, a keď sa vyrovnajú tlaky, druhú nádobu odpojíme od tretej a spojíme s prvou. Tlak v prvej a druhej nádobe sa ustáli na hodnote p. Nájdite pôvodnú hodnotu tlaku p_1 v prvej nádobe.

$\boxed{45.}$ Majme kyvadlo pozostávajúce z nehmotného špagátu dĺžy l a hmotného bodu zaveseného na konci. Akú rýchlosť treba tomuto hmotnému bodu udeliť, aby dopadol po oblúku do miesta závesu? Pohyb začína z rovnovážnej polohy a udelená rýchlosť je kolmá na špagát.



Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Vžime sa do kože rušňovodiča idúceho z mesta B. Označme v rýchlosť jeho vlaku. Ten sa nudí a popri slabej výplate sa už teší, že v polovici dráhy zakýva kolegovi. Po šoku, ktorý utrpí, keď sa dozvie o meškaní, sa stretnú v sľúbenej tretine. Rušnovodič vie, že jeho kolega meškal, situácia je teda taká istá, ako keby kolega išiel načas a on štartoval o $\frac{3}{4}$ h skôr. Tento náskok je však znížený o hodnotu $\frac{\frac{1}{6}140\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{kmh^{-1}}}$, to preto, že jeho kolega prejde svojou rýchlosťou o $\frac{1}{6}$ $(=\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$ dráhy menej. Náš rušňovodič prejde teda za tento výsledný "náskok" dráhu $\frac{1}{6}140\,\mathrm{km}$. Jeho rýchlosť je teda

$$v=\frac{\frac{1}{6}140\,\mathrm{km}}{\frac{3}{4}\,\mathrm{h}-\frac{\frac{1}{6}140\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{kmh^{-1}}}}=\frac{840}{13}\,\mathrm{kmh^{-1}}\approx 64,62\,\mathrm{kmh^{-1}}$$

$\boxed{2.}$ Na začiatok si označme nejaké časy. Čas, ktorý by nášmu Peťkovi trvala cesta dĺžky s, keby bežal stále so zrýchlením a označme t_1. Čas, za ktorý v skutočnosti prebehol prvú polovicu dráhy, označíme t_2 a druhú polovicu dráhy t_3 sekúnd. Teraz už môžeme bez problémov zapísať rovnice (v je rýchlosť, ktorú má Peťko po prebehnutí prvej polovici dráhy):

$$s=\frac{1}{2}at_1^2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}at_2^2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}s=vt_3+\frac{1}{2}2at_3^2 \tag{3}$$

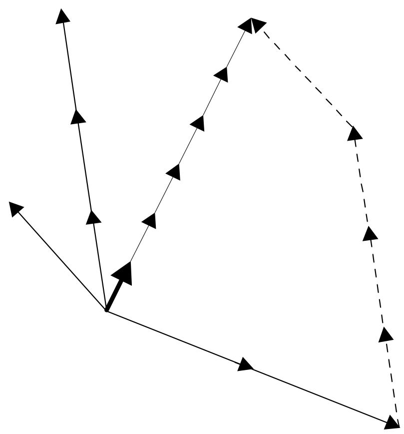
$$v=at_2 \tag{4}$$

$$t=t_2+t_3\Rightarrow t_2=t-t_3 \tag{5}$$

Dosadením (4) a (5) do (3) dostaneme $\frac{1}{2}s = a(t - t_3)\,t_3 + \frac{1}{2}2at_3^2 = att_3$. To teraz porovnáme s (2) a znova použijeme (5) $\frac{t_2^2}{2} = tt_3 \Rightarrow t_2^2 + 2tt_2 - 2t^2 = 0 \Rightarrow t_2 = -t \pm t\sqrt{3}$. Keďže čas je prirodzene kladná veličina, tak platí $t_2 = t\left(\sqrt{3} - 1\right)$. Vydelením (1) a (2) a malou úpravou dostaneme $t_1 = t_2\sqrt{2}$. Čas, ktorý by Peťko meškal, je $t_1 - t = t_2\sqrt{2} - t = t\left(\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{2} - t \doteq 0,035t$.

$\boxed{3.}$ Povedzme, že jeden štvorček $a \times a$ má hmotnosť m. Keby sme od nášho útvaru odtrhli aj štvrtý rohový štvorec, dostali by sme útvar s hmotnosťou $12m$, ktorého ťažisko vieme nájsť presne - nachádza sa v strede veľkého štvorca. Uhlopriečka malého štvorčeka má dĺžku $a\sqrt{2}$, takže ak k útvaru s hmotnosťou $12m$ pridáme jeden rohový štvorec, budeme mať akoby dva hmotné body s hmotnosťami m a $12m$, vzdialené od seba $\frac{3}{2}\sqrt{2}\,a$. Útvar s hmotnosťou $12m$ je 12-krát ťažší ako rohový štvorec, ťažisko bude k nemu 12-krát bližšie, teda $\frac{1}{13}\frac{3}{2}\sqrt{2}\,a = \frac{3\sqrt{2}}{26}\,a$, čo je zároveň vzdialenosť ťažiska nášho útvaru od stredu veľkého štvorca.

$\boxed{4.}$ Keďže na bombu nepôsobili žiadne vonkajšie sily, jej celková hybnosť je stále rovnaká (a to aj vtedy, keď je bomba rozhádzaná na 3 kusy). Hybnosť kusu bomby s hmotnosťou m a rýchlosťou $\vec{v}$ je vektor $m\vec{v}$, celková hybnosť sústavy je daná vektorovým súčtom jednotlivých hybností. Nám teda stačí vyrátať tieto 3 vektory a tie klasickým spôsobom zložiť.



Nakoniec, keďže výsledná hmotnosť bomby je $6m$, skrátime vektor na šestinu dĺžky.

$\boxed{5.}$ V čase, keď má retiazka rýchlosť v, nech zo stola prečnieva dĺžka x. Celková hmotnosť retiazky nech je m. Potom jej kinetická energia je $\frac{1}{2}mv^2$, kým jej potenciálna energia sa zníži o $\frac{x}{l}mg\frac{x}{2}$. Zo zákona zachovania energie teda dostávame

$$\frac{x}{l}\,mg\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,mv^2$$

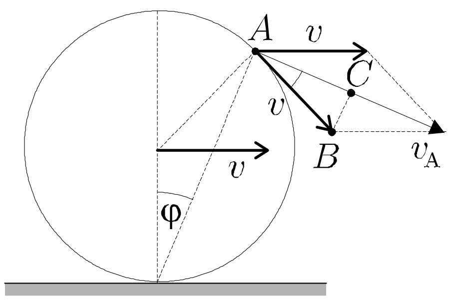
odkiaľ $x = v\sqrt{\frac{l}{g}}$. Pravdaže, maximálna rýchlosť čo môžeme dosiahnuť, aby sa retiazka ešte dotýkala stola, je $v_{\max} = \sqrt{gl}$.

$\boxed{6.}$ Označme plochu prierezu tyče S. Nech ľavá polovica tyče má hustotu ρ_1 a pravá ρ_2. Potom na ľavú a pravú polovicu tyče pôsobia tiažové sily veľkosti $F_{g1} = \frac{l}{2}S\rho_1 g$ a $F_{g2} = \frac{l}{2}S\rho_2 g$, kde g je veľkosť tiažového zrýchlenia, pričom ich pôsobiská sa nachádzajú v strede oboch častí, tj. vo vzdialenosti $\frac{l}{4}$ od stredu tyče. Povedzme, že vzdialenosť ťažiska celej tyče od jej stredu je x a nech $\rho_1 \geq \rho_2$. Ak tyč upevníme práve v ťažisku, mal by byť výsledný moment oboch tiažových síl rovný nule. Pre veľkosti momentov teda platí:

$$F_{g1}\left(\frac{l}{4} - x\right) = F_{g2}\left(\frac{l}{4} + x\right)$$
$$\frac{l}{2}S\rho_1 g\left(\frac{l}{4} - x\right) = \frac{l}{2}S\rho_2 g\left(\frac{l}{4} + x\right)$$

Z toho po úprave dostaneme $x = \frac{l}{4}\frac{|\rho_1-\rho_2|}{\rho_1+\rho_2}$. Absolútna hodnota je v čitateli preto, aby výsledok platil aj pre $\rho_1 \leq \rho_2$. Tento istý výsledok by sme dostali, keby sme obidve polovice tyče nahradili ich ťažiskami a potom našli výsledné ťažisko sústavy klasickým spôsobom - vieme, že ťažisko 2 hmotných bodov leží na ich spojnici, ktorú delí v obrátenom pomere hmotností.

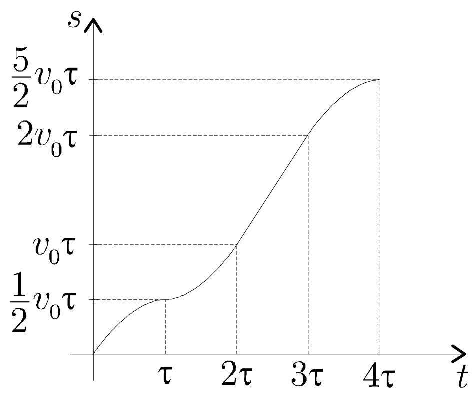
$\boxed{7.}$ Označme hľadanú rýchlosť v_A. Vo vzťažnej sústave spojenej so stredom pohybujúcej sa obruče koná bod A rovnomerný pohyb po kružnici rýchlosťou veľkosti v. Ak chceme prejsť do "našej" vzťažnej sústavy, musíme ešte pripočítať rýchlosť $\vec{v}$, ktorou sa pohybuje stred obruče. Ide teda len o veľkosť súčtu dvoch rovnako veľkých vektorov, ktoré zvierajú uhol $\alpha = 2\varphi$ (pozri obr.).



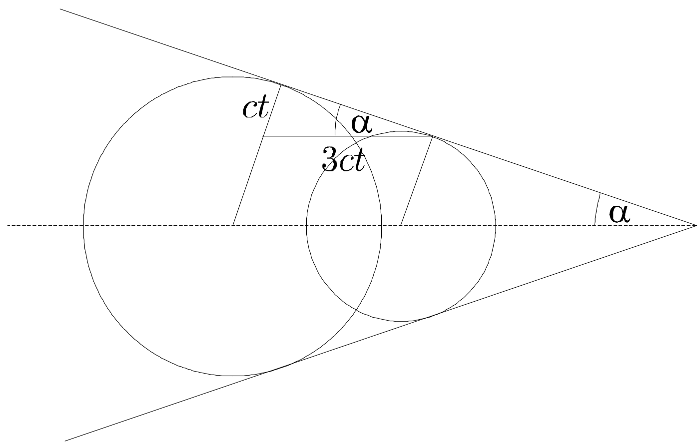
Z pravouhlého trojuholníka ABC (uhol BAC je vlastne φ) máme:

$$v_A = 2v\cos\varphi$$

$\boxed{8.}$ Pri riešení nás nezaujíma to, či ide auto dopredu alebo dozadu. Vidíme, že prvý (0 až τ) úsek auto rovnomerne znižuje svoju rýchlosť (v skutočnosti spomaľuje, ale to nás nezaujíma), tvar závislosti dráhy od času bude teda parabola s maximom v čase τ. Potom (τ až 2τ) rovnomerne zrýchľuje, takže grafom bude opäť parabola, avšak s minimom v čase τ. Nasleduje úsek rovnomerného pohybu (2τ až 3τ), v ktorom bude grafom závislosti dráhy od času priamka. Na záver teleso rovnomerne spomaľuje (3τ až 4τ), grafom bude zas parabola s maximom v čase 4τ. Keďže prejdená dráha za určitý čas je obsah plochy pod grafom rýchlosti počas tohto času, za prvý úsek prejde auto dráhu $\frac{1}{2}v_0\tau$ a za tretí úsek dráhu $v_0\tau$. Graf závislosti prejdenej dráhy od času bude teda vyzerať takto:



$\boxed{9.}$ Celý povrch kužeľa dostaneme, ak sčítame príspevky všetkých guľových vlnoplôch, ktoré vznikajú za lietadlom počas jeho pohybu. Zoberme dve takéto guľové vlnoplochy (pozri obr.), medzi ktorých vznikom uplynul čas t, takže ich stredy sú vzdialené $3ct$, kde c je rýchlosť zvuku. Rozdiel ich polomerov je práve ct, lebo polomery týchto vlnoplôch narastajú rýchlosťou zvuku. Podľa obr. potom dostaneme $\sin\alpha = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19,47^\circ \approx 19^\circ\,28'$



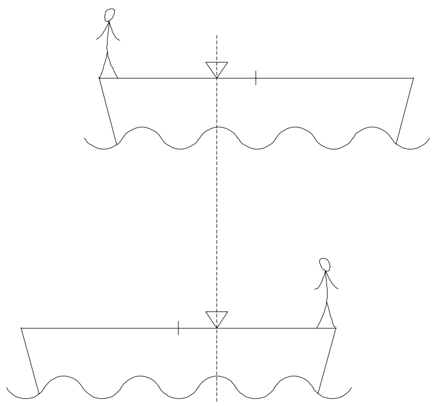
$\boxed{10.}$ Označme výšku, z ktorej teleso padá l, čas ktorý padá t a hľadanú rýchlosť

v. Z rovníc pre rovnomerne zrýchlený pohyb potom máme:

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{gt^2}{2} \\
l &= \frac{1}{2} g \left(\frac{t}{2}\right)^2 + v\frac{t}{2}
\end{aligned}
$$

Riešením týchto rovníc $v = \frac{3}{4}gt$.

$\boxed{11.}$ Na sústavu loďka+človek nepôsobí žiadna vonkajšia sila vo vodorovnom smere (ak zanedbáme trenie loďky o vodnú hladinu), preto sa počas pohybu nezmení poloha ťažiska. Dajme tomu, že človek prejde z ľavého konca loďky na pravý.



Na začiatku sa ťažisko nachádza v $\frac{1}{8}$ dĺžky loďky vľavo od stredu loďky. Na konci sa nachádza v $\frac{1}{8}$ dĺžky loďky vpravo od stredu loďky. Celkové posunutie teda činí $\frac{1}{4}L$.

$\boxed{12.}$ Ak je valec dokonale hladký, musia sily N_1 a N_2 smerovať presne do stredu valca, takže ich momenty vzhľadom naň sú nulové (rovnako aj pre tiažovú a zotrvačnú silu). Potom stačí iba zapísať rovnice pre zvislé a vodorovné zložky síl, ktoré musia byť v rovnováhe, aby sa valec vzhľadom na vozík nepohyboval.

$$
\begin{aligned}
N_1 \sin 60^\circ + N_2 \sin 60^\circ = mg = (N_1 + N_2)\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\
N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = ma = \frac{(N_1 - N_2)}{2}
\end{aligned}
$$

Po vyriešení sústavy dostaneme veľkosti $N_{1,2} = \frac{mg}{\sqrt{3}} \pm ma$.

$\boxed{13.}$ Vypočítajme oba časy, potrebné na dosiahnutie vytúženého cieľa. Možnosť A: Na opačný breh sa dostane za čas $t_0 = \frac{d}{\sqrt{2}v_0}$. Kým Jano plával, odniesol ho prúd nižšie o vzdialenosť $s = v_0 t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} d$. Kým túto vzdielenosť odkráča späť, bude mu to trvať $t_1 = \frac{s}{2v_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,v_0} d$. Celkový čas pri možnosti A je teda

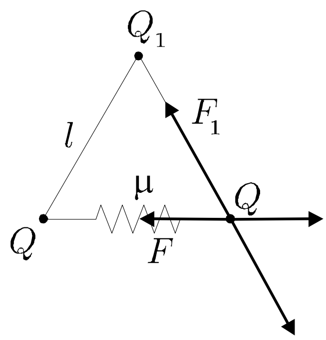
$$t_A = t_0 + t_1 = \frac{3}{2} \frac{d}{\sqrt{2}\,v_0}$$

Možnosť B: Bude sa pohybovať rýchlosťou $v = \sqrt{\left(\sqrt{2}\,v\right)^2 - v_0^2} = v_0$ (t.j. nasmeruje sa pod uhlom 45° proti prúdu, vtedy ho prúd neodnesie). Celú šírku rieky prekoná za čas $t_B = \dfrac{d}{v_0}$. Predpokladajme, že možnosť B je rýchlejšia a počítajme rozdiel $t_A - t_B$. Ak náhodou dostaneme záporné číslo, nevadí, pomýlili sme sa a rýchlejšia je možnosť A.

$$t_A - t_B = \frac{3}{2} \frac{d}{\sqrt{2}\,v_0} - \frac{d}{v_0} = \frac{d}{v_0} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{d}{v_0} \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Nakoľko $\sqrt{2} < 1,5$ je uvedený rozdiel väčší ako 0. Rýchlejšia je teda možnosť B, konkrétne o $\dfrac{d}{v_0} \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

$\boxed{14.}$ Keďže je sústava v rovnovážnej polohe, je súčet síl, čo pôsobia na každý náboj zvlášť, nulový. Na náboj Q pôsobia štyri sily. Jedna od druhého náboja Q, druhá od Q_1, tretia od pružiny a štvrtá od paličky (pozri obr.).



Keďže všetky sily pôsobia v dvoch navzájom nezávislých smeroch, musí platiť $F_1 = k\frac{Q_1 Q}{l^2}$ a $F = k\frac{Q^2}{l^2}$. Preto sa sila od paličky zruší so silou od náboja Q_1. Potom je jasné, že sila od pružiny je rovná sile od náboja Q. Teda

$$\mu l = k \frac{Q^2}{l^2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\mu l^3}{k}}$$

To je podmienka pre náboj Q. No a náboj Q_1 môže mať ľubovoľnú veľkosť.

$\boxed{15.}$ V okamihu, keď sa spodný bod pravítka dostane na úroveň stola, bude mať rýchlosť $\sqrt{2hg}$. Ďalej sa pravítko pohybuje so zrýchlením g, máme teda $t\sqrt{2hg} + \frac{1}{2} g t^2 = d$. Z toho $h = \frac{\left(2d - gt^2\right)^2}{8gt^2}$.

$\boxed{16.}$ Aby teleso dosiahlo najvyšší bod kruhového úseku, musí byť odstredivá sila, ktorá naň v tomto bode pôsobí, väčšia (nanajvýš rovnako veľká) ako tiažová, inak by teleso zo šmykľavky spadlo, ešte predtým, ako by sa ocitlo v tomto najvyššom bode. Pre rýchlosť teda dostávame podmienku:

$$\frac{mv^2}{R} = mg$$

kde m je hmotnosť telesa. Podľa zákona zachovania energie je prírastok kinetickej energie rovný poklesu polohovej, takže:

$$mg\,(h-2R) = \frac{1}{2}\,mv^2$$

Po dosadení a úprave dostaneme $h = \frac{5}{2}R$.

$\boxed{17.}$ Úlohu vyriešime ľahko s použitím zákona zachovania energie. Keď gulička vyskočí nad hladinu, na jej miesto sa dostane voda s hmotnosťou ρV. Táto voda klesla z výšky h. Zároveň, loptička sa posunie hore o výšku $h + h_m$. Ľahko teda zostavíme rovnicu:

$$\rho V g h = mg(h + h_m)$$

z čoho $h_m = \left(\dfrac{\rho V}{m} - 1\right) h$. Príklad sa dal samozrejme riešiť aj bez zákona zachovania energie, vieme, že loptička najprv vykonáva rovnomerne zrýchlený pohyb a potom rovnomerne spomalený. Rátame a vyjde.

$\boxed{18.}$ Hmotnosť štvorčeka, z ktorého sa domček skladá je $a^2\sigma g$, kde σ je plošná hustota materiálu. Hmotnosť trojuholníčka bude $\frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma g$. Ťažisko trojuholníčka sa nachádza v tretine ťažnice, ktorá má veľkosť $\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$, teda vo výške $\frac{\sqrt{3}}{6}\,a$ nad základňou. Označme výšku ťažiska celého domčeka h. Ostáva už iba zrátať výsledné ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov (ťažísk štvorca a trojuholníka)

$$h = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

kde y_i je výška ťažiska i-tej časti a m_i jeho hmotnosť. Pre náš konkrétny prípad dostávame

$$h = \frac{\frac{a}{2}\,a^2\sigma g + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\,a + a\right)\frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma g}{a^2\sigma g + \frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma g} = a\,\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$h = a\,\frac{\frac{5+2\sqrt{3}}{8}}{\frac{4+\sqrt{3}}{4}} = a\,\frac{5+2\sqrt{3}}{8+2\sqrt{3}} = a\,\frac{14+3\sqrt{3}}{26} = 0,738a$$

$\boxed{19.}$ Označme P_i príkony žiaroviek a R_i ich odpory ($i = 1, 2, 3$). Ďalej nech $U = 220\,\mathrm{V}$. Pre žiarovky platí $P_i = \dfrac{U^2}{R_i} \Longrightarrow R_i = \dfrac{U^2}{P_i}$. Ďalej vieme, že keď žiarovky zapojíme za seba, ich odpor sa sčíta. Teda $R = R_1 + R_2 + R_3$. Výsledný príkon sústavy je teda

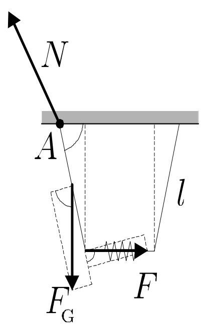
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\dfrac{U^2}{P_1} + \dfrac{U^2}{P_2} + \dfrac{U^2}{P_3}} = \frac{1}{\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{90}}\,\mathrm{W} = \frac{180}{11}\,\mathrm{W} = 16{,}4\,\mathrm{W}$$

$\boxed{20.}$ Hľadaný čas označme T. Vypočítať ho môžeme ako súčet štyroch časov, prislúchajúcich pohybu kyvadla po $A - B$, $B - C$, ... Keďže veľkosť zrýchlenia pri stúpaní i klesaní hmotného bodu je vždy rovnaká, sú tieto štyri časy rovnaké - označíme ich t. Ak uhol sklonu úsečky AB je α, potom $|\angle AOB| = 2\alpha$. Zrýchlenie hmotného bodu pri poklese na AB má veľkosť $g \sin\alpha$. Ak S je stred AB, potom $|\angle AOS| = |\angle BOS| = \alpha$ a dĺžka s úsečky AB je rovná $2l \sin\alpha$. Ide o rovnomerne zrýchlený pohyb, takže bude platiť:

$$s = \frac{1}{2}(g \sin\alpha)t^2 = 2l \sin\alpha$$

Po úprave dostaneme $t = \sqrt{\frac{4l}{g}}$, preto $T = 4t = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$.

$\boxed{21.}$ Keďže je sústava v rovnováhe, musia byť splnené dve podmienky. Súčet všetkých síl na jednu tyčku je nulový a tiež súčet všetkých momentov týchto síl je nulový. Na paličku pôsobia tri sily. Gravitačná sila F_G, sila od pružiny F a sila od steny N (pozri obr.).



Vďaka zákonu akcie a reakcie sa o prvú podmienku nemusíme starať, lebo sila od steny bude presne taká, aby súčet všetkých troch síl bol nulový. A navyše, ak budeme určovať momenty síl vzhľadom na bod A, tak ani nemusíme vedieť, aká je sila od steny veľká. Preto sa tieto dve podmienky dajú zredukovať do jednej rovnice, ktorá hovorí o rovnosti momentov gravitačnej sily a sily od pružiny vzhľadom na bod A:

$$\frac{l}{2}mg\cos\alpha = lF\sin\alpha \Rightarrow F = \frac{mg\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

Keďže má pružina v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku, bude pre silu F platiť:

$$F = k\left(l - 2l\cos\alpha\right)$$

Z týchto dvoch rovníc už jednoducho vyjadríme dĺžku tyčky l:

$$l = \frac{mg\cos\alpha}{2k\sin\alpha\left(1 - 2\cos\alpha\right)}$$

$\boxed{22.}$ Predstavme si rovnovážny stav, kedy na skrutku pôsobíme momentom M, ale čosi na ňu tlačí silou $-F$. Keby sa skrutka pootočila o malý uhol $\delta\varphi$ a zároveň posunula o malú vzdialenosť δx, môžeme vykonanú prácu δW vyjadriť dvoma spôsobmi:

$$\begin{aligned}\delta W = -(-F\delta x) &= M\delta\varphi \\ F &= M\frac{\delta\varphi}{\delta x}\end{aligned}$$

Pre skrutku zrejme platí $\frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{\varphi}{x}$, takže pre silu dostaneme $F = M\frac{\varphi}{x}$.

$\boxed{23.}$ Ak zanedbáme odpor vzduchu, obe telesá by sa mali pohybovať s rovnakými zrýchleniami v každom okamihu, preto sa zrazia až na dne polguľovej nádoby. Ich rýchlosť pri zrážke môžeme vypočítať podľa zákona zachovania energie:

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{2gR}$$

Zrážka je dokonale nepružná, preto počas nej už nemusí platiť zákon zachovania energie. Rýchlosť výsledného telesa však môžeme určiť zo zákona zachovania hybnosti:

$$2m\sqrt{2gR} - m\sqrt{2gR} = 3mV$$

, kde V je rýchlosť nového telesa. Po úprave dostaneme $V = \frac{\sqrt{2gR}}{3}$ a opäť môžeme použiť zákon zachovania energie.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3m)V^2 &= \frac{1}{3}mgR = 3mgh \\ h &= \frac{R}{9}\end{aligned}$$

Výška, do ktorej sa dostane novovzniknuté teleso po zrážke je h, a ak ju vyjadríme podľa uhla odklonu, ktorý treba vypočítať, dostaneme

$$h = R\,(1 - \cos\alpha) = \frac{R}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{8}{9}, \alpha = \arccos\frac{8}{9} \approx 27{,}27^\circ \approx 27^\circ 16'$$

$\boxed{24.}$ K príkladu sa dá pristupovať klasickým spôsobom. Gravitačné zrýchlenie ovplyvňuje zvislý smer pohybu. Z toho vieme, aký čas musí teleso stráviť vo vzduchu, $T_1 = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. No a vodorovný smer pohybu zas ovplyvňuje len elektrické pole so zrýchlením $a = \frac{QE}{m}$. Najprv náboj spomalí na nulovú rýchlosť za čas $T_2 = \frac{v_0 \cos\alpha}{a} = \frac{m}{QE} v_0 \cos\alpha$, pričom pri tom prejde teleso dráhu $s = v_0 \cos\alpha T_2 - \frac{1}{2} a T_2^2$, čiže

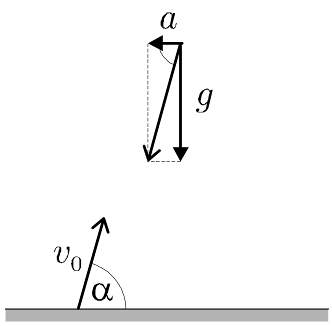
$$s = v_0 \cos\alpha \,\frac{m}{QE}\, v_0 \cos\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{QE}{m}\left(\frac{m}{QE}\, v_0 \cos\alpha\right)^2 \tag{1}$$

Potom musí tú istú dráhu prejsť naspäť za čas $T_1 - T_2 = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{m}{QE} v_0 \cos\alpha$ a to

$$s = \frac{1}{2}\, a\,(T_1 - T_2)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{QE}{m}\left(2\,\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{m}{QE}\, v_0 \cos\alpha\right)^2 \tag{2}$$

Teraz už len "jednoduchou" úpravou (1) a (2) dostaneme $E = \frac{mg}{Q} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Existuje však aj oveľa elegantnejšie riešenie. Stačí si uvedomiť dve veci. Po prvé, že riešenie je len jedno a po druhé, že na teleso vlastne pôsobí celý čas konštantné zrýchlenie stále rovnakého smeru (pozri obr.).



Ak hodíme teleso presne proti tomuto zrýchleniu bude konať podobný pohyb, ako keby sme ho hodili len v gravitačnom poli zvislo nahor. Akurát zrýchlenie je rôzne. Potom je jasné, že musí dopadnúť na to isté miesto. Preto stačí, aby platilo

$$\tan\alpha = \frac{g}{\frac{QE}{m}} \Rightarrow E = \frac{mg}{Q}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\boxed{25.}$ Najprv zo zákona zachovania energie vypočítame, aká je rýchlosť prvej gulôčky pri zrážke.

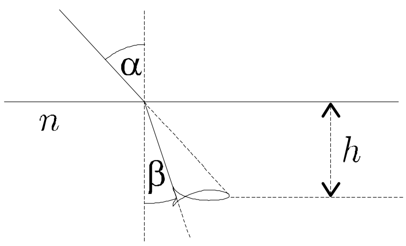
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Máme teda rýchlosť prvej gulôčky a teraz by sme mali zaviesť rýchlosti po zrážke pre obe zrážajúce sa telesá a zapísať zákon zachovania energie a zákon zachovania hybnosti. Vieme však, že takáto sústava rovníc o dvoch neznámych môže mať len jedno také riešenie, ktoré má fyzikálny význam. V tomto prípade nie je také ťažké toto riešenie uhádnuť, lebo ak predpokladáme, že guľôčka na závese po náraze zastane a "odovzdá" celú svoju kinetickú energiu i hybnosť guľôčke na okraji stola, oba zákony zachovania sú splnené (kto neverí, nech počíta). Máme teda vodorovný vrh rýchlosťou $v = \sqrt{2gh}$ z výšky y. Ak pád bude trvať t, platia pre tento zložený pohyb rovnice:

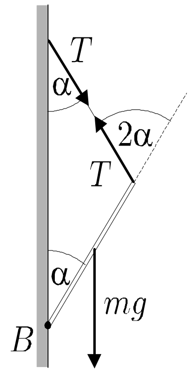
$$\begin{aligned} x &= t\sqrt{2gh} \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Vyriešením sústavy získame výsledok $x = 2\sqrt{hy}$.

$\boxed{26.}$ Lúče svetla, ktoré odráža chvost ryby, sa pri dopade na hladinu pod uhlom, ktorý označíme β, budú lámať a lovec ich uvidí pod uhlom α. Malo by platiť $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Longrightarrow \sin\beta = \frac{1}{n\sqrt{2}}$, $\beta \approx 32,12^\circ \approx 32^\circ\,7'$. Podľa obrázka vidno, že dĺžku ryby možno vyjadriť ako $h\tan\alpha - h\tan\beta$. Po dosadení dostaneme dĺžku ryby 19 cm.



$\boxed{27.}$ Stačí si zapísať podmienku, že výsledný moment síl pôsobiaci na tyč je nulový. Momenty budeme počítať vzhľadom na kĺb (bod B). Vtedy majú moment len dve sily, a to gravitačná mg a ťahová sila špagátu T.



Zapíšeme teda:

$$\frac{l}{2}mg\sin\alpha = lT\sin(180^\circ - 2\alpha)$$

je načase spomenúť si na temné triky so sínusmi:

$$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

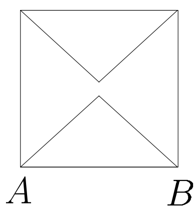
s pomocou čoho $T = \frac{mg}{4\cos\alpha}$.

$\boxed{28.}$ Jeden z Keplerových zákonov nám hovorí, že pre ľubovoľnú obežnicu danej hviezdy (nebeského telesa oveľa ťažšieho ako jeho obežnice) je pomer $\frac{T^2}{a^3}$ konštantný (kde T je doba obehu telesa a a je hlavná polos jeho eliptickej trajektórie). Nám by sa hodilo zistiť, akú hodnotu má táto konštanta pre Slnko. Tu využijeme fakt, že aj Zem je obežnicou slnka. Pre Zem je $T = 1\,\mathrm{rok}$, $a = 1\,\mathrm{AU}$. Máme teda:

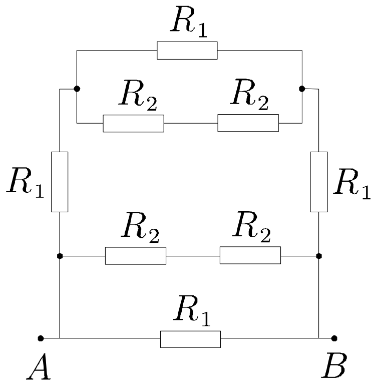
$$\frac{(1\,\mathrm{rok})^2}{(1\,\mathrm{AU})^3} = \frac{T^2}{a^3} \Longrightarrow a = 76^{\frac{2}{3}}.1\,\mathrm{AU}$$

Pre elipsu platí $a = \frac{r_{\min}+r_{\max}}{2}$, preto po úprave $r_{\max} = 76^{\frac{2}{3}}.2\ \mathrm{AU} - 0,6\,\mathrm{AU} = 35,3\,\mathrm{AU}$.

$\boxed{29.}$ Zo symetrie vyplýva, že uzol v strede štvorca bude mať nulový potenciál. Potom ním nebude pretekať prúd a zapojenie môžeme v tom mieste beztrestne rozpojiť.



Štvorec potom prejde do takejto schémy, ktorej odpor ľahko vypočítame.

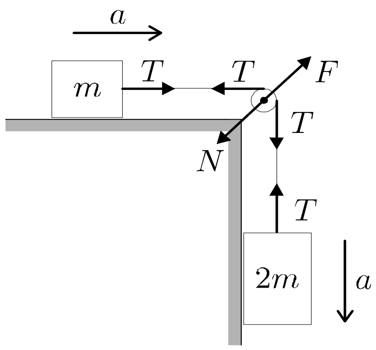


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_1 + R_1 + \frac{R_1 2R_2}{R_1+2R_2}}$$

Podľa zadania je $R_1 = 1\Omega$ a potom bude mať polovica uhlopriečky odpor $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega$. To znamená

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\right)\Omega^{-1} \\
\frac{1}{R} &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}\right)\Omega^{-1} \\
\frac{1}{R} &= \frac{6+5\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}\,\Omega^{-1} \\
R &= \frac{2+3\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}\,\Omega = \frac{9-4.\sqrt{2}}{7}\,\Omega = 0,478\,\Omega
\end{aligned}$$

$\boxed{30.}$ Označme a zrýchlenie kvádrikov a T silu, ktorou je napínané lano.



Táto sila musí byť v celom lane rovnaká a na kvádriky a kladku pôsobí tak, ako je to na obrázku. Tu by som rád zdôraznil, že tých 45° nie je bohapustý výmysel zadávateľov príkladu, ale fyzikálna nutnosť. Ak si uvedomíme, že kladka je ťahaná dvoma silami s veľkosťami T a tieto sily sa zložia do sily N, ktorá musí byť rovnobežná so smerom lana, je jasné, odkiaľ sa toto číslo berie. Stačí nám už len zapísať pohybové rovnice pre závažia. Nech a je zrýchlenie oboch kvádrikov. Potom:

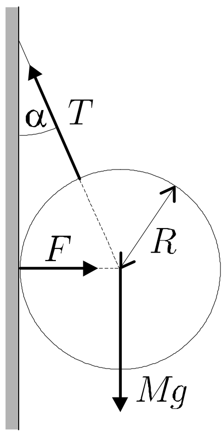
$$\begin{aligned} ma &= T \\ 2ma &= 2mg - T \end{aligned}$$

z ktorých ľahko dostaneme:

$$T = \frac{2}{3} mg$$

Napínajúca sila má zrejme veľkosť $\sqrt{2}\, T = \sqrt{2}\, \frac{2}{3} mg$

$\boxed{31.}$ Najprv usúdime, že priamka, ktorá vznikne mysleným predĺžením špagátu, musí prechádzať stredom gule.

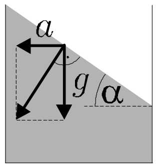


Stačí, aby sme si uvedomili, že súčet momentov síl vzhľadom na ľubovoľný bod musí byť nulový (inak by sa guľa otáčala). Vzhľadom na stred gule majú tiažová sila a reakcia od steny moment nulový, sila T teda musí mať tiež nulový moment. Ostávajú nám už len rovnováhy síl vo vodorovnom a zvislom smere. Rozložíme silu T na zložky a zapíšeme:

$$\begin{aligned} T \sin\alpha &= F \\ T \cos\alpha &= Mg \end{aligned}$$

z čoho $F = Mg \tan\alpha$, pre uhol α zase z krásneho pravouhlého trojuholníka vieme napísať $\sin\alpha = \frac{R}{l+R} = \frac{5}{13}$ a ak si spomenieme na súčtové vzorce, rozšírime našu bázu znalostí o poznatok $\cos\alpha = \dfrac{12}{13} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{5}{12} \Rightarrow F = \dfrac{5}{12} Mg.$

$\boxed{32.}$ Vzťažná sústava spojená so zrýchľujúcim lietadlom je neinerciálna, preto na všetky predmety vo vnútri lietadla bude pôsobiť zotrvačná sila. Na džús teraz pôsobí zvislá tiažová sila a vodorovná zotrvačná sila. On si preto bude myslieť, že sa nachádza v novom gravitačnom poli, v ktorom má tiažové zrýchlenie veľkosť $\sqrt{g^2+a^2}$ a so zvislicou zviera uhol $\alpha = \arctan \frac{a}{g}$ (to znamená $\tan\alpha = \frac{a}{g}$, pozri obr.).



Podobne ako pri tiažovej sile, aj v tomto prípade bude hladina kolmá na nové "tiažové" zrýchlenie, t.j. s vodorovnou rovinou bude zvierať uhol α, ktorý sme už vypočítali. Už len spočítať, aký tento uhol môže byť, aby sa nič nevylialo. Ak sa hladina nakloní, časť džúsu sa preleje na jednu stranu, zatiaľ čo na druhej vznikne prázdne miesto. Bod, ktorý sa pred štartom nachádzal v strede, svoju polohu nezmení, lebo preklopením vyvýšenej časti okolo tohto bodu sa zaplní jama a dostaneme opäť vodorovnú hladinu. Pre hraničný uhol teda platí $\tan\alpha = \frac{h}{r} = \frac{a}{g}$. Maximálna hodnota zrýchlenia je podľa toho $a = \frac{hg}{r}$.

$\boxed{33.}$ Označme výchylku kocky v zvislom smere x, pričom kladná bude pri posunutí kocky smerom nahor. Výsledná sila F pôsobiaca na kocku je rovná súčtu vztlakovej a tiažovej sili. Hustota kvapaliny je ρ.

$$F = -mg + \rho a^2 \left(\frac{a}{2} - x\right) g$$

Okrem toho vieme, že ak je kocka v rovnováhe ($x = 0$, $F = 0$), polovica z nej je pod hladinou.

$$mg = \frac{\rho a^3}{2}\, g$$

Po dosadení do prvého vzťahu máme $F = -\rho g a^2 x$, čo je podobná rovnica ako pre závažie na pružine, ale s tuhosťou $k = \rho g a^2$ a podľa predchádzajúcej rovnice s hmotnosťou $m = \frac{\rho a^3}{2}$. Hľadaná perióda zvislých kmitov kocky je potom $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$.

$\boxed{34.}$ Na každý piest pôsobí tiažová sila. Preto, aby nespadol, musí byť tlak pod ním o niečo väčší ako nad ním. Zo zadania vyplýva, že to niečo je rovné práve p_0 (tlak medzi piestami, tj. pod vrchným piestom, je $2p_0$, zatiaľ čo nad vrchným piestom je iba p_0). Potom tlak pod spodným piestom musí byť $3p_0$ (aby rozdiel tlakov nad a pod bol opäť p_0). Ak S je plocha piestu, N_1, N_2 sú počty častíc pod horným a dolným piestom a k je Boltzmannova konštanta, potom stavové rovnice pre plyn pred stlačením sú:

$$\begin{aligned} 2p_0 Sl &= N_1 kT \\ 3p_0 Sl &= N_2 kT \end{aligned}$$

Nech po stlačení sú pod vrchným a spodným piestom tlaky p_1, p_2 a zodpovedajúce vzdialenosti sú l_1, l_2 (l_2 je to, čo máme vypočítať). Počty častíc ani teplota sa nezmenili, preto:

$$\begin{aligned} p_1 l_1 &= 2p_0 l \\ p_2 l_2 &= 3p_0 l \\ l_1 + l_2 &= l \\ p_1 - p_2 &= p_0 \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy dostaneme pre l_2 kvadratickú rovnicu s koreňmi $l_2 = \left(\pm\sqrt{7} - 2\right) l$. Malo by platiť $l_2 < l$, preto $l_2 = \left(\sqrt{7} - 2\right) l$.

$\boxed{35.}$ Pre pohyb telesa bude platiť zákon zachovania energie a zákon zachovania momentu hybnosti. Napíšme si ich v tvare

$$\begin{aligned} \frac{mv_A^2}{2} - \kappa\frac{mM}{R+h} &= \frac{mv_B^2}{2} - \kappa\frac{mM}{R} \\ mv_A\left(R+h\right) &= mv_B R \end{aligned}$$

Riešením týchto dvoch rovníc dostávame výsledok

$$v_A = \sqrt{2\kappa\frac{MR}{\left(R+h\right)\left(2R+h\right)}}$$

$\boxed{36.}$ Označme S prierez vane, s prierez odtoku, Q prietok, ktorým napúšťame vodu a Q_1 prietok, ktorým voda odteká, keď sme v ustálenom stave. Zjavne teda platí:

$$Q = Q_1$$

Ďalej vieme, že

$$Q = \frac{hS}{t} = Q_1 = s\sqrt{2gl} \Rightarrow l = \left(\frac{hS}{ts}\right)^2 \frac{1}{2g}$$

Teraz sa pozrime, čo vieme povedať o vypúšťaní počas času Δt. Výtoková rýchlosť sa počas tohto času mení, našťastie však nie príliš. Vieme o nej povedať

$$\sqrt{2g\left(h - \Delta h\right)} \le v \le \sqrt{2gh}$$

Pre objem, ktorý počas Δt z vane vytečie, platí $\sqrt{2g\,(h-\Delta h)}\,s\Delta t \leq \Delta h S \leq \sqrt{2gh}\,s\Delta t$. Pomocou tejto nerovnosti ľahko odhadneme $\left(\frac{S}{s}\right)^2$:

$$\frac{2g\,(h-\Delta h)}{\Delta h^2}\,\Delta t^2 \leq \left(\frac{S}{s}\right)^2 \leq \frac{2gh}{\Delta h^2}\,\Delta t^2$$

Keď sem dosadíme skutočné čísla, máme: $388476 \leq \left(\frac{S}{s}\right)^2 \leq 392400$. Po dosadení do vzorca pre l:

$$34{,}3\,\mathrm{cm} \leq l \leq 34{,}7\,\mathrm{cm}.$$

Vieme teda, že l je s dostatočnou presnosťou $34{,}5\,\mathrm{cm}$.

$\boxed{37.}$ Pre zrážku guličky a náboja platí zákon zachovania hybnosti.

$$mv = Mv_G + mv_N$$

kde indexované rýchlosti znamenajú rýchlosti telies po zrážke. Po zrážke vykonávajú telesá zložený pohyb - voľný pád plus rovnomerný (vodorovný) pohyb. Keďže obe telesá budú padať z rovnakej výšky, budú padať aj rovnaký čas $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Za tento čas doletela gulička do vzdialenosti s, mala teda po zrážke rýchlosť $v_G = s\sqrt{\frac{g}{2h}}$. Dosadením do prvej rovnice sa dozvedáme, že náboj mal po zrážke rýchlosť

$$v_N = v - \frac{M}{m}\,s\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Pri takej začiatočnej rýchlosti doletel za čas t do vzdialenosti

$$d = v_N t = v\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m}\,s$$

$\boxed{38.}$ Najdôležitejšie na tomto príklade je uvedomiť si, že aby sa hodený hmotný bod dostal naspäť tam, odkiaľ prišiel, musí na naklonenú rovinu dopadnúť kolmo. Vtedy bod po odraze zopakuje presne ten pohyb, ktorý konal predtým (ibaže odzadu). Nech miesto, z ktorého bol hodený, má súradnice $[0,0]$ a miesto, v ktorom dopadne na naklonenú rovinu $[x,y]$. Ak pohyb trvá čas t a veľkosť počiatočnej rýchlosti je v, dostaneme pre zložený pohyb rovnice:

$$\begin{aligned}
v_x &= v\cos\beta \\
v_y &= v\sin\beta - gt \\
x &= vt\cos\beta \\
y &= vt\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

Pre naklonenú rovinu platí $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ a z podmienky kolmosti dopadu dostaneme rovnicu $\tan\alpha = -\frac{v_x}{v_y}$.

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= -\frac{v_x}{v_y} = \frac{v\cos\beta}{gt - v\sin\beta} \Longrightarrow gt - v\sin\beta = \frac{v\cos\beta}{\tan\alpha} \qquad (1)\\
\tan\alpha &= \frac{y}{x} = \frac{vt\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2}{vt\cos\beta} = \frac{2v\sin\beta - gt}{2v\cos\beta} = \frac{v\sin\beta - (gt - v\sin\beta)}{2v\cos\beta}
\end{aligned}$$

Teraz sem dosadíme (1)

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{v\sin\beta - \frac{v\cos\beta}{\tan\alpha}}{2v\cos\beta}\\
\tan\alpha &= \frac{\sin\beta - \frac{\cos\beta}{\tan\alpha}}{2\cos\beta} = \frac{\tan\beta}{2} - \frac{1}{2\tan\alpha}\\
\tan\beta &= 2\tan\alpha + \cot\alpha
\end{aligned}$$

Teda hmotný bod treba hodiť pod uhlom $\beta = \arctan(2\tan\alpha + \cot\alpha) \approx 70{,}89^\circ \approx 70^\circ\,54'$.

K príkladu sa dalo pristupovať aj fintovo. Označme $\gamma = \beta - \alpha$, je to teda uhol vrhu vzhľadom na naklonenú rovinu. Rozložme teraz tiažové zrýchlenie g na 2 zložky. $g\sin\alpha$ je veľkosť zložky rovnobežnej s rovinou, $g\cos\alpha$ je veľkosť kolmej zložky. Podobne rozložíme počiatočnú rýchlosť v na zložky $v\sin\gamma$ (kolmá na rovinu) a $v\cos\gamma$ (rovnobežná s rovinou). Pre čas vrhu t (po prvý dopad na rovinu) potom platí

$$\frac{t}{2}g\cos\alpha = v\sin\gamma$$

a z podmienky kolmosti spomenutej v predchádzajúcom riešení máme (zložka rýchlosti rovnobežná s naklonenou rovinou musí byť pri dopade nulová)

$$tg\sin\alpha = v\cos\gamma$$

vydelením týchto rovníc

$$\tan\gamma = \frac{1}{2}\cot\alpha \Rightarrow \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

z čoho dostávame pre β rovnaký výsledok, ako predtým.

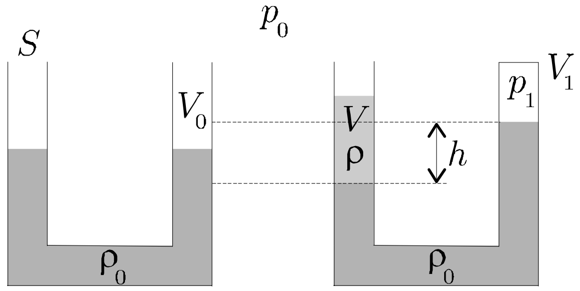
$\boxed{39.}$ Tlak a objem v uzavretej časti po ustálení označme p_1 a V_1. Keďže teplota pred dolievaním a po ustálení je rovnaká, tak platí izotermická rovnica

$$p_1V_1 = p_0V_0$$

kde p_0 je atmosférický tlak. Ďalej, keďže je sústava v hydrostatickej rovnováhe, musí byť splnená rovnosť tlakov v oboch ramenách:

$$p_0 + \rho g \frac{V}{S} = p_1 + \rho_0 g h$$

Rozdiel objemov v uzavretom ramene pred a po dolievaní je rovný práve zdvihnutiu hladiny pôvodnej kvapaliny v tomto ramene. Na uvedomenie si tohto faktu nám najlepšie poslúži obrázok.



$$V_0 - V_1 = \frac{1}{2} hS$$

Nakoniec jednoduchou úpravou získaných rovníc získame hľadanú hustotu:

$$\rho = \frac{S}{gV} \left(\frac{p_0 V_0}{V_0 - \frac{hS}{2}} + \rho_0 g h - p_0 \right)$$

$\boxed{40.}$ V tomto príklade by mali platiť dva zákony zachovania: zákon zachovania hybnosti a momentu hybnosti. Podľa prvého je hybnosť menšieho telesa rovnaká, ako hybnosť gule po zrážke (hybnosť rotujúcej gule je nulová). Keďže bola zrážka dokonale nepružná, po nej sa budú obe telesá pohybovať spolu. Rýchlosť gule, ktorú máme vypočítať označme u.

$$mv = (m + M)u$$

Moment hybnosti telesa, ktoré sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a má moment zotrvačnosti $J = \frac{2}{5}MR^2$ je rovný $J\omega = \frac{4\pi}{5T}MR^2$. Pre malé teleso s hmotnosťou m máme moment hybnosti $mvR\sin\alpha$, kde $R\sin\alpha$ je vzdialenosť vektorovej priamky hybnosti mv od stredu gule, vzhľadom na ktorý sme tieto momenty počítali. Celkový moment hybnosti pred zrážkou je daný ako súčet týchto dvoch s tým, že jeden bude mať záporné znamienko. Po zrážke je moment hybnosti rovný nule, lebo guľa sa prestala otáčať.

$$\frac{4\pi}{5T} MR^2 - mvR\sin\alpha = 0$$

Po dosadení za v dostaneme $u = \frac{4\pi R}{5T\sin\alpha}\frac{M}{M+m}$.

$\boxed{41.}$ Najprv predpokladajme, že sa lyžiar pohyboval po naklonenej rovine so sklonom α. Sila, ktorá pritláča jeho lyže na podložku má veľkosť $Mg\cos\alpha$, takže ak prejde vodorovnú vzdialenosť Δs, trecia sila vykoná prácu $\mu Mg\cos\alpha\,\dfrac{\Delta s}{\cos\alpha}$, zatiaľ čo jeho polohová energia sa zmenší o $Mg\Delta h$, kde Δh je pokles lyžiara zodpovedajúci vodorovnej vzdialenosti Δs. Na rovinnom svahu by teda prírastok k lyžiarovej kinetickej energii bol $\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 = Mg\Delta h - \mu Mg\Delta s$. Keďže v tomto vzťahu nevystupuje uhol α, môžeme ľubovoľný svah rozdeliť na veľa malých naklonených rovín a prírastky ku kinetickej energii sčítať. Využijeme pri tom, že súčet všetkých Δh je akurát $8m$, súčet všetkých Δs je $2m$ a celková kinetická energia E je súčtom všetkých ΔE. E teda vôbec nezávisí (!) od tvaru krivky, ale iba od celkového vodorovného a zvislého posunu. Hľadaná rýchlosť lyžiara je teda rovná $\sqrt{\frac{2E}{M}} = \sqrt{2g\,(8m - 0,4.2m)} = 11,89\,\mathrm{ms}^{-1}$.

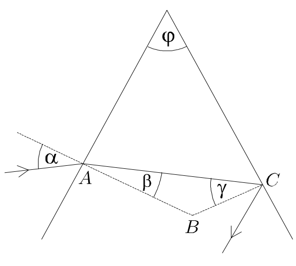
$\boxed{42.}$ Nech je pružina natiahnutá o x. Pre veľkosti zrýchlení závaží a_1 a a_2 máme teda:

$$a_1 m_1 = a_2 m_2 = xk \Longrightarrow a_1 + a_2 = xk\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = A$$

veličina A predstavuje zrýchlenie dĺžky pružiny, čo je evidentne $a_1 + a_2$. Toto zrýchlenie je priamo úmerné natiahnutiu x, konštantu úmernosti označme K. (Navyše pôsobí správnym smerom - natiahnutá pružina sa skracuje a naopak.) x teda bude periodicky sa meniaca veličina a jej periódu vypočítame podľa vzťahu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\,(m_1 + m_2)}}$$

$\boxed{43.}$



Na to, aby lúč nevyšiel z hranola cez bočnú stenu musí byť splnená podmienka $\sin\gamma \le \frac{1}{n}$. Z trojuholníka ABC dostávame, že $\beta = \varphi - \gamma$ (lebo veľkosť uhla

ABC je $180^\circ - \varphi$), odkiaľ dostávame pre $\sin\beta$ vzťah

$$\sin\beta = \sin(\varphi - \gamma) = \sin\varphi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma = \sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma} - \cos\varphi\sin\gamma$$

Použitím nerovnosti z úvodu dostávame

$$\sin\beta \le \sin\varphi\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \cos\varphi\,\frac{1}{n}$$

Pri vchádzaní lúču do hranola platí zákon lomu, z čoho dostávame

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{1} \Longrightarrow \sin\alpha = n\sin\beta \le \sin\varphi\sqrt{n^2-1} - \cos\varphi$$

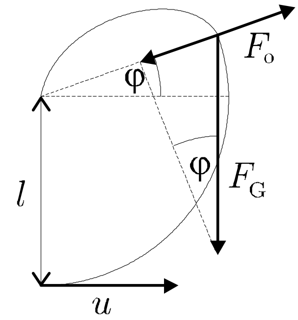
$\boxed{44.}$ Najprv zapíšeme stavovú rovnice pre prvú nádobu:

$$p_1V = n_1RT = \frac{m_1}{M}\,RT \Longrightarrow \frac{p_1}{m_1} = \frac{RT}{VM},$$

kde p_1 je tlak v prvej nádobe, V je jej objem, n_1 látkové množstvo plynu v prvej nádobe, R je mólová plynová konštanta, T je vonkajšia teplota a M mólová hmotnosť plynu. Zaujíma nás len rovnovážny stav, preto môžeme počítať stále s rovnakou teplotou (v rovnovážnom stave neprebieha tepelná výmena, teplota plynu je rovná vonkajšej teplote). Ak spojíme druhú a tretiu nádobu, polovica plynu bude v druhej, polovica v tretej nádobe. Ak teda zavrieme kohútik medzi druhou a treťou nádobou, v druhej bude plyn s hmotnosťou $\frac{m_3}{2}$. Ak otvoríme kohútik medzi prvou a druhou nádobou, v oboch sa ustáli známy tlak p, pričom na objem $2V$ pripadá hmotnosť $m_1 + \frac{1}{2}m_3$. Dostávame potom rovnicu:

$$\frac{p}{m_1+\frac{1}{2}m_3} = \frac{RT}{2VM} = \frac{p_1}{2m_1} \Longrightarrow p_1 = \frac{4m_1p}{2m_1+m_3}$$

$\boxed{45.}$



Hľadanú rýchlosť označme u. Celý pohyb bude pozostávať z dvoch častí. Pokiaľ je uhol medzi počiatočnou a okamžitou polohou špagátu menší ako $90° + \varphi$, tiažová i odstredivá sila budú špagát napínať a trajektóriou závažia bude oblúk kružnice. φ je teda uhol medzi vodorovným smerom a špagátom v okamihu, keď je sila napínajúca špagát rovná nule. Tento uhol môžeme vypočítať tak, že dáme do rovnosti veľkosť odstredivej sily a zložku tiažovej sily v smere špagátu. Rýchlosť hmotného bodu je v tejto chvíli v a môžeme ju vypočítať zo zmeny polohovej energie a z rovnováhy síl:

$$\begin{aligned} F_o &= F_G \sin\varphi \Rightarrow \frac{mv^2}{l} = mg\sin\varphi \\ \frac{1}{2}mu^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgl\left(1+\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

Z čoho:

$$\sin\varphi = \frac{u^2-2gl}{3gl},\ v^2 = \frac{u^2-2gl}{3}$$

Odkedy na hmotný bod nebude pôsobiť sila špagátu, pôjde o obyčajný šikmý vrh, takže trajektóriou bude parabola. Na začiatku tohto vrhu sa bod pohybuje rýchlosťou veľkosti v, ktorá s vodorovným smerom zviera uhol $90°-\varphi$. Ak má závažie dopadnúť do bodu závesu, musí jeho trajektória prechádzať bodom, ktorý je o $l\sin\varphi$ nižšie a vo vodorovnom smere o $l\cos\varphi$ ďalej ako miesto, v ktorom sa začne pohybovať po parabole. Ak táto časť pohybu trvá čas t, dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} l\cos\varphi &= tv\sin\varphi \Longrightarrow t = \frac{l\cos\varphi}{v\sin\varphi} \\ -l\sin\varphi &= tv\cos\varphi - \frac{1}{2}gt^2 \\ -l\sin\varphi &= \frac{l\cos^2\varphi}{\sin\varphi} - \frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\varphi}{v\sin\varphi}\right)^2 \\ -l\sin\varphi &= l\,\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin\varphi} - \frac{g}{2}\,\frac{l^2\left(1-\sin^2\varphi\right)}{v^2\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

Ak do poslednej rovnice dosadíme za $\sin\varphi$ a v, dostaneme $u = \sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)gl}$.