Kapitola 1

Zadania

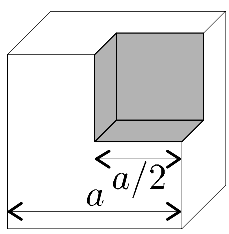
$\boxed{1.}$ Majme 2 častice veľmi ďaleko od seba pohybujúce sa rovnako veľkou rýchlosťou v v tom istom smere. Na chvíľu vytvoríme okolo nich homogénne elektrické pole. Prvá častica sa odkloní od svojho pôvodného smeru o $60°$ a zväčší svoju rýchlosť na dvojnásobok. Druhá častica sa odkloní od svojho smeru o $45°$. Aká veľká bude jej rýchlosť? Hmotnosti častíc sú m_1, m_2, náboje na nich Q_1, Q_2.

$\boxed{2.}$ Priemer kolesa bicykla je d. Predné ozubené koleso má z_1 zubov, zadné má z_2 zubov. Akou rýchlosťou v sa pohybuje bicyklista, ak frekvencia otáčania pedálov je f?

$\boxed{3.}$ Vzdialenosť medzi dvoma stanicami prešiel vlak priemernou rýchlosťou v_{str} za čas t. Rozbiehanie a brzdenie trvalo spolu t_1, zvyšný čas sa vlak pohyboval rovnomerným pohybom. Aká bola rýchlosť v vlaku počas rovnomerného pohybu? Rozbiehanie a brzdenie považujte za rovnomerne zrýchlený, resp. spomalený pohyb.

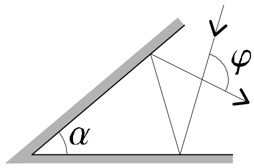
$\boxed{4.}$ Na to, aby sme udržali vozík na naklonenej rovine s uhlom α, potrebujeme silu F_1 (smerujúcu pozdĺž roviny). Aby sme ho vytiahli hore rovnomerným pohybom, potrebujeme zväčšiť silu na F_2. Aký je koeficient trenia μ medzi hranolom a naklonenou rovinou?

$\boxed{5.}$ Z kocky s dĺžkou hrany a je vyrezaná kocka s dĺžkou hrany $a/2$ (pozri obrázok). V akej vzdialenosti od stredu pôvodnej kocky sa nachádza ťažisko telesa?

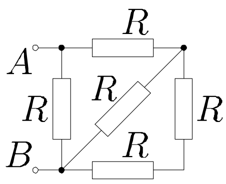


$\boxed{6.}$ Deti sa hrajú s loptou tak, že si ju prehadzujú. Do akej najvyššej výšky h vyletí lopta, ak čas, ktorý letí lopta od jedného k druhému, je t? Odpor vzduchu zanedbajte.

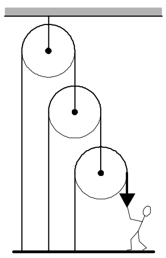
$\boxed{7.}$ Dve zrkadlá zvierajú uhol α. Dopadajúci lúč sa najskôr odrazí od prvého, potom od druhého (pozri obrázok). Aký uhol φ zviera vstupujúci a vystupujúci lúč?



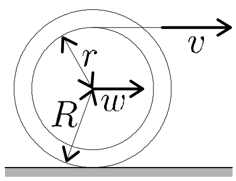
$\boxed{8.}$ Nájdite odpor medzi bodmi A, B nasledujúcej schémy.



$\boxed{9.}$ Akou silou sa musí človek hmotnosti m držať na tomto systéme kladiek?

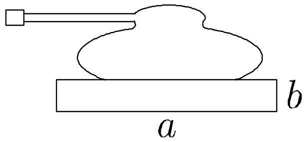


$\boxed{10.}$ Na obrázku je nakreslená cievka s niťou. Veľký polomer je R, polomer menšieho valca (na ktorom je namotaná niť) je r. Koniec nite chytíme a začneme ho ťahať rýchlosťou v. Akou rýchlosťou w sa začne pohybovať stred cievky? Cievka pri pohybe neprešmykuje.



$\boxed{11.}$ Po trati chodia v pravidelných intervaloch električky. Keď idem rýchlosťou u_1 v tom istom smere ako ony, stretávam električku každých t_1 sekúnd. Keď sa dám do behu a bežím rýchlosťou u_2 (stále v tom istom smere), časové intervaly sa zmenia na t_2 sekúnd. V akých časových intervaloch chodia električky?

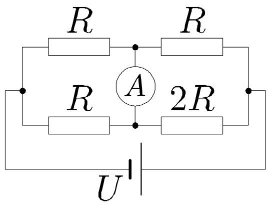
$\boxed{12.}$ Tank sa pohybuje rýchlosťou v. Aká je kinetická energia jedného jeho pásu hmotnosti m, ak pás tvorí obdĺžnik dlhý a a vysoký b?



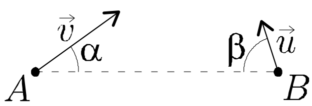
$\boxed{13.}$ Po rovine sa zotrvačnosťou pohybuje rýchlosťou v veľmi dlhý vlak hmotnosti m a dĺžky l. V jednom okamihu začne vlak stúpať do kopca so sklonom α. Postupne spomaľuje a zastaví sa presne v okamihu, keď polovica vagónov je na naklonenej rovine. Aký čas t uplynul od začiatku jeho spomaľovania?

$\boxed{14.}$ Guľa hustoty ρ pláva na rozhraní dvoch kvapalín hustôt ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Akou časťou svojho objemu je ponorená do spodnej kvapaliny?

$\boxed{15.}$ Aký prúd preteká ampérmetrom na obrázku? Ampérmeter pokladajte za ideálny.



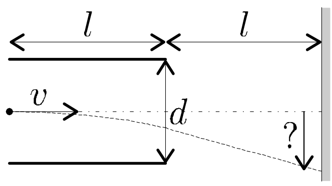
$\boxed{16.}$ Loď pláva z miesta A rýchlosťou v tak, že zviera s úsečkou AB uhol α. Pod akým uhlom β má nepriateľská loď z miesta B vypustiť rýchlosťou u torpédo, aby loď A trafila?



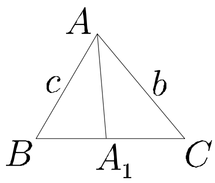
$\boxed{17.}$ Granát, ktorý bol vystrelený z dela, sa v najvyššom bode trajektórie rozletel na dva kusy rovnakej hmotnosti. Jeden úlomok sa vrátil naspäť po pôvodnej trajektórii (a teda dopadol do miesta výstrelu). Ako ďaleko od miesta vystrelenia dopadne druhý granát, ak by pôvodný granát bez výbuchu doletel do vzdialenosti l? Odpor vzduchu zanedbajte.

$\boxed{18.}$ Na dvoch protiľahlých stenách izby sú presne oproti sebe zavesené dve kruhové zrkadlá s priemerom 1 m, pričom sú od seba vzdialené 5 m. V strede medzi nimi sa nachádza pozorovateľ a pozerá sa do jedného zo zrkadiel. Koľko zrkadiel uvidí, ak jeho oko má rozlišovaciu schopnosť $1'$? (Teda pozorovateľ zbadá predmet iba ak ho pozoruje pod uhlom väčším ako $1'$). Vo výpočte rátajte s $\pi = 3,14$.

$\boxed{19.}$ Medzi dosky kondenzátora vzdialené d vletí elektrón (pozri obr.). O koľko sa odchýli jeho stopa na tienidle oproti priamej trase, ak napätie na kondenzátore je U? Počiatočná rýchlosť elektrónu je v, dĺžka dosiek l, tienidlo je vzdialené od kondenzátora tiež l.

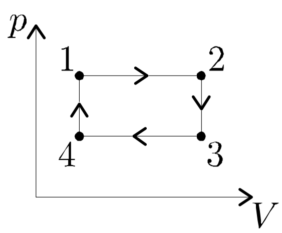


$\boxed{20.}$ Máme nehmotný trojuholník s vnútornými uhlami α, β, γ. Aké závažia máme umiestniť do vrcholov tohto trojuholníka, aby jeho ťažisko bolo v tom istom mieste ako stred jemu vpísanej kružnice?



$\boxed{21.}$ Na ťažkom vozíku je umiestnené kyvadlo zanedbateľnej hmotnosti. Keď vozík stojí, kyvadlo kmitá s periódou T. S akou periódou bude kmitať kyvadlo, ak vozík pustíme po naklonenej rovine so sklonom α? Hmotnosť kolies vozíka neuvažujte.

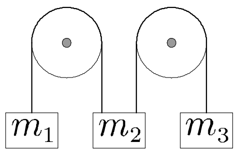
$\boxed{22.}$ Na obrázku je znázornený cyklus ideálneho plynu v grafe s premennými p a V. Prekreslite tento graf do premenných p a T.



$\boxed{23.}$ Ak by sme zastavili Zem pri jej obehu okolo Slnka, ako dlho by trvalo, kým by naň táto dopadla? Predpokladajte, že Zem obieha okolo Slnka hmotnosti M po kruhovej dráhe s polomerom R, rozmery Slnka zanedbajte.

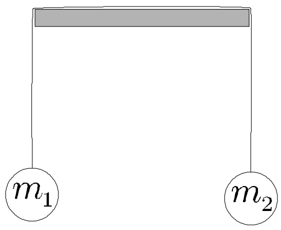
$\boxed{24.}$ Dva elektróny sa na začiatku nachádzajú od seba vo veľmi veľkej vzdialenosti. Prvý z nich má rýchlosť u smerom k druhému, druhý má rýchlosť v smerom k prvému elektrónu. Určte najmenšiu vzdialenosť, na ktorú sa počas pohybu priblížia.

$\boxed{25.}$ S akým zrýchlením sa bude pohybovať stredné závažie v sústave na obrázku?

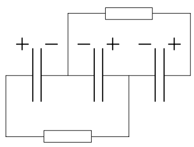


$\boxed{26.}$ V nádobe sa nachádza zmes dusíka N_2 (^{14}N) a vodíka H_2 (^{1}H). Pri teplote T, keď je dusík disociovaný na atómy, je tlak zmesi rovný p (disociáciu vodíka zanedbajte). Pri teplote $2T$, keď sú obidva plyny plne disociované, je tlak v nádobe $3p$. Určte hmotnostný pomer dusíka a vodíka v zmesi.

$\boxed{27.}$ Cez panel sú prevesené dve telesá hmotnosti m_1 a m_2. Nájdite zrýchlenie ťažiska tejto sústavy, ak zanedbáme trenie.

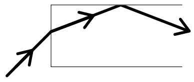


$\boxed{28.}$ Majme schému ako na obrázku. Všetky kondenzátory majú kapacitu C a na začiatku sú všetky nabité na napätie U. Polarita je taká, ako na obrázku. Aké napätia budú na kondenzátoroch v ustálenom stave?

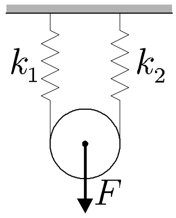


$\boxed{29.}$ Máme šošovku s ohniskovou vzdialenosťou f. Do akej vzdialenosti od šošovky máme umiestniť predmet, aby jeho obraz bol trikrát väčší?

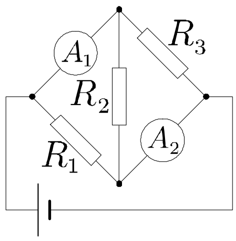
$\boxed{30.}$ Aký najmenší musí byť index lomu skla n, aby pre sklené vlákno (plný sklenený valec) platilo, že ľubovoľný lúč, ktorý sa doň cez prednú stenu dostane, z neho cez bočnú stenu nevyjde?



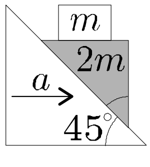
$\boxed{31.}$ Nehmotná kladka je zavesená na niti cez dve pružiny tuhosti k_1 a k_2 (pozri obrázok). O akú dĺžku sa posunie kladka, ak na ňu začneme pôsobiť silou F?



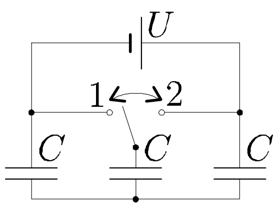
$\boxed{32.}$ Majme schému ako na obrázku. Ampérmetre ukazujú hodnoty A_1, A_2. Aký prúd prechádza ideálnou batériou, ak $R_1 = R_2$?



$\boxed{33.}$ Na obrázku je sústava hranolov (oba majú sklon 45°). Zrýchlenie väčšieho hranola udržujeme veľkosti a. Akou veľkou silou na seba pôsobia hranoly s hmotnosťami $2m$ a m? Trenie je všade nulové.

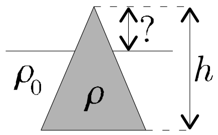


$\boxed{34.}$ Aká energia sa uvoľní v obvode, ak prepneme spínač z polohy 1 do polohy 2? Predpokladajte, že prepnutie trvá nulový čas.

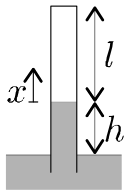


35. Guľu s objemom V, vyrobenú z tenkého papiera, naplníme horúcim vzduchom s teplotou T_2. Teplota okolitého vzduchu je T_1. Tlak vzduchu v guli a okolitý tlak sa rovnajú p. Pri akej hmotnosti m papierového obalu gule sa bude guľa zdvíhať?

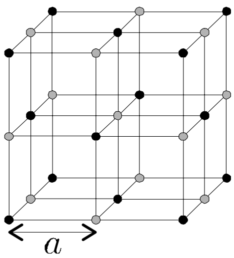
36. Ľad tvaru kužeľa s výškou h je ponorený vo vode. Ako vysoko vyčnieva nad hladinu? Ľad má hustotu ρ a voda ρ_0.



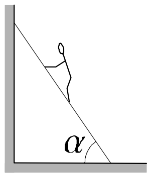
37. Pri atmosferickom tlaku rovnom p_0 bola úroveň ortute v trubici (pozri obrázok) vo výške h nad hladinou ortuti v nádobe. Výška stĺpca vzduchu nad ortuťou bola l. Zistite atmosférický tlak p vzduchu na ďalší deň, ak úroveň ortute v trubici sa zmenila o x (pre x kladné sa zvýšila, pre x záporné sa znížila). Uvažujte, že teplota bola v oba dni rovnaká.



38. Atómy kuchynskej soli NaCl sú usporiadané na striedačku v kubickej mriežke. Mólová hmotnosť soli je $M_m = 59\,\mathrm{g/mol}$, hustota soli je $\rho = 2,2\,\mathrm{g/cm^3}$. Určte priemernú vzdialenosť a medzi susednými atómami. (Výraz netreba vyčíslovať.)



39. Rebrík dĺžky l sa jedným koncom opiera o zvislú stenu, pričom jeho druhý koniec leží na vodorovnej zemi. Rebrík zviera s podložkou uhol α. Koeficient trenia medzi ním a zemou je μ, trenie so stenou je zanedbateľne malé. Aké minimálne musí byť μ, aby mohol po rebríku vyliezť chlapec o hmotnosti M až úplne hore? Hmotnosť rebríka je m.



$\boxed{40.}$ Majme dve častice veľmi ďaleko od seba, pohybujúce sa rovnako veľkou rýchlosťou v v tom istom smere. Na chvíľu vytvoríme okolo nich homogénne elektrické pole. Prvá častica sa odkloní od svojho pôvodného smeru o 60° a zväčší svoju rýchlosť na dvojnásobok. Druhá častica sa odkloní od svojho smeru o 45°. Hmotnosti telies sú m_1, m_2, náboje na nich Q_1, Q_2. Aký je vzťah medzi hodnotami m_1, m_2, Q_1, Q_2?

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Keď sa prvé teleso odchýlilo o $60°$, znamená to, že zložka rýchlosti, ktorou sa bude teleso pohybovať v pôvodnom smere, má veľkosť $2v\cos 60° = v$. To ale znamená, že v tomto smere sa vôbec nezmenila hybnosť telesa, a teda pole ho urýchľovalo iba v kolmom smere. Druhé teleso bolo tým pádom tiež urýchľované iba v kolmom smere. Pre novú rýchlosť u a pôvodnú rýchlosť v teda musí platiť (v je priemetom u do pôvodného smeru) $\frac{v}{u} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ z čoho $u = v\sqrt{2}$.

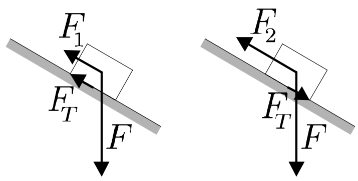
$\boxed{2.}$ Ako to u bicyklov býva, predné a zadné ozubené koleso je spojené reťazou. Tá zabezpečuje, aby bol na oboch kolesách prejdený počet zubov rovnaký. Potom je jasné, že ak sa predné ozubené koleso otočí raz, tak zadné sa otočí z_1/z_2-krát. Preto ak sa predné koleso otočí f-krát za sekundu (čo je frekvencia otáčania pedálov), tak zadné sa otočí $\frac{z_1}{z_2}f$-krát za sekundu. Jedným otočením zadného ozubeného kolesa sa bicykel pohne o vzdialenosť πd. Rýchlosť bicykla je tak nakoniec $v = \pi d\,\frac{z_1}{z_2}\,f$.

$\boxed{3.}$ Počas rozbiehania mal vlak priemernú rýchlosť $v_{p1} = (v_{za\check{c}} + v_{kon})/2 = v/2$, lebo $v_{za\check{c}} = 0$ a $v_{kon} = v$. Toto rozbiehanie trvalo čas t_{11} a vlak počas neho prešiel dráhu $s_1 = \frac{1}{2}vt_{11}$. Potom sa čas $t - t_1$ pohyboval rovnomerne rýchlosťou v a prešiel dráhu $s_2 = v(t - t_1)$. Nasledovalo brzdenie, ktoré trvalo čas t_{12} a počas ktorého sa vlak pohyboval priemernou rýchlosťou $v_{p2} = (v_{za\check{c}} + v_{kon})/2 = v/2$. Prešiel teda dráhu $s_3 = \frac{1}{2}v\,t_{12}$. Počas celého pohybu sa vlak pohyboval priemernou rýchlosťou v_{str}, prešiel preto celkovú dráhu $s = s_1 + s_2 + s_3 = v_{str}t$.

Vieme tiež, že $t_1 = t_{11} + t_{12}$. Potom

$$\begin{aligned} v_{str}t &= \frac{vt_{11}}{2} + v(t - t_1) + \frac{vt_{12}}{2}, \\ 2v_{str}t &= v\left(t - t_1 + t_{11} + t_{12}\right), \\ 2v_{str}t &= v\left(2t - t_1\right), \\ v &= 2v_{str}\,\frac{t}{2t - t_1} = 80\,\mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

$\boxed{4.}$ Trecia sila má dôležitú vlastnosť, že vždy pôsobí proti pohybu telesa. Prípadne ak je sústava v pokoji, tak pôsobí proti snahe hýbať sa tým-ktorým smerom. Keď držíme vozík na naklonenej rovine, tak nám v tom trecia sila pomáha – je orientovaná smerom hore rovnobežne s naklonenou rovinou (pozri prvý obrázok).



Ak si označíme tiažovú silu vozíka F, je jasné, že na jeho udržanie potrebujeme silu:

$$F_1 = F\sin\alpha - \mu F\cos\alpha. \tag{1}$$

Naopak, keď sa snažíme vozík vytlačiť hore, trecia sila nám v tom bráni – je orientovaná smerom dole rovnobežne s naklonenou rovinou (pozri druhý obrázok). Na jeho roztlačenie potrebujeme preto silu

$$F_2 = F\sin\alpha + \mu F\cos\alpha. \tag{2}$$

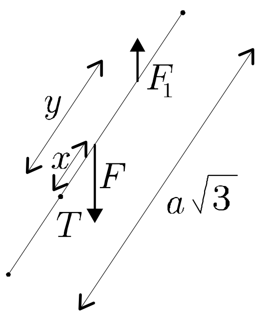
Tým sme dostali sústavu rovníc (1), (2). Ak (1) odčítame od (2) a potom (1) sčítame s (2), dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= 2F\sin\alpha, \\ F_2 - F_1 &= 2\mu F\cos\alpha. \end{aligned}$$

Tieto rovnice vydelíme a po úprave dostávame hľadaný vzťah

$$\mu = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$\boxed{5.}$ Pôvodnú kocku si môžeme predstaviť ako 8 malých kociek s hranou $a/2$ poukladaných na seba. Vyrezanie malej kocky (tak, ako je vidieť na obrázku) je to isté, ako odobratie jednej z týchto ôsmych kociek. Tiažová sila, ktorou prispievala táto kocka ku tiaži veľkej kocky, pri jej odrezaní "zmizla". To je však to isté, ako keby tam malá kocka zostala, ale objavila sa sila, ktorá presne vyruší jej tiaž. Túto silu označíme F_1 (pozri obrázok).



Výsledná tiaž našej orezanej kocky bude výslednicou tiažovej sily F pôvodnej kocky a tejto sily F_1. Tá má rovnakú veľkosť ako tiaž malej odobranej kocky, teda $F/8$. Nás v prvom rade zaujíma pôsobisko tejto výslednice, čiže ťažisko nového útvaru. To je taký bod, vzhľadom na ktorý je výsledný moment pôsobiacich síl (v našom prípade F_1 a F) nulový. Preto musí platiť

$$Fx = F_1 y \tag{1}$$

My vieme, že obe sily majú pôsobisko na telesovej uhlopriečke, ktorá ma podľa Pytagorovej vety dĺžku $\sqrt{3}\,a$. Vzdialenosť týchto pôsobísk je 1/4 z dĺžky uhlopriečky, čiže

$$y - x = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a \tag{2}$$

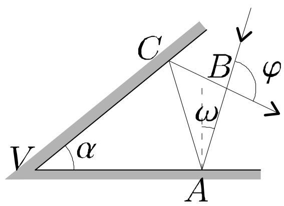
Úpravou systému rovníc (1) a (2) dostaneme vzdialenosť ťažiska od stredu kocky:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{28}\,a$$

$\boxed{6.}$ Lopta sa pohybuje šikmým vrhom (zanedbávame odpor vzduchu). Ten sa skladá z dvoch pohybov: zo zvislého vrhu nahor a vodorovného priamočiareho pohybu. Z toho je zrejmé, že za čas $t/2$ sa lopta dostane pri svojom pohybe do polovice svojej dráhy, a teda zároveň do svojho najvyššieho bodu, kde má nulovú zvislú časť rýchlosti. Zvyšný čas $t/2$ sa bude teda pohybovať vo zvislom smere voľným pádom. Preto platí

$$h = \frac{1}{2}\, g \left(\frac{t}{2}\right)^2 ,$$
$$h = \frac{gt^2}{8} .$$

$\boxed{7.}$ Označme si uhol, pod ktorým dopadá lúč na prvé zrkadlo, ω.



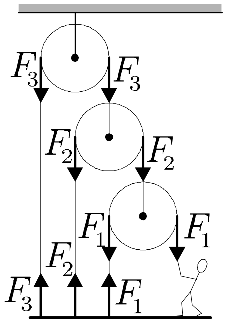
Podľa zákona odrazu $\measuredangle BAC = 2\omega$. Uhol $\measuredangle VAC$ je $90^\circ - \omega$, preto $\measuredangle ACV = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \omega = 90^\circ - \alpha + \omega$. Uhol dopadu odrazeného lúča na druhé zrkadlo je $90^\circ - \measuredangle VAC = \alpha - \omega$. Uhol CAB je dvojnásobok tohto uhla. Z vlastností trojuholníka vieme, že $\varphi = 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB$, a teda $\varphi = 180^\circ - 2\omega - 2\alpha + 2\omega$. Z toho

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha .$$

$\boxed{8.}$ Pri podrobnejšom preskúmaní situácie náhle vysvitne, že sa v podstate jedná iba o sériovo a paralelne pozapájané odpory. Ak si na chvíľu odmyslíme odpor R medzi bodmi A, B, tak odpor medzi nimi je $R + \frac{2R^2}{2R+R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$. Celkový odpor medzi A, B dostaneme ako paralelné zapojenie tohto s pôvodne odmysleným odporom R. Takto získaný výsledok je

$$\frac{\frac{5}{3}\, R^2}{\frac{5}{3}\, R + R} = \frac{5}{8}\, R .$$

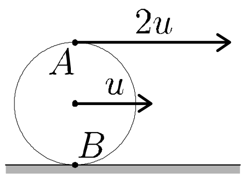
$\boxed{9.}$ Označme napätia v jednotlivých lanách T_1, T_2 a T_3 tak, ako na obrázku.



Kladky sú nehmotné, a preto pre tie, ktoré nie sú pevne ukotvené, musí platiť, že výslednica síl na ne pôsobiaca je nulová. Tým dostávame $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 2T_2 = 4T_1$. Preto ak človek ťahá za špagát silou T_1, celkovo ťahá celú sústavu smerom hore silou $T_1 + T_1 + 2T_1 + 4T_1 = 8T_1$. Na to, aby sa udržal, musí byť teda splnené

$$T_1 = \frac{mg}{8}.$$

$\boxed{10.}$ Pred tým, ako začneme riešiť samotný príklad, si treba uvedomiť nasledujúcu vec. Ak sa pohybuje valec bez prešmykovania napríklad rýchlosťou u vzhľadom na podložku, tak jeho obvodová rýchlosť je rovná tiež u – za ten istý čas prejde stred valca tú istú vzdialenosť, ako ľubovoľný bod na jeho obvode – ale v sústave spojenej so stredom valca. V sústave podložky má potom každý bod na obvode inú rýchlosť. Konkrétne bod A má rýchlosť $2u$ a bod B má nulovú rýchlosť (pozri obrázok).



Teraz pristúpme k samotnému riešeniu. V sústave spojenej so stredom cievky sa koniec nite pohybuje rýchlosťou $v - w$. Teda obvodová rýchlosť malého valca v tejto sústave je $v - w$. Obvodová rýchlosť veľkého valca v tejto sústave je w (čo sme zdôvodnili v úvode). Nakoniec si treba uvedomiť, že uhlová rýchlosť ω ich otáčania je rovnaká. Preto môžme písať

$$\begin{aligned} v - w &= r\omega, \\ w &= R\omega. \end{aligned}$$

Vydelením týchto rovníc a úpravou získame hľadaný vzťah

$$w = v\,\frac{1}{1 + \frac{r}{R}}.$$

$\boxed{11.}$ Povedzme, že sa električky pohybujú rýchlosťou v a sú od seba vzdialené o a. V sústave spojenej s chodcom sa električky pohybujú rýchlosťou $v - u_1$, resp. $v - u_2$. Pre vzdialenosť a potom môžeme písať

$$
\begin{aligned}
(v - u_1)\, t_1 &= a \Rightarrow vt_1 = a + u_1 t_1, && (1)\\
(v - u_2)\, t_2 &= a \Rightarrow vt_2 = a + u_2 t_2. && (2)
\end{aligned}
$$

Ak dáme do rovnosti prvé z rovníc (1) a (2), dostaneme $(v - u_1)\, t_1 = (v - u_2)\, t_2$, z čoho už ľahko vyjadríme rýchlosť električky ako

$$v = \frac{u_2 t_2 - u_1 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Po vydelení druhých rovníc v (1) a (2) dostaneme po úpravách vzťah

$$a = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1}\, t_2 t_1.$$

Ak chceme určiť časové intervaly v akých chodia električky, stačí vydeliť ich rýchlosť ich rozostupmi. Dostaneme

$$t = \frac{a}{v} = \frac{u_2 - u_1}{u_2 t_2 - u_1 t_1}\, t_1 t_2.$$

$\boxed{12.}$ Tento príklad sa dá vyriešiť veľmi jednoduchým spôsobom. Budeme uvažovať 4 rôzne sa pohybujúce časti pásu a zrátame jednotlivé energie. Treba si uvedomiť, že bočné časti pásu majú zvislú aj vodorovnú zložku rýchlosti veľkosti v, vrchná časť pásu má rýchlosť $2v$ a spodná časť stojí. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
E &= E_{v\text{ľ}avo} + E_{vpravo} + E_{hore} + E_{dole},\\
E &= \frac{1}{2}\,\frac{b}{2(a+b)}\, m(v^2 + v^2) + \frac{1}{2}\,\frac{b}{2(a+b)}\, m(v^2 + v^2) + \frac{1}{2}\,\frac{a}{2(a+b)}\, m(2v)^2 + 0,\\
E &= mv^2,
\end{aligned}
$$

kde $\frac{a}{2(a+b)}\, m$ je hmotnosť ľavej, resp. pravej časti pásu, $\frac{b}{2(a+b)}\, m$ je hmotnosť vrchnej časti pásu.

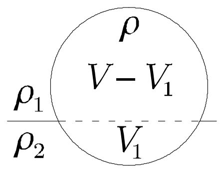
Skúste sa ale zamyslieť nad nasledujúcim riešením. Pozrime sa na celú situáciu zo sústavy spojenej s tankom. Každá časť pásu sa hýbe rýchlosťou v, energia pásu je teda $E_1 = \frac{mv^2}{2}$. Pozrime sa teraz na tank zo sústavy spojenej so zemou. Pás má dva druhy energií: jednu vyplývajúcu z pohybu ťažiska rýchlosťou v, teda $E_2 = \frac{mv^2}{2}$ a energiu rotácie pásu, ktorá má veľkosť E_1. Celková energia pásu je teda $E_1 + E_2 = mv^2$.

Poznámka: Pozor! Nebezpečenstvo! Podobné finty s kineticku energiou patria k 1. triede nebezpečnosti a častému zdroju chýb. Uvedomte si, že zmenou sústavy sa mení aj kinetická energia predmetov. Tento zdanlivý paradox, ako aj zdôvodnenie korektnosti použitého postupu, však nechávame na čitateľa. Odporúčame všimnúť si silnú analógiu s energiou telesa, ktoré koná rotačný a zároveň posuvný pohyb.

$\boxed{13.}$ Predpokladajme, že dĺžka x vlaku už je na naklonenej rovine. Na vlak teda pôsobí brzdná sila veľkosti $F = \frac{x}{l} mg \sin\alpha$ ($\frac{x}{l}m$ je hmotnosť vlaku na kopci). Tá udelí vlaku spomalenie $a = \left(\frac{1}{l} g \sin\alpha\right) x = \omega x$. Vidíme, že uvedené zrýchlenie sa mení lineárne v závislosti od x. To znamená, že ide o vzťah známy z pohybu harmonického oscilátora (teraz je tým oscilátorom vlak!). Jeho periódu vypočítame pomocou vzorca $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kde $\omega = \sqrt{g \sin\alpha / l}$. Čas, ktorý nás zaujíma, tvorí zrejme $\frac{1}{4}$ periódy, čo je

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{g \sin\alpha}{l}}}.$$

$\boxed{14.}$ Hľadáme pomer objemu ponorenej časti a celkového objemu gule. Na guľu pôsobia dve sily: tiažová a nejaká vztlaková. V prvom rade si treba uvedomiť, prečo na telesá v kvapalinách pôsobí vztlaková sila. V kvapalinách pôsobí hydrostatický tlak. Ten je priamo úmerný hĺbke. Keď ponoríme nejaké teleso do vody, na jeho vrchnú aj spodnú stranu pôsobí kvapalina hydrostatickým tlakom. Keďže spodná strana je nižšie ako vrchná, dole je väčší tlak, a tak sa objaví vzlaková sila. (Problém nastáva pri telesách, ktoré "nemajú spodnú stranu", napríklad preto, lebo sa ňou dotýkajú dna.) Vráťme sa teraz k našej guli. Tú si môžeme v predstavách rozrezať hladinou spodnej kvapaliny na dve časti tak, ako na obrázku.

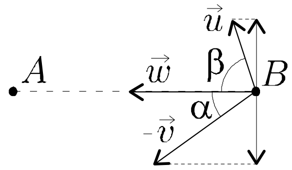


Dolná časť je ponorená do ťažšej kvapaliny a pôsobí na ňu vztlaková sila F_{vz2}. Horná je síce ponorená do kvapaliny, ale nie svojou spodnou stranou (tou sa dotýka druhej časti pôvodnej gule). Zdalo by sa, že tu máme problém, ale nie je to tak. Podľa Pascalovho zákona sa tlak, ktorým pôsobí horná kvapalina na spodnú, prenáša do celého objemu spodnej kvapaliny. Pôsobí teda aj na dolnú časť gule a cez ňu aj na hornú časť. Tým sa vlastne ruší problém s neponorením a na hornú časť pôsobí vzlaková sila F_{vz1}. Na hornú aj dolnú časť pôsobia tiažové sily, ktorých súčet je rovný tiaži pôvodnej gule. Keďže je guľa v pokoji, sily sú v rovnováhe a platí

$$\begin{aligned} F_g &= F_{\mathrm{vz1}} + F_{\mathrm{vz2}}, \\ V\rho g &= (V - V_1)g\rho_1 + V_1 g\rho_2, \\ V\rho &= V\rho_1 - V_1\rho_1 + V_1\rho_2, \\ V(\rho-\rho_1) &= V_1\left(\rho_2-\rho_1\right), \\ \frac{V_1}{V} &= \frac{(\rho-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)}. \end{aligned}$$

$\boxed{15.}$ Ampérmeter má nulový odpor, spojenie uzlov medzi ktorými je zapojený do jedného bodu preto nezmení celkový odpor sústavy. Celé zapojenie si potom môžeme predstaviť ako paralelne zapojené odpory R a R a v sérii za nimi paralelne zapojené R a $2R$. Odpor takejto sústavy je $\frac{R}{2}+\frac{2R^2}{2R+R}=\frac{7}{6}R$ a tečie ňou prúd $\frac{6}{7}\frac{U}{R}=I$. Tento sa rozdelí medzi R a R rovnomerne – oboma odpormi potečie $I/2$. Medzi R a $2R$ sa rozdelí tak, aby napätia na oboch odporoch boli rovnaké, teda v obrátenom pomere ich veľkostí. Cez odpor R potečie prúd veľkosti $\frac{2}{3}I$ a cez $2R$ potečie $\frac{1}{3}I$. Takto sme vypočítali prúdy tečúce jednotlivými vetvami obvodu. Vráťme sa však k jeho pôvodnému tvaru s ampérmetrom. Cez ten musí pretekať taký prúd I_A, ktorý zabezpečí práve takéto prerozdelenie prúdov: ak cez spodný odpor veľkosti R tečie prúd $I/2$ a cez spodný odpor veľkosti $2R$ tečie $I/3$, smerom hore muselo odísť $I_A = I/2 - I/3 = I/6$. Ak dosadíme vyjadrenie prúdu I, máme konečne výsledok v tvare $I_A = U/7R$.

$\boxed{16.}$ Skúsme sa vžiť do úlohy námorníka na lodi A, ktorý pozoruje torpédo – spojme vzťažnú sústavu s loďou A. Tá sa pohybuje vzhľadom na vodu rýchlosťou $\overrightarrow{v}$. Ak chceme nájsť rýchlosť torpéda v novej vzťažnej sústave, musíme od vektora jeho rýchlosti vzhľadom na vodu odpočítať tento vektor $\overrightarrow{v}$. Naše torpédo bude mať teda vzhľadom na loď rýchlosť $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.



Aby torpédo trafilo loď, musí tento vektor $\overrightarrow{w}$ smerovať priamo na ňu. Inak povedané, zložky vektorov $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{u}$ v smere osi y (pozri obrázok) sa musia navzájom "vynulovať", teda

$$\begin{aligned} u\sin\beta &= v\sin\alpha, \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{v}{u}\sin\alpha\right). \end{aligned}$$

$\boxed{17.}$ Keďže odpor vzduchu zanedbávame, ide o šikmý vrh. Preto dôjde k výbuchu vo vodorovnej vzdialenosti $l/2$ od miesta výstrelu. Tu mal granát tesne pred výbuchom len vodorovnú rýchlosť, označme ju v. Aby sa jeden úlomok vrátil po pôvodnej trajektórii, musí pri výbuchu získať rýchlosť veľkosti v, ale opačného smeru ako mal pôvodný granát. Teraz použime zákon zachovania hybnosti. Ak označíme hmotnosť granátu $2M$, jeho hybnosť pred výbuchom je $2Mv$. Po výbuchu má jedna jeho polovica hybnosť $-Mv$. Akú rýchlosť u má druhá polovica granátu? Takú, aby celková hybnosť ostala nezmenená, aby platilo $Mu - Mv = 2Mv$, odkiaľ $u = 3v$. Dopredu letiaci úlomok má teda rýchlosť $3v$. Oba úlomky budú letieť rovnaký čas, pretože padajú na zem z rovnakej výšky. Vo vodorovnom smere sa budú pohybovať rovnomerne priamočiaro – jeden s rýchlosťou v, druhý $3v$. Z toho je zrejmé, že kým sa prvý vráti o $l/2$ do miesta výstrelu, ten druhý preletí trikrát väčšiu vzdialenosť, a teda prejde dráhu $3l/2$. Od miesta výstrelu preto dopadne do vzdialenosti $l/2 + 3l/2 = 2l$.

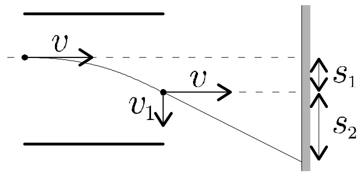
Existuje však jednoduchší spôsob, ako daný príklad vyriešiť. Stačí si uvedomiť, že granát sa rozpadol pôsobením len vnútorných síl. Preto sa bude ťažisko celej sústavy pohybovať po trajektórii, po akej by išiel granát bez výbuchu, dopadne teda do vzdialenosti l od miesta výstrelu. (Tento poznatok je ekvivalentný so zákonom zachovania hybnosti.) Oba úlomky budú padať rovnaký čas, prvý úlomok dopadne (podľa zadania) do miesta výstrelu, ťažisko dopadne do vzdialenosti l, a preto druhý úlomok dopadne do vzdialenosti $2l$.

$\boxed{18.}$ Najprv si rozanalyzujme, čo vlastne pozorovateľ v zrkadlách uvidí. Kvôli prehľadnosti budeme zo zápisov vynechávať jednotky. Takže v prvom rade uvidí obraz zrkadla, ktoré má za chrbtom vo vzdialenosti $2,5 + 5 = 7,5$. Tento obraz sa zobrazí zrkadlom, ktoré má pozorovateľ za chrbtom na druhý obraz vo vzdialenosti $2,5+5+5 = 12,5$ (ale neuvidí ho, lebo vznikne za jeho chrbtom). Ten sa zobrazí zrkadlom, ktoré je pred ním, na ďalší obraz vo vzdialenosti $2,5+5+5+5 = 17,5$. Tento sa zase zobrazí... atď. Pozorovateľ by teda potenciálne videl nekonečne veľa obrazov v rovnomernom zástupe s rozostupmi 10 m. My musíme zistiť, v akej vzdialenosti ešte vôbec zrkadlo uvidí (rozozná). Nech je zrkadlo vo vzdialenosti l. Potom ho pozorovateľ pozoruje pod uhlom $1\,\mathrm{m}/l$. Aby bol tento uhol väčší ako $1'$, musí byť

$$l < \frac{1\,\mathrm{m}}{1'} = \frac{1\,\mathrm{m}}{\frac{2\pi}{360.60}} = 3439,5\ \mathrm{m}.$$

Do tejto vzdialenosti sa nachádza $\left\lfloor \frac{3439{,}5-7{,}5}{10} \right\rfloor = 343$ obrazov.

$\boxed{19.}$



Medzi doskami kondenzátora sa nachádza elektrické pole s intenzitou $E = U/d$. Sila, ktorá pôsobí na elektrón v takomto poli, je $F = eE = eU/d$ a má na začiatku smer kolmý na rýchlosť elektrónu. Ten preletí cez kondenzátor za čas $t = l/v$. Jeho pohyb medzi doskami kondenzátora sa však bude skladať z dvoch pohybov, rovnomerného smerom dopredu a rovnomerne zrýchleného smerom kolmým na pôvodný smer so zrýchlením $a = F/m = eU/md$. Za čas t bude veľkosť rýchlosti druhého pohybu $v_1 = at = \frac{eUl}{mdv}$ a elektrón zatiaľ prejde smerom kolmo na pôvodnú rýchlosť v dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}\left(\frac{l}{v}\right)^2 .$$

Po tom, ako elektrón vyletí z kondenzátora, sa bude pohybovať rovnomerne priamočiaro. Čas trvania tohto pohybu je zrejme znova $t = l/v$ a počas toho sa elektrón pohybuje smerom od priamej trasy rýchlosťou v_1. Odchýli sa teda od pôvodnej trasy o ďalších

$$s_2 = \frac{l}{v}\frac{eUl}{mdv} = \frac{eUl^2}{mdv^2}.$$

Celková odchýlka oproti priamej trase bude rovná

$$s = s_1 + s_2 = \frac{3}{2}\frac{eUl^2}{mdv^2}.$$

$\boxed{20.}$ Nech sa náš trojuholník volá ABC, vo vrcholoch má závažia m_A, m_B a m_C a strany má označené klasicky a, b, c. Stred vpísanej kružnice leží na priesečníku osí uhlov. To znamená, že ak má splývať s ťažiskom, musia byť osi uhlov ťažnice (t.j priamky prechádzajúce ťažiskom). Pozrime sa napríklad na os uhla prechádzajúcu vrcholom A. Nech táto pretína protiľahlú stranu v bode A_1. Vieme, že $|BA_1| / |CA_1| = b/c$. Kto to nevie, nech si zapíše sínusovú vetu pre trojuholníky ABA_1 a ACA_1, a už to vie. Ťažnica z bodu A bude deliť úsečku

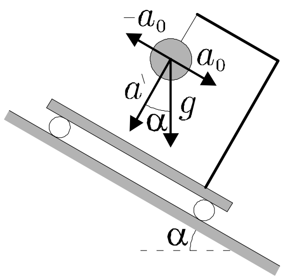
BC v pomere $m_B : m_C$. To znamená, že aby táto ťažnica bola zároveň osou uhla, musí platiť:

$$\frac{m_B}{m_C} = \frac{b}{c}.$$

Podobnou úvahou dostávame vzťahy $m_A/m_B = a/b$ a $m_A/m_C = a/c$. Z toho použitím sínusovej vety získame

$$m_A : m_B : m_C = a : b : c \; = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

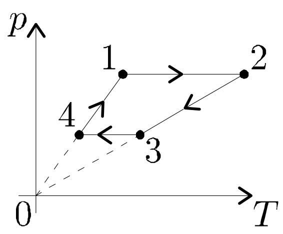
$\boxed{21.}$ Skúsme sa zamyslieť, čo spôsobuje kmitanie kyvadla. Je to vonkajšia sila (t.j. nie sila pochádzajúca od ťahovej sily závesu kyvadla), ktorá pôsobí na kyvadlo vo vzťažnej sústave s ním spojenej. Táto sila vyvoláva zrýchlenie telesa a. (Znovu zdôrazňujeme, že nás nezaujíma ťahová sila závesu. Preto sa teleso v konečnom dôsledku nepohybuje zrýchlením a. Je to podobné, ako keď máme normálne kmitajúce kyvadielko bez vozíka – pôsobí naň zrýchlenie g, aj keď ono sa pohybuje všelijako, len nie so zrýchlením g.) Perióda kmitavého pohybu je potom $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}$. Naša sústava spojená s kyvadlom sa pohybuje smerom nadol po naklonenej rovine so zrýchlením $a_0 = g\sin\alpha$. Aké zrýchlenia (sily) pôsobia na telesá v sústave pevne spojenej s vozíkom? Zrejme to bude gravitačné zrýchlenie g. Ďalej musíme zarátať zotrvačné zrýchlenie veľkosti $-a_0$. Výslednica týchto dvoch zrýchlení bude novým zrýchlením, ktoré spôsobuje kmitanie kyvadla. Tiažové zrýchlenie si rozložme na dve zložky – kolmú na podložku a s ňou rovnobežnú.



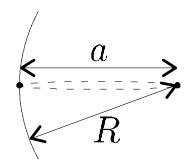
Vidíme, že zrýchlenie rovnobežné s podložkou a zrýchlenie, ktoré udeľuje zotrvačná sila, sa navzájom vynulujú. Zostáva teda zložka kolmá na podložku, ktorá má veľkosť $a' = g\cos\alpha$. Perióda kmitov na naklonenej rovine bude teda

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} = \frac{T}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

$\boxed{22.}$ Zo stavu 1 do stavu 2, resp. z 3 do 4, prechádza plyn izobarickým dejom (dejom s konštaným tlakom). V premenných p, T bude preto tento dej v grafe predstavovať tiež vodorovná čiara. Už si treba len uvedomiť, že pri konštantnom tlaku s rastúcim objemom teplota narastá a so zmenšujúcim sa objemom klesá (pozri obrázok). Deje z 2 do 3, resp. zo 4 do 1 sú izochorické (s konštantným objemom). Zo stavovej rovnice pre ne platí $p = konšt. \times T$, pričom konštanta je daná objemom. Ide teda o rovnicu priamky, ktorá má rôzny sklon podľa toho, aká je konštanta, ale vždy prechádza nulou (pozri obrázok).



$\boxed{23.}$ Na chvíľu uvažujme, že Zem nezastavíme úplne, ale necháme jej malú rýchlosť. Bude sa potom pohybovať po elipse s hlavnou poloosou o niečo väčšou ako $R/2$ (pozri obrázok).



Ak budeme túto rýchlosť stále zmenšovať, bude sa hlavná poloos čím ďalej, tým viac blížiť k $R/2$. S dostatočnou dávkou abstrakcie si môžeme predstaviť, že ak Zem zastavíme, bude sa pohybovať po elipse s hlavnou poloosou $R/2$. Potom z tretieho Keplerovho zákona $T^2/a^3 = konšt.$ (T je perióda obehu, a je hlavná poloos) dostaneme pre dobu pádu t,

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{R^3} &= \frac{t^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^3}, \\ t &= \frac{T}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

pričom teraz je T perióda obehu Zeme okolo Slnka, čiže jeden rok. Číselne je t rovné cca 129 dní.

$\boxed{24.}$ Celý fígeľ je pozrieť sa na situáciu zo správnej sústavy. V tomto prípade je to sústava spojená s ťažiskom oboch elektrónov. Prečo? (Nasleduje

REKLAMA na ťažiskovú sústavu.) Ťažisko izolovanej sústavy sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom, v tejto sústave teda nevznikajú žiadne zotrvačné sily. Keďže sa ťažisko hýbe úplne nezávisle od toho, čo sa deje s elektrónmi, môžeme v jeho sústave pokojne rátať kinetickú energiu elektrónov pomocou klasického vzorca $E = mv^2/2$, kde v je rýchlosť telesa v ťažiskovej sústave. Ale to ešte stále nie je všetko! V tejto sústave majú oba elektróny rovnako veľkú, opačne orientovanú hybnosť. To znamená, že v istom momente budú musieť na chvíľu zastať. V tomto okamihu majú nulovú kinetickú energiu. Podľa zákona zachovania energie musia mať teda vtedy maximálnu potenciálnu enegiu. A to je práve okamih, keď budú elektróny najbližšie k sebe.

Tak poďme rátať: Kladným smerom budeme označovať smer od prvého elektrónu k druhému. Prvý elektrón má rýchlosť u, druhý $-v$. Z toho rýchlosť ťažiska je $(um - vm)/(m + m) = (u - v)/2$, kde m je hmotnosť elektrónu. Rýchlosti elektrónov vzhľadom na ťažisko budú $v_1 = u - (u - v)/2 = (u + v)/2$ a $v_2 = -v - (u - v)/2 = -(u + v)/2$. No a to je práve ten sľubovaný zázrak, rýchlosti (a teda aj hybnosti) nám vyšli rovnako veľké, ale opačne orientované. Kinetická energia elektrónov je teda

$$E_k = 2\,\frac{m\,\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}{2}.$$

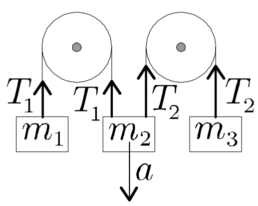
Ich potenciálna energia bola na začiatku nulová (ak nulovú hladinu zvolíme v nekonečne). Keď budú od seba vzdialené r, tak bude mať veľkosť $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{e^2}{r}$. Zo zákona zachovania energie teda plynie rovnica

$$m\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{e^2}{r},$$

z čoho

$$r = \frac{m\,(u+v)^2\,\pi\varepsilon}{e^2}.$$

$\boxed{25.}$ Všetky tri závažia sa budú zrejme pohybovať rovnako veľkým zrýchlením, pričom stredné sa bude hýbať v opačnom smere ako krajné závažia. Označme veľkosť tohto zrýchlenia a. Budeme predpokladať, že stredné závažie klesá.



Ak označíme napätia v lanách T_1 a T_2, môžeme pre závažia zapísať pohybové rovnice

$$\begin{aligned} T_1 - m_1 g &= m_1 a, \\ m_2 g - T_1 - T_2 &= m_2 a, \\ T_2 - m_3 g &= m_3 a. \end{aligned}$$

Riešením týchto rovníc dostávame

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

$\boxed{26.}$ Plyn považujeme za ideálny. Zo stavovej rovnice pre prvú situáciu, keď je disociovaný len dusík, platí

$$pV = NkT = (2N_{\mathrm{N_2}} + N_{\mathrm{H_2}})\,kT, \qquad (1)$$

kde N je celkový počet častíc a $N_{\mathrm{N_2}}$, resp. $N_{\mathrm{H_2}}$ je počet molekúl dusíka, resp. vodíka. Pre druhú situáciu platí

$$3pV = Nk2T = (2N_{\mathrm{N_2}} + 2N_{\mathrm{H_2}})\,k2T, \qquad (2)$$

keďže sú disociované už oba plyny. Vydelením rovnice (2) rovnicou (1) dostaneme

$$3 = \frac{2N_{\mathrm{N_2}} + 2N_{\mathrm{H_2}}}{2N_{\mathrm{N_2}} + N_{\mathrm{H_2}}}\,2.$$

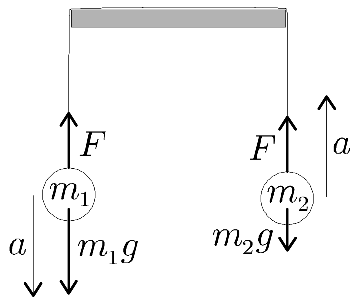
Z toho po menších úpravách zistíme, že molekúl vodíka bolo dvakrát viac ako molekúl dusíka

$$N_{\mathrm{H_2}} = 2N_{\mathrm{N_2}}.$$

Keďže je dusík 14-krát ťažší ako vodík, bude ich hmotnostný pomer rovný

$$\frac{m_{\mathrm{H_2}}}{m_{\mathrm{N_2}}} = \frac{1}{7}.$$

$\boxed{27.}$ Keďže trenie zanedbávame, celú úlohu si môžeme predstaviť ako dve telesá zavesené na kladke. Závažia sa po uvoľnení začnú pohybovať so zrýchlením a. Ľahšie nahor, ťažšie nadol. Povedzme, že $m_1 > m_2$. V lane pritom vznikne ťahová sila veľkosti F.



Pohybové rovnice našich telies budú podľa obrázka

$$\begin{aligned} m_1g - F &= m_1a, \\ -m_2g + F &= m_2a. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme celkové zrýchlenie sústavy $a = g\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$. Pre polohu ťažiska ľubovoľnej sústavy r_T platí

$$r_T = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i},$$

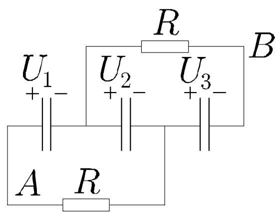
kde m_i a r_i sú hmotnosti, resp. polohy jej bodov. Pre jeho zrýchlenie platí analogicky

$$a_T = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i}.$$

Konkrétne pre našu sústavu dostávame

$$a_T = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i} = \frac{m_1a + m_2(-a)}{m_1 + m_2} = a\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

$\boxed{28.}$ Označme hľadané napätia U_1, U_2, U_3 tak, ako na obrázku, pričom kladný náboj nech je vždy na ľavej doske (ak potom dostaneme vo výsledku záporné číslo bude to znamenať, že to znamienko má byť v skutočnosti opačné).



V tých častiach obvodu, ktoré sú fyzicky oddelené od ostatných, musí platiť zákon zachovania náboja (nemôže v nich vznikať ani zanikať žiaden náboj). V našom prípade máme: Pre vodič A platí

$$UC + UC - UC = U_1C + U_3C - U_2C. \tag{1}$$

Pre vodič B zase

$$-UC - UC + UC = -U_1C - U_3C + U_2C. \tag{2}$$

Toto sú identické rovnice (stačí jednu vynásobiť číslom -1 a dostaneme druhú). Preto v riešení použijeme iba jednu z nich. Ešte zapíšeme druhé Kirchhoffove zákony pre slučky A, B. V našom prípade majú tvar

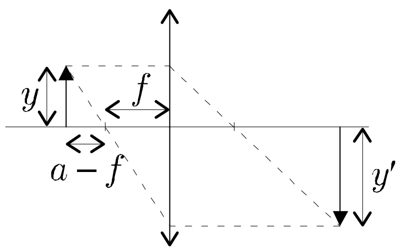
$$U_1 + U_2 = 0, \tag{3}$$
$$U_2 + U_3 = 0. \tag{4}$$

Teraz stačí zobrať rovnice (3), (4) a jednu z rovníc (1), (2) a vyriešiť takto získanú sústavu. Tak získame

$$U_1 = -U_2 = U_3 = \frac{U}{3}.$$

Na záver už len podotkneme, že odpory nemajú na tieto rovnice žiaden vplyv, pretože skúmame ustálený stav, kedy sú všetky prúdy nulové.

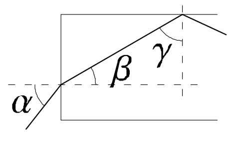
$\boxed{29.}$ Z obrázka (použitím podobnosti trojuholníkov) vidíme, že $y/y' = (a-f)/f$.



Ďalej podľa zadania úlohy vieme, že $y' = 3y$, takže dostávame

$$\frac{y}{3y} = \frac{a-f}{f} \Longrightarrow f = 3a - 3f \Longrightarrow a = \frac{4}{3}f.$$

$\boxed{30.}$ Najprv skúmajme, pod akým uhlom môže vlastne lúč vstúpiť do skleného vlákna. Predpokladajme, že lúč dopadá na sklené vlákno pod uhlom dopadu α a uhol lomu je β.



Zo zákona lomu máme: $\sin\alpha/\sin\beta = n$, z čoho $\sin\beta = \sin\alpha/n$. Zároveň je $\sin\alpha < 1$, preto platí

$$\sin\beta < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Ak lúč vletí do vlákna pod uhlom β, na bočnú stenu narazí $\gamma = 90° - \beta$. Aby nastal úplný odraz (a lúč nevyletel von), musí platiť $\sin(90° - \beta) > 1/n$, teda

$$\cos\beta > \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Poďme skúmať hraničný prípad, keď v (1) a (2) nastáva rovnosť, vtedy $\sin\beta = 1/n = \cos\beta$. (Hraničný prípad popisuje situáciu, keď lúč dopadne na vlákno pod uhlom $\alpha = 90°$ a po prvom náraze na bočnú stenu vyjde z vlákna, ale zase pod uhlom lomu 90° – ak by sme zvolili trochu menší uhol dopadu α, lúč by už ostal vo vlákne.) Z rovnosti $\sin\beta = \cos\beta$ plynie (umocníme na druhú a použijeme $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$) $\sin\beta = \sqrt{2}/2$, čiže

$$n = \sqrt{2}.$$

Nám zrejme vyhovujú indexy lomu väčšie ako táto hodnota.

$\boxed{31.}$ Nech sa jedna pružina predĺži o Δx_1, druhá o Δx_2. Potom platí

$$F = k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2.$$

Keďže sú pružiny spojené cez kladku, napätie v nitiach je rovnaké, t.j. $k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2$. Kladka sa posunie o Δh, pre ktoré platí:

$$\Delta h = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}.$$

Skombinovaním získaných vzťahov dostaneme pre Δh vzťah

$$\Delta h = \frac{F\,(k_1 + k_2)}{4k_1k_2}.$$

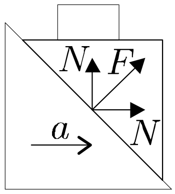
$\boxed{32.}$ Označme hľadaný prúd I a napätie na batérii U. Ampérmetre majú zanedbateľný odpor, to znamená, že ľubovoľný ampérmeter môžeme zo zapojenia vynechať, a jeho konce spojiť do jedného bodu. Z hľadiska prechádzajúcich prúdov vlastne ide o tri paralelne zapojené odpory. Ampérmeter A_1 ukazuje súčet prúdov, ktoré idú cez R_2 a R_3, A_2 ukazuje súčet prúdov cez R_1 a R_2. Tak ľahko zistíme, že

$$A_1 = \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}, \quad A_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \quad I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}.$$

Ak uvážime, že $R_1 = R_2$, tak

$$I = A_1 + \frac{A_2}{2}.$$

$\boxed{33.}$ Označme F veľkosť sily, ktorou pôsobí veľký hranol na teleso s hmotnosťou $2m$. Jej priemety do vodorovného a zvislého smeru nech majú veľkosť N (rovina má sklon 45°, preto budú obe rovnako veľké).

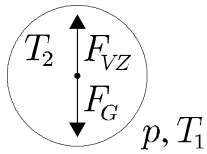


Označme a_v a a_z zrýchlenia, ktorými sa v dôsledku pôsobenia sily F pohybuje teleso hmotnosti $2m$ vo vodorovnom, resp. zvislom smere. Kladné smery týchto zrýchlení zvoľme doprava a hore. Potom $a_z = N/3m$ a $a_v = N/2m$ (sila N v druhej rovnici nerozbieha horné teleso, preto tu vystupuje iba $2m$). Pozrime sa teraz na celú situáciu zo sústavy pevne spojenej s veľkým hranolom. Sily, ktoré pôsobia na hranol hmotnosti $2m$ vyvolávajú štyri rôzne zrýchlenia. Gravitácia udeľuje zrýchlenie g nadol, zotrvačná sila zrýchlenie a doľava (má pôvod v neinerciálnej sústave, do ktorej sme sa preniesli) a ostávajú aj už spomínané zrýchlenia a_z a a_v. Lenže v tejto sústave sa teleso môže pohybovať iba v smere naklonenej roviny (má sklon 45°), na ktorej je položené, čiže $a_z - g = a - a_v$. Riešením tejto rovnice dostávame $N = \frac{6}{5}m(a+g)$. Po dosadení do horeuvedeného vzťahu pre a_z dostaneme $a_z = \frac{2}{5}(a+g)$. Už si len stačí uvedomiť, že obe telesá (m aj $2m$) sa musia pohybovať rovnakým zrýchlením. Potom je zrejmé, že aby sa teleso s hmotnosťou m pohybovalo týmto zrýchlením, musí naň pôsobiť sila veľkosti

$$\frac{2}{5}m(a+g).$$

$\boxed{34.}$ V polohe 1 vytvára ľavý kondenzátor spolu so stredným paralelné zapojenie s kapacitou $2C$. Napätie na týchto dvoch kondenzátoroch preto musí byť rovnaké. Napätie zdroja sa rozloží medzi sústavu tvorenú paralelným zapojením ľavého a stredného kondenzátora a pravým kondenzátorom v obrátenom pomere ich kapacít. Na sústavu ľavého a stredného kondenzátora pripadne napätie $U/3$, na pravý napätie $2U/3$. (Toto rozdelenie napätia vyplýva zo zákona zachovania náboja medzi kondenzátormi – ako hovorí jedno staré príslovie: "kto neverí, ráta".) Pri prepnutí spínača do polohy 2 sa akoby vymenia napätia na ľavom a pravom kondenzátore, napätie na strednom ostáva nezmenené. Nemení sa teda ani celková energia kondenzátorov. Všetka práca, ktorú zdroj pri prepnutí vykonal, sa preto musí premeniť na teplo. Aká veľká je táto práca? Napätie na ľavom kondenzátore sa zmenilo z $U/3$ na $2U/3$. Zdrojom teda pretiekol náboj veľkosti $2UC/3 - UC/3 = UC/3$. Napätie na zdroji je U, celková práca zdroja, ako aj teplo uvoľnené v obvode, má teda veľkosť $U^2C/3$

35. Na našu guľu pôsobia dve protichodné sily: vztlaková F_{vz} a tiažová sila F_G (pozri obrázok).



Na to, aby sa guľa začala dvíhať, treba splniť podmienku

$$F_{vz} - F_G > 0.$$

Tiažová sila zahŕňa tiaž papierového obalu a tiaž vzduchu obsiahnutého v ňom, preto

$$F_G = mg + V\rho_{T_2}g,$$

kde ρ_{T_2} je hustota vzduchu v guli. Vztlaková sila je podľa známeho vzťahu rovná

$$F_{vz} = V\rho_{T_1}g,$$

kde ρ_{T_1} je hustota vzduchu mimo gule. Skombinovaním týchto rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} V\rho_{T_1}g - \left(mg + V\rho_{T_2}g\right) &> 0, \\ V\left(\rho_{T_1} - \rho_{T_2}\right) - m &> 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ešte potrebujeme poznať závislosť hustoty od teploty. Na to, aby sme ju zistili, budeme uvažovať, že vzduch v guli aj mimo nej je ideálny plyn. Potom stavovú rovnicu $pV = NkT$ (N je celkový počet častíc plynu) môžeme prepísať pomocou mólovej hmotnosti M_m (táto udáva, koľko váži jeden mól plynu). Pre M_m platí $M_m = \frac{N_A}{N}m$, kde m je hmotnosť plynu s N časticami a N_A je Avogadrovo číslo (udáva počet častíc v jednom móle plynu). Odtiaľ máme $N = mN_A/M_m$. Ak tento vzťah dosadíme do stavovej rovnice a využijeme rovnosť $R = N_Ak$, dostaneme

$$\begin{aligned} pV &= \frac{N_A}{M_m} mkT, \\ p &= \frac{m}{V} \frac{R}{M_m} T, \\ \rho &= \frac{M_m p}{R} \frac{1}{T}. \end{aligned} \tag{2}$$

Tým sme získali potrebnú závislosť hustoty od teploty. Nakoniec dosadíme (2) do (1) a po niekoľkých úpravách dostaneme

$$m < \frac{M_m pV}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

$\boxed{36.}$ Nad hladinou sa nachádza opäť kužeľ (jeho objem označme V, výšku l), ktorý je podobný s veľkým kuželom v pomere l/h. Vieme, že potom sú ich objemy v pomere

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{l}{h} \right)^3$$

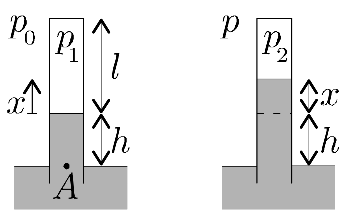
(V je objem celého kužeľa). Na kužeľ pôsobia dve sily: vztlaková sila nahor, tiažová nadol. Keďže sa kužeľ nepohybuje, veľkosti týchto síl sa rovnajú. Preto platí

$$V\rho g = (V - V_1)\rho_0 g.$$

Z toho vyjadríme

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0} = \left(\frac{l}{h} \right)^3, \\ l &= h \sqrt[3]{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}. \end{aligned}$$

$\boxed{37.}$ Označme si tlak v trubici v prvý deň p_1 (pozri prvý obrázok). Na druhý deň sa zmení výška v trubici o x a tlak v trubici sa zmení na p_2 (pozri druhý obrázok).



Keďže je hladina v trubici v rovnováhe, musí v mieste A byť splnená rovnosť tlakov. Preto postupne v prvý a v druhý deň platí

$$\begin{aligned} \rho h g + p_1 &= p_0, &(1)\\ \rho\,(h+x)\,g + p_2 &= p. &(2)\end{aligned}$$

Teraz je potrebné zistiť vzťah medzi p_1 a p_2. Keďže sa teplota nezmenila, môžeme zmenu považovať za izotermickú. Preto

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2,\\ p_2 &= p_1\,\frac{l}{l-x}.\end{aligned}$$

Toto dosadíme do (2), potom z (1) vyjadríme p_1 a dosadíme do vzniknutého vzťahu. A upravujeme a upravujeme...

$$\begin{aligned} p &= \rho\,(h+x)\,g + p_1\,\frac{l}{l-x},\\ p &= \rho\,(h+x)\,g + (p_0 - \rho h g)\,\frac{l}{l-x},\\ p &= p_0\,\frac{l}{l-x} + \rho x g - \rho h g\,\frac{x}{l-x}.\end{aligned}$$

$\boxed{38.}$ Počet mólov, ktorému zodpovedá $2{,}2\,\mathrm{g}$ soli, je $\frac{\rho\times 1\,\mathrm{cm}^3}{M_m}$. Počet molekúl NaCl v jednom móle je N_A (Avogadrovo číslo). Potom počet atómov v cm^3 kuchynskej soli je

$$2\,\frac{\rho}{M_m}\,N_A = N.$$

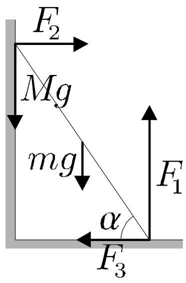
Násobenie dvoma je nutné, pretože neberieme molekulu NaCl, ale počítame atómy Na a Cl osobitne. Teraz si už len stačí uvedomiť, že na jeden atóm pripadá v kubickej mriežke kocka objemu a^3. Keďže už vieme, koľko je v jednom centimetri kubickom atómov, tak zrejme platí

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{cm}^3 &= N a^3,\\ 1\,\mathrm{cm}^3 &= \left(2\,\frac{\rho}{M_m}\,N_A\right) a^3.\end{aligned}$$

Z toho mriežková konštanta a je

$$a = \left(\frac{M_m}{2\rho N_A}\right)^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{cm}.$$

$\boxed{39.}$ Označme sily ako na obrázku.



V hraničnom prípade, t.j. keď rebrík bude už-už padať, platí $F_3 = F_1\mu$. Aby bol rebrík v pokoji, musí byť výslednica všetkých síl naň pôsobiacich (tak isto, ako výslednica všetkých momentov síl naň pôsobiacich) nulová. Potom pre rovnováhu síl vo vodorovnom smere platí

$$F_2 = F_3 = F_1\mu.$$

Vo zvislom smere

$$F_1 = mg + Mg. \tag{1}$$

Pri rovnosti momentov síl musíme zohľadniť, kde na rebríku sa nachádza chlapec. Vo všeobecnosti by sme mohli jeho polohu popísať napríklad vzdialenosťou x od spodného konca rebríka a hľadať maximálne μ pre všetky x z intervalu $\langle 0, l\rangle$. Výpočet si môžeme urýchliť úvahou. Čím je chlapec na rebríku vyššie, tým väčší je otáčavý účinok sily Mg na rebrík (vzhľadom na jeho najnižší bod) a tým väčšia musí byť aj sila $F_2 = F_3 = F_1\mu = (mg + Mg)\,\mu$ (použili sme (1)), ktorá otáča rebrík opačným smerom. To by však zvyšovalo hodnotu koeficientu trenia μ, ktorý bráni zošmyknutiu. Kritický prípad preto nastane, keď chlapec bude úplne hore. Zapíšeme rovnosť momentov síl vzhľadom na najnižší bod rebríka a dostaneme

$$lMg\cos\alpha + \frac{l}{2}\,mg\cos\alpha = lF_2\sin\alpha.$$

Riešením týchto rovníc máme

$$\mu = \frac{M + \frac{m}{2}}{M + m}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$\boxed{40.}$ To, čo sa deje v zadaní, je to isté, čo sa deje v zadaní prvého príkladu tejto zbierky. Preto pri riešení budeme vychádzať z jeho riešenia. Už teda vieme, že pole urýchlilo častice v smere kolmom na smer pôvodného pohybu. Prvá častica získala v tomto smere rýchlosť $v\,\sin 60°$, druhá rýchlosť $v\,\operatorname{tg} 45°$. Čo sa deje, keď okolo častíc utvoríme homogénne pole? Na obe začne pôsobiť sila priamoúmerná ich náboju. Táto sila spôsobí za čas t zmenu rýchlosti nepriamoúmernú hmotnosti telesa. Preto musí platiť

$$\frac{v \operatorname{tg} 60^\circ \, m_1}{Q_1} = \frac{v \operatorname{tg} 45^\circ \, m_2}{Q_2},$$

a teda

$$\sqrt{3}\,\frac{m_1}{Q_1} = \frac{m_2}{Q_2}.$$