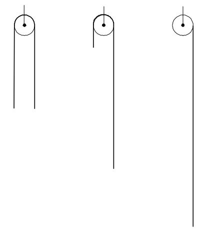
Kapitola 1

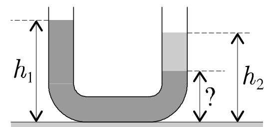
Zadania

$\boxed{1.}$ Vlak jazdí po istej trati vždy rýchlosťou 90 km.h^{-1}. Koľko bude meškať, ak pôjde 10 minút namiesto rýchlosti 90 km.h^{-1} iba rýchlosťou 30 km.h^{-1}?

$\boxed{2.}$ Na kladke o polomere R a zanedbateľnej hmotnosti je zavesené lano o hmotnosti m a dĺžky $l \gg R$ tak, že je v rovnováhe (obr.). Ak rovnováhu porušíme lano sa začne pohybovať. Aká bude jeho rýchlosť v okamihu, keď opúšťa kladku?

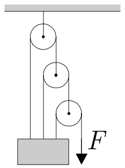


$\boxed{3.}$ Do U-trubice nalejeme benzín s hustotou ρ_1 a vodu s hustotou ρ_2. Hladina benzínu sa ustáli vo výške h_1, hladina vody vo výške h_2. V akej výške sa ustáli ich rozhranie?



$\boxed{4.}$ Pohyblivé schody prenesú stojaceho pasažiera z jedného podlažia na druhé za 10 s. Ak pohyblivé schody stoja, prejde po nich pasažier z jedného podlažia na druhé za 20 s. Za akú dobu prejde pasažier po pohybujúcich sa schodoch z jedného podlažia na druhé, ak po nich kráča v smere ich pohybu?

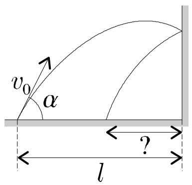
$\boxed{5.}$ Majme nasledujúcu sústavu kladiek, ktorých hmotnosti považujte za zanedbateľné. Akou silou musíme pôsobiť na pravé lano, aby sme udržali v rovnováhe teleso hmotnosti m, o ktoré sú uchytené laná zo všetkých troch kladiek?



$\boxed{6.}$ Indiáni zajali zálesáka. Ten sa môže oslobodiť, ak zvíťazí v plaveckých pretekoch proti miestnemu šampiónovi. Okolo dediny tečie rieka rýchlosťou $v = 1\,\mathrm{km.h^{-1}}$. Zálesák i indián plávajú rovnako rýchlo, rýchlosťou $c = 3\,\mathrm{km.h^{-1}}$ (voči vode). Pravidlá sú nasledujúce: jeden závodník pláva naprieč riekou tam a naspäť (na pôvodné miesto). Druhý pláva tam a naspäť tú istú vzdialenosť medzi dvoma kolmi zatlčenými do dna rieky pozdĺž jej toku. Ktorú trasu si má zálesák vybrať a ak si vyberie správne – o koľko zvíťazí? Rieka je široká 300 m.

$\boxed{7.}$ Delostrelec chce trafiť jablko, ktoré je od neho vzdialené $3l$ a je o výšku l vyššie ako on. Jeho náboje vylietajú z hlavne rýchlosťou v.V okamihu vystrelenia náboja jablko začne padať k zemi. Pod akým uhlom má delostrelec strieľať, aby trafil jablko? Odpor vzduchu a rozmery dela zanedbajte.

$\boxed{8.}$ Guličku hodíme rýchlosťou v_0 pod uhlom α, ale tá sa nám odrazí späť od zvislej steny vzdialenej od nás o l (viď. obr.). Nájdite v akej vzdialenosti x od steny dopadne gulička na zem. Odraz považujte za dokonale pružný.



$\boxed{9.}$ Hydrolokátor ponorky rovnomerne klesajúcej kolmo ku dnu, vysiela smerom ku dnu zvukové signály s dobou trvania t_0. Signály odrazené od dna sa na ponorku znova prijímajú, pričom doba ich trvania je t. Aká je rýchlosť klesania ponorky? Rýchlosť zvuku vo vode je c.

$\boxed{10.}$ Vodič električky pohybujúcej sa rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m.s^{-1}}$ zapne spätný chod, v dôsledku čoho sa električka začne pohybovať rovnomerne spomalene.

Horné ohraničenie vzdialenosti l je dané tiež maximálnou hodnotou trecej sily, ale v opačnom smere. V tomto prípade nadobudne rovnica (2) tvar

$$-F_t + F_{od} \sin\alpha - F_G \cos\alpha = 0 \tag{2'}$$

A riešením sústavy (1), (2′) dostávame

$$l_{\max} = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \frac{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

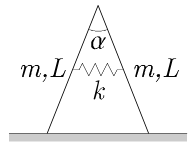
A teda celý interval vzdialeností guľôčky od počiatku tyče, keď sa nachádza v rovnováhe, je

$$l \in \left(\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \frac{1 - \mu \operatorname{tg}\alpha}{1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}, \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \frac{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}, \right)$$

Všimnime si, že pre nulové trenie sa celý interval zúži na jeden rovnovážny bod $l = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$.

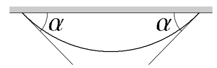
Po dvoch sekundách $t = 2\,\mathrm{s}$ sa nachádza $s = 8\,\mathrm{m}$ od miesta, v ktorom začala spomalovať. Aké sú všetky hodnoty rýchlosti, ktoré električka dosiahne vo vzdialenosti 8 m od miesta zapnutia spätného chodu?

$\boxed{11.}$ Na hladkej podložke je položený rebrík, ktorého stredy ramien sú spojené pružinou tuhosti k. Každé rameno má hmotnosť m a dĺžku L. Predpokladajme, že pružina má v základnom stave zanedbateľnú dĺžku. Aký bude rovnovážny uhol α medzi ramenami rebríka?

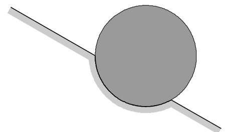


$\boxed{12.}$ Máme 2 cm dlhú gumu, pripevnenú jedným koncom ku stene a s druhým koncom voľným. Od steny začne po gume kráčať mravček stálou rýchlosťou 1 cm.s^{-1}. Na konci každej sekundy sa guma okamžite natiahne o 2 cm. Za ako dlho dôjde mravček na koniec (prvý vyštartuje mravček)?

$\boxed{13.}$ Retiazka hmotnosti m je uchytená za konce tak, že v blízkosti bodov úchytu zviera s horizontálou uhol α. Akou silou je napínaná retiazka v jej strede?

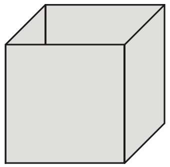


$\boxed{14.}$ Hĺbka jamky, v ktorej je položená guľa, je dvakrát menšia ako polomer gule. Pri akom najmenšom uhle sklonu naklonenej roviny sa guľa vykotúľa z jamky?



$\boxed{15.}$ Na dvoch rovnako dlhých nitiach upevnených v jednom bode sú prichytené rovnako veľké plastelínové gule. Jedna visí kolmo dole, druhú sme vychýlili tak, že jej výška vzhľadom na prvú guľu je h. Aká bude maximálna výška kmitov spoločnej gule po nepružnej zrážke?

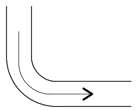
$\boxed{16.}$ Škatuľa na obrázku má tvar kocky s dĺžkou hrany h bez vrchnej steny. Všetky steny sú homogénne a majú rovnakú hmotnosť. V akej výške od spodnej steny sa nachádza ťažisko škatule?



$\boxed{17.}$ Na konci nite dĺžky l je gulička hmotnosti m. Guličku odkloníme o uhol $90°$ a pustíme. Na akej najmenšej vzdialenosti pod bodom úchytu treba umiestniť klinec, aby sa niť pri pohybe nepretrhla? Niť vydrží maximálnu napínajúcu silu T.

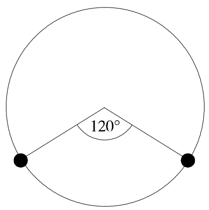
$\boxed{18.}$ Nájdite vnútorný odpor zdroja s napätím U, ak výkon uvoľnený na vonkajšom odpore je rovnaký pre jeho hodnoty R_1 aj R_2.

$\boxed{19.}$ Akou silou pôsobí voda v trubici na koleno? Voda má objemový prietok Q, rýchlosť v a hustotu ρ.



$\boxed{20.}$ Kačka letela po vodorovnej priamke rýchlosťou u. Pytliak do nej hodil kameň rýchlosťou v pod uhlom α. Bol to neskúsený pytliak, takže kameň hodil bez nadbehu t.j. v smere okamžitej polohy kačky. Ale bol to zároveň pytliak, ktorý mal šťastie, takže kačku predsa len zasiahol. V akej výške letela kačka?

$\boxed{21.}$ Po nevodivom kruhu s polomerom R umiestnenom zvisle v gravitačnom poli Zeme sa môžu voľne pohybovať dve korálky s hmotnosťou m. Akým nábojom (obe korálky rovnakým) treba tieto korálky nabiť, aby ich spojnice so stredom kruhu zvierali uhol $120°$?



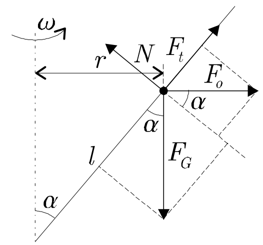
$\boxed{22.}$ Vodič električky pohybujúcej sa rýchlosťou $v_0 = 10\,\mathrm{m.s^{-1}}$ zapne spätný chod, v dôsledku čoho sa električka začne pohybovať rovnomerne spomalene.

sila nenulová, ale sila pružiny je nulová. A že odstredivá sila rastie rýchlejšie s x ako sila pružiny $m\omega^2 > k$.

Tento výsledok však nie je dobrý pre reálnu pružinu. Vzťah $F = kx$ platí pre každú pružinu iba do istých medzí. Pre veľké x už zďaleka nemôžeme brať, že sila rastie úmerne s výchylkou. Rastie čím ďalej tým prudšie až nakoniec rovnováha nastane. Ak pre nič iné, tak preto, že každá pružina má konečnú dĺžku drôtu z ktorej je vyrobená.

$\boxed{49.}$ Po zapnutí motora bude planétka vykonávať pohyb zložený z rovnomerne zrýchleného posuvného a rovnomerne zrýchleného rotačného pohybu. Sila F spôsobí posuvné zrýchlenie planétky veľkosti $a = \frac{F}{m}$. Sila F má vzhľadom na stred planétky moment FR ktorý spôsobí rotačné zrýchlenie veľkosti $\varepsilon = \dfrac{FR}{\frac{2}{5}mR^2} = \dfrac{5F}{2mR}$. Toto uhlové zrýchlenie spôsobí na povrchu planétky zrýchlenie dotyčnicové o veľkosti $\dfrac{5F}{2mR}R = \dfrac{5F}{2m}$. Výsledné zrýchlenie motora bude súčtom oboch týchto zrýchlení, teda $\dfrac{7F}{2m}$.

$\boxed{50.}$ Vo vzťažnej sústave spojenej s rotujúcou tyčou pôsobia na korálku štyri sily. Tiažová $\vec{F}_G$, odstredivá $\vec{F}_{od}$, normálová $\vec{N}$ a trecia $\vec{F}_o$ (viď. obr.).



Pričom trecia sila môže mať aj opačný smer, ako je na obrázku. Množina hodnôt trecej sily vlastne určuje aj interval, v ktorom sa gulička môže nachádzať v rovnováhe. Uvážme najskôr smer trecej sily tak ako je znázornený na obrázku. Potom rovnováhu síl môžeme napísať raz v priemete na tyč, druhýkrát v priemete kolmo na tyč:

$$N - F_G \sin\alpha - F_{od}\cos\alpha = 0 \tag{1}$$
$$F_t + F_{od}\sin\alpha - F_G\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

kde $F_{t\,\max} = \mu N$, $F_G = mg$, $F_{od} = m\omega^2 l \sin\alpha$. Riešením týchto rovníc dostávame

$$l_{\min} = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\,\frac{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\frac{\mu}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

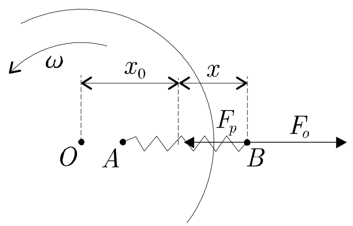
po dosadení do tohto vzťahu dostávame $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$\boxed{47.}$ Fintou v tejto úlohe je zvoliť si správnu vzťažnú sústavu v ktorej budeme rátať. Pozrime sa na celú situáciu zo sústavy spojenej s ťahaným koncom špagátu. (Táto sústava sa vzhľadom na zem pohybuje rovnomerne, čiže je inerciálna, tj. nepôsobia v nej žiadne fiktívne/zotrvačné sily). V tejto sústave to vyzerá tak, že gulička je normálne voľne zavesená na špagáte a zrazu získa rýchlosť v v istom smere. Teraz však už vieme ľahko zrátať, o aký maximálny uhol sa gulička vychýli. Zo zákona zachovania energie máme:

$$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2$$

odkiaľ $\cos\alpha = 1 - \dfrac{v^2}{2gl}$.

$\boxed{48.}$ Ak sme vo vzťažnej sústave spojenej s rotujúcim diskom, tak pri otáčaní pôsobia na guličku dve sily (viď. obr.).



Odstredivá sila F_o a sila pružiny F_p. Ak si označíme x_0 vzdialenosť od bodu O po guličku, pričom je pružina nenatiahnutá, môžeme pre sily písať:

$$\begin{aligned} F_o &= m\omega^2(x_0+x) \\ F_p &= kx \end{aligned}$$

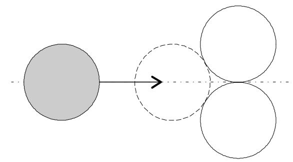
Maximálna dĺžka na ktorú sa natiahne pružina zodpovedá rovnováhe síl:

$$\begin{aligned} F_o &= F_p \\ m\omega^2(x_0+x) &= kx \\ x &= \frac{m\omega^2 x_0}{k - m\omega^2} \end{aligned}$$

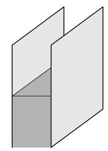
Pre naše konkrétne hodnoty to je $x = -0,3$ m. Čo je samozrejme hlúposť. Znamená to asi toľko, že sa bude pružina naťahovať donekonečna Na vysvetlenie si stačí uvedomiť, že povedzme vo vzdialenosti 15 cm od stredu je odstredivá

Po dvoch sekundách $t = 2\,\mathrm{s}$ sa nachádza $s = 8\,\mathrm{m}$ od miesta, v ktorom začala spomalovať. Aké sú všetky hodnoty rýchlosti, ktoré električka dosiahne vo vzdialenosti 8 m od miesta zapnutia spätného chodu?

$\boxed{23.}$ Vyznačená guľa na obrázku, pohybujúca sa rýchlosťou v, narazí do dvoch rovnako ťažkých stojacich gúľ. Ako ďaleko budú tieto po čase t od zrážky?



$\boxed{24.}$ Kondenzátor, medzi doskami ktorého je vzduch ($\varepsilon_r \doteq 1$), má kapacitu C_0. Ponoríme ho do vody s relatívnou permitivitou ε_r tak, že táto zaplní polovicu priestoru medzi doskami kondenzátora. Aká bude vtedy jeho kapacita?



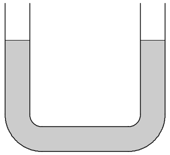
$\boxed{25.}$ Vo výške 450 km nad povrchom planétky je gravitačné 100-krát menšie než na jej povrchu. Aký je polomer neznámej planétky?

$\boxed{26.}$ Štyri náboje veľkosti Q sú umiestnené vo vrcholoch štvorca so stranou a. Pohromade ich držia štyri rovnako dlhé nite po stranách štvorca. Akými silami sú tieto nite napínané?

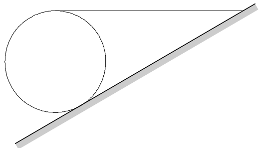
$\boxed{27.}$ Vo vodorovnom homogénnom elektrickom poli intenzity E hodíme pod uhlom α počiatočnou rýchlosťou v_0 teleso s hmotnosťou m a nábojom veľkosti Q. Aká má byť veľkosť intenzity tohto poľa E, aby malo teleso v najvyššom bode svojej dráhy rovnakú kinetickú energiu ako na začiatku letu?

$\boxed{28.}$ Predmet je vzdialený 10 cm od zrkadla. V strede medzi ním a zrkadlom je spojka s ohniskovou vzdialenosťou 3 cm. Aká je vzdialenosť predmetu od jeho reálneho obrazu?

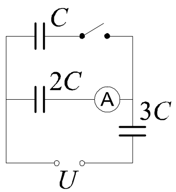
$\boxed{29.}$ Určte periódu kmitania vody v U-trubici.U-trubica má prierez S, voda v nej má objem V a hustotu ρ.



30. Aká veľká sila napína vodorovnú niť udržujúcu homogénny valec na naklonenej rovine na obrázku? Sklon naklonenej roviny je α, hmotnosť valca je m.

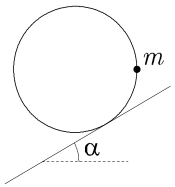


31. Aký náboj pretečie ampérmetrom pri zapnutí spínača v obvode na obrázku?

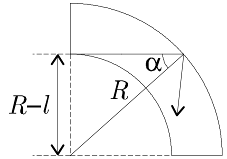


32. Majme kvapalinu s indexom lomu n. Do akej hĺbky môžme do nej ponoriť (nepriehľadnú) guľu s polomerom R tak, aby jej pod vodou ponorenú časť nebolo vidieť zo žiadneho miesta nad hladinou?

33. Na naklonenej rovine stojí obruč s hmotnosťou M. Na jej obvode je pripecnené malé závažie hmotnosti m tak ako na obrázku. Aký je sklon naklonenej roviny α, ak je priamka spájajúca stred obruče so závažím vodorovná a sústava je v pokoji?



45. Stačí nám skúmať "krajný" lúč zväzku – ak tento neunikne zo svetlovodu, potom neuniknú ani ostatné. Zakreslime si dráhu tohoto lúča:



Nech v kritickom mieste odrazu dopadá na rozhranie pod uhlom α (ku kolmici). Potom pre uhol absolútneho odrazu platí

$$\sin\alpha \geq \frac{1}{n}$$

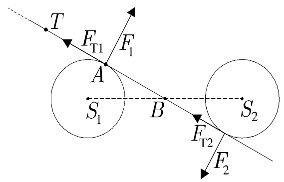
Z geometrie obrázku vidíme, že

$$\sin\alpha = \frac{R-l}{R}$$

Odtiaľ dostávame

$$R \geq \frac{n}{n-1}\,l$$

46. Z trojuholníka AS_1B ľahko zrátame, že tyč zviera s rovnobežnou rovinou uhol 30°. Označme sily tak, ako na obrázku.

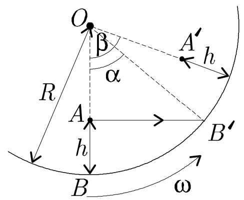


Aby tyč bola v pokoji, musí byť súčet všetkých síl a súčet všetkých momentov síl na ňu pôsobiacich rovný nule. Pre momenty vzhľadom na ťažisko máme $|TA|\ F_1 = 3\ |TA|\ F_2$, z čoho $F_1 = 3F_2$. Nás zaujíma hraničný prípad, keď akékoľvek zníženie μ spôsobí porušenie rovnováhy. Vtedy pre trecie sily platí $F_{t1} = F_1\mu$, $F_{t2} = F_2\mu$. Zapíšme teraz, že výslednica síl musí byť nulová, pričom sa obmedzíme len na vodorovné zložky síl.

$$F_1 \sin 30^\circ = F_{t1}\cos 30^\circ + F_{t2}\cos 30^\circ + F_2 \sin 30^\circ$$

$\boxed{43.}$ Po prvé, zabudnime na gravitáciu. Tá vôbec nemá vplyv na pohyb jednotlivých častí kladiek, pretože kladky sú vyvážené. Úloha je jednoduchá na výsledok, ale zložitá na jeho myšlienkové zdôvodnenie. Aby sme sa nestratili v úvahách, zaveďme si nasledovné označenie: nech v_o je rýchlosť opice voči zemi (nahor), ďalej v'_o je rýchlosť opice voči lanu (nahor). Nech v_l je rýchlosť lana voči zemi (nadol). Nech v_m je rýchlosť závažia m voči zemi (nahor) a nech v_{2m} je rýchlosť závažia $2m$ voči zemi nahor. Uvažujme chvíľu, čo sa deje, ak opica pôsobí na špagát silou F za nejaký veľmi malý čas t, čím zvýši svoju rýchlosť $v_\text{o}$vzhľadom na zem o Δv. V lane na ktorom visí tým pádom musí vzniknúť pnutie veľkosti F. Toto pnutie pôsobí na závažie hmotnosti m čas t a teda aj jeho rýchlosť v_m sa zvýši o Δv. Pnutie v lane však bude pôsobiť aj na vyššiu kladku a to silou $2F$ (pretože lano ju ťahá z oboch strán). Táto sila pôsobí na závažie hmotnosti $2m$ čas t a teda tiež zväčší jeho rýchlosť v_{2m} o Δv. Na začiatku bolo $v_\text{o} = v_m = v_{2m}$. Pre rýchlosť opice platí $v'_\text{o} = v_\text{l} + v_\text{o}$. Ďalej sú jednotlivé rýchlosti zviazané vzťahom $v_m + v_{2m} = v_\text{l} - v_{2m}$, odkiaľ $v_\text{l} = v_m + v_{2m} = 3v_\text{o}$ a teda $v'_\text{o} = 4v_\text{o}$. Teda $v_{2m} = v_0 = v'_0/4$. Povedané písmenami zadania: ak u je rýchlosť opice voči lanu, potom závažie hmotnosti $2m$ sa pohybuje rýchlosťou $u/4$ nahor voči zemi.

$\boxed{44.}$ Pozrime sa na všetko z inerciálnej vzťažnej sústavy. Sme teda mimo lode. Čo vidíme? Kozmonaut vypustil teleso z ruky. To keďže naňho prestala pôsobiť sila, ktorou ho držal kozmonaut, sa začalo správať podľa prvého Newtonovho zákona. Znamená to, že sa odteraz pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou $v = \omega\,(R-h)'$ (viď. obr.).



Pre uhol α dostávame z trojuholníka OAB', že $\cos\alpha = (R-h)/R$. Uhol β vznikne pootočením rakety za čas T, kým teleso dopadne z ruky kozmonauta na podlahu, t.j.

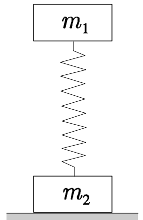
$$\beta = \omega T = \omega\,\frac{|AB'|}{\omega(R-h)} = \frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h} = \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$$

Takže pre uhol $A'OB'$ platí

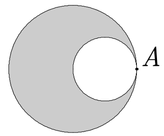
$$|\angle A'OB'| = \beta - \alpha = \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h} - \arccos\frac{R-h}{R}$$

$\boxed{34.}$ Po priamej ceste sa pohybuje autobus rýchlosťou v. V akej oblasti roviny sa pre danú polohu autobusu musíme nachádzať, keď chceme autobus dobehnúť, ak maximálna rýchlosť nášho behu je u?

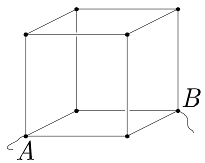
$\boxed{35.}$ Na obrázku je znázornená sústava dvoch telies s hmotnosťami m_1 a m_2, pričom obidve telesá sú pripevnené k pružine tuhosti k. Sústava je na začiatku v rovnováhe. O koľko musíme stlačiť horné teleso m_1, aby sa počas pohybu „odlepilo" aj spodné teleso m_2?



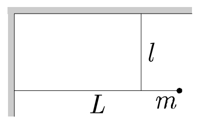
$\boxed{36.}$ V planéte polomeru R je dutina tvaru gule s polomerom $R/2$. Hmotnosť planéty je M. Vyjadrite gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty v bode A. Gravitačnú konštantu označte $\varkappa$.



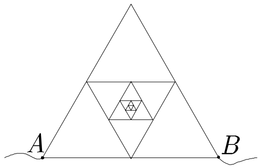
$\boxed{37.}$ Vypočítajte odpor drôtenej kocky medzi vrcholmi A, B ležiacimi na uhlopriečke steny. Odpor každej hrany kocky je $1\,\Omega$.



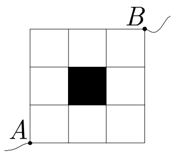
$\boxed{38.}$ Teleso hmotnosti M je guľovým kĺbom pripevnené o stenu cez veľmi ľahkú tyč o dĺžke L. Táto je vo svojom strede upevnená na ľahkej niti dĺžky l. Telesu sme udelili počiatočný impulz v smere kolmom na rovinu obrázku. Nájdite periódu malých kmitov telesa.



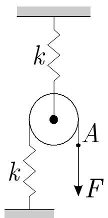
39. Nájdite odpor medzi bodmi A, B nekonečnej trojuholníkovej siete na obrázku, ak odpor strany najväčšieho trojuholníka je 1 Ω.



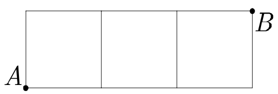
40. Drôtená sieť pozostáva z deviatich štvorčekov, z ktorých prostredný je vyplnený dokonale vodivou platničkou (obr.). Odpor každej drôtenej strany malého štvorčeka je $1\,\Omega$. Vypočítajte celkový odpor schémy medzi bodmi A a B.



41. O koľko sa posunie koniec nite (bod A) ak naň začneme pôsobiť silou F smerom nadol? Hmotnosť kladky zanedbajte.



42. Zrátajte odpor medzi bodmi A, B v sústave vodičov na obrázku. Hrana štvorca má odpor R.



43. Opica hmotnosti m sa nachádza v rovnováhe na sústave kladiek na obrázku. V istom okamihu sa opica začne šplhať rýchlosťou u voči lanu. Akou rýchlosťou sa bude pohybovať závažie s hmotnosťou $2m$?

Poslednú schému už ľahko spočítame – jej výsledný odpor je $8R/5$.

41. Nech sa bod A posunie o x, nech sa spodná pružina predĺži o x_1 a vrchná pružina predĺži o x_2. Potom medzi jednotlivými posunutiami platí kinematický vzťah

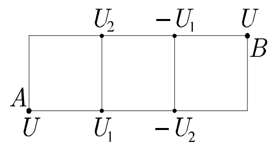
$$x = x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

Zároveň je sústava v rovnováhe, teda súčet síl je nulový. Zrejme spodná pružina je napínaná silou F a horná silou $2F$ (kladka zdvojnásobuje silu nite). Teda

$$F = kx_1 \tag{2}$$
$$2F = kx_2 \tag{3}$$

Riešením (1)-(3) dostávame $x = 5F/k$.

42. Jednou z ciest ako by sa dala táto úloha riešiť je transformovať krajné štvorce na hviezdu a obvod potom dorátať. Skúme ale iné riešenie: predpokladajme, že bod A má potenciál U, bod B potenciál $-U$. Označme potenciály zvyšných bodov nasledovne:



Pomôže nám pritom symetria celej schémy (body symetrické podľa stredu majú opačný potenciál). Teraz zapíšeme 1.Kirchhoffov zákon pre body s potenciálom U_1 a U_2:

$$\frac{U_1 - U}{R} + \frac{U_1 - U_2}{R} + \frac{U_1 + U_2}{R} = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{U}{3}$$
$$\frac{U_2 - U}{2R} + \frac{U_2 - U_1}{R} + \frac{U_2 + U_1}{R} = 0 \Rightarrow U_2 = \frac{U}{5}$$

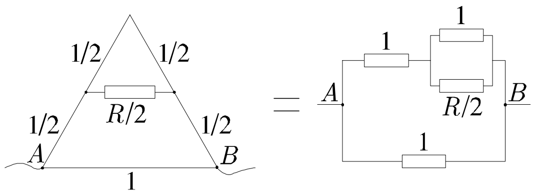
Celkovo z bodu A vyteká prúd

$$\frac{U - U_1}{R} + \frac{U - U_2}{2R} = \frac{16}{15}\frac{U}{R}$$

tento prúd tečie teda medzi bodmi A a B medzi ktorými je napätie $2U$. Hľadaný odpor je teda

$$R_{AB} = \frac{2U}{\frac{16}{15}\frac{U}{R}} = \frac{15}{8}R$$

riešení použijeme ďalej vlastnosť, že ak nejaké dva uzly majú rovnaký potenciál, potom ak ich spojíme, tak týmto vodičom aj tak nebude tiecť prúd. Podobne, ak medzi nimi bol vodič, nič sa nestane, ak ho odstránime. V našom prípade má takúto vlastnosť uzol v strede medzi bodmi A a B. Ak ho rozdvojíme a odpojíme od úsečky AB, výsledný odpor sa nezmení. S využitím týchto dvoch vlastností môžeme celú schému prekresliť nasledovne.



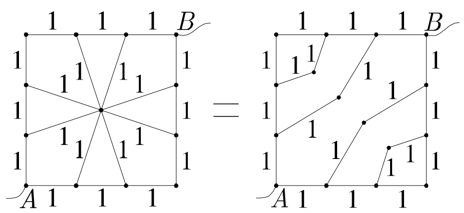
Celú trojuholníkovú schému sme zjednodušili. Odpor medzi bodmi A, B je R, táto neznáma však vystupuje aj vo vnútri obvodu. Tak vlastne získavame rovnicu

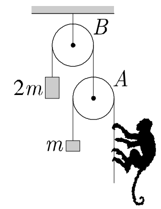
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{R/2}{1+R/2}}$$

Odtiaľ po úprave dostávame

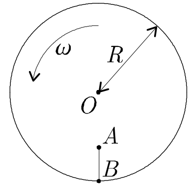
$$R = \frac{\sqrt{7}-1}{3}\,\Omega$$

$\boxed{40.}$ Pri riešení použijeme vlastnosť, že ak nejaké dva uzly majú rovnaký potenciál, potom ak ich spojíme, tak týmto vodičom aj tak nebude tiecť prúd. Podobne, ak medzi nimi bol vodič, nič sa nestane, ak ho odstránime. Použijeme obidva kroky: najskôr "stlačíme" celú platničku do jedného bodu (pretože je dokonale vodivá) a potom ju rozpojíme do viacerých uzlov (pretože z dôvodu symetrie medzi nimi aj tak nebude tiecť prúd). Graficky znázornené vyzerajú tieto kroky nasledovne:

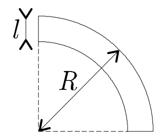




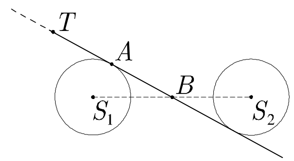
$\boxed{44.}$ Kozmická loď rotuje uhlovou rýchlosťou ω. Človek stojaci v mieste A na jej obvode vypustí z rúk nejaký predmet (človek rotuje spolu s loďou, $|AB| = h$). Nech predmet dopadne do dobu B' na obvode rakety. Nech sa kozmonaut nachádza v tomto čase v bode A'. Vypočítajte veľkosť uhla $A'OB'$.



$\boxed{45.}$ Aká byť polomer krivosti zhybu svetlovodu priemeru l z materiálu s indexom lomu n, aby svetlo, ktoré vchádza kolmo na prierez na jednom konci sa dostalo všetko na druhý koniec a cestou "neunikalo"?

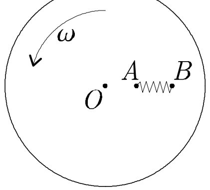


$\boxed{46.}$ Nájdite minimálnu hodnotu koeficientu trenia μ medzi tyčou a valcami (obr) tak, aby tyč bola v pokoji.T je ťažisko tyče, polomer valcov je R, a platí $|TA| = |TB|$, $|S_1S_2| = 4R$.



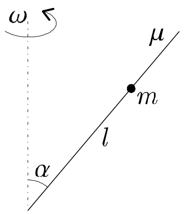
$\boxed{47.}$ Gulička hmotnosti m voľne visí na špagáte dlžky l. Druhý koniec špagátu než ten na ktorom je gulička chytíme a začneme ho ťahať vo vodorovnom smere rýchlosťou v. Aký maximálny uhol α bude zvierať špagát so zvislicou počas tohto pohybu?

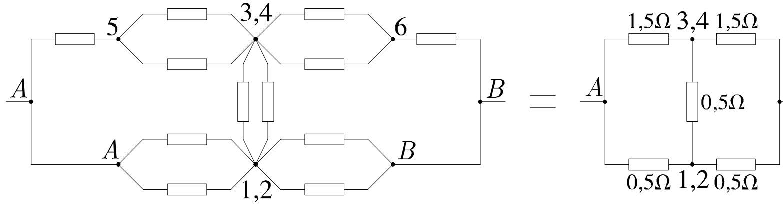
$\boxed{48.}$ V bode A horizontálneho disku, rotujúceho okolo vertikálnej osi, je pripevnená pružina, na ktorej druhom konci je upevnená gulička B s hmotnosťou $20\,\mathrm{g}$. Tuhosť pružiny je $k = 1\,\mathrm{N.cm^{-1}}$. Vzdialenosť OA je rovná $5\,\mathrm{cm}$ a dĺžka pružiny v neroztiahnutom stave je $10\,\mathrm{cm}$. Na akú dĺžku sa natiahne pružina pri rotácii disku s uhlovou rýchlosťou $\omega = 100\,\mathrm{rad.s^{-1}}$.



$\boxed{49.}$ Homogénna planétka s hmotnosťou m, polomerom R a momentom zotrvačnosti $I = \frac{2}{5}mR^2$ sa nachádza v beztiažovom stave. V jednom mieste na povrchu má k sebe pripevnený ideálny motor, ktorý po zapnutí začne ťahať silou F v dotyčnicovom smere. Určte zrýchlenie motora tesne po jeho zapnutí.

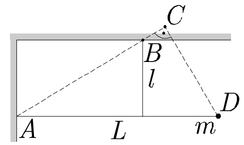
$\boxed{50.}$ Tyč je odklonená od zvislice o uhol α, pričom sa okolo nej otáča ulovou rýchlosťou ω (viď. obr.). Na tyči je navlečená korálka hmotnosti m, ktorá sa môže po tyči pohybovať s koeficientom trenia μ. Určte pre aké vzdialenosti l od začiatku tyče sa nebude korálka pohybovať vzhľadom na tyč?





Opäť zo symetrie vidíme (čo bolo možné vidieť už aj na kocke), že všetky štyri body 1,2,3,4 majú rovnaký potenciál, a preto môžeme zvislú časť obvodu vypustiť, čím sa výpočet zjednoduší a získame výsledný odpor kocky $R = 0,75\,\Omega$.

$\boxed{38.}$ Potrebujeme si uvedomiť, po akej dráhe sa vlastne pohybuje teleso. Zistíme, že vykonáva pohyb po kružnici so stredom v bode C.



To je podstatná informácia, lebo vtedy sa jedná vlastne o matematické kyvadlo, akurát s iným (tzv. efektívnym) polomerom otáčania a iným efektívnym gravitačným zrýchlením. Veľkosť polomeru otáčania je

$$l' = |CD| = L\sin\alpha = \frac{l.L}{\sqrt{l^2 + (L/2)^2}}$$

Efektívne tiažové zrýchlenie je vlastne priemet $\vec{g}$ do smeru CD:

$$g' = g\cos\alpha = g\frac{L/2}{\sqrt{l^2 + (L/2)^2}}$$

Potom perióda kmitov je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Vidíme, že nie vždy musíme voliť "klasické" metódy riešenia úloh o kmitoch, v tomto prípade stačilo v sústave spoznať klasické kyvadlo.

$\boxed{39.}$ Hľadaný odpor schémy medzi bodmi A, B označme R. Všimnime si, že keby sme zmazali vonkajší trojuholník, získame tú istú schému, akurát dvakrát menšiu. Ak má každý drôt dvakrát menší odpor, potom aj celá schéma bude mať dvakrát menší odpor. Teda odpor nekonečného "podtrojuholníka" je $R/2$. Pri rovná m_2g/k. Toľko teda na zdôvodnenie toho, prečo

$$x = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

$\boxed{36.}$ Gravitačné zrýchlenie na planéte bez dutiny by bolo

$$g_1 = \varkappa \frac{m_1}{R_1^2} \tag{1}$$

kde m_1 je hmotnosť "plnej" planéty, $R_1 = R$. Gravitačné zrýchlenie hmoty, ktorá by bola v samotnej dutine, je

$$g_2 = \varkappa \frac{m_2}{R_2^2} \tag{2}$$

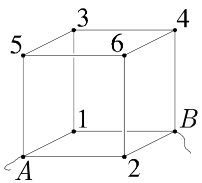
kde m_2 je hmotnosť "plnej" dutiny, $R_2 = R/2$. Vzťah medzi hmotnosťami je nasledovný:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= M & (3) \\ \frac{m_1}{m_2} &= \left(\frac{R/2}{R}\right)^3 & (4) \end{aligned}$$

Keď od gravitačného poľa plnej planéty odčítame gravitačné pole plnej dutiny, získame hodnotu gravitačného poľa na našej planéte. Teda s využitím (1)-(4) dostávame

$$g = g_1 - g_2 = \frac{4}{7} \varkappa \frac{M}{R^2}$$

$\boxed{37.}$ Označme si číslami jednotlivé vrcholy kocky.



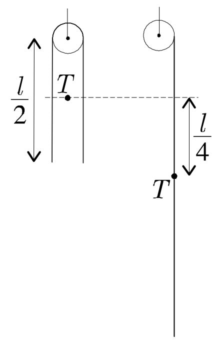
Pri riešení použijeme vlastnosť, že ak nejaké dva uzly majú rovnaký potenciál, potom ak ich spojíme, tak týmto vodičom aj tak nebude tiecť prúd. Podobne, ak medzi nimi bol vodič, nič sa nestane, ak ho odstránime. To, či nejaké body sú alebo nie sú ekvipotenciálne, vidieť niekedy zo symetrie. V našom prípade zrejme body 1 a 2 majú rovnaký potenciál. Podobne body 3 a 4. Preto ich môžeme spojiť do jedného uzla a celú schému prekresliť do nasledujúceho tvaru:

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Za tých kritických10 minút sa oneskorí o takú vzdialenosť ako by prešiel za 10 minút rýchlosťou 60 km.h^{-1} (= 90 − 30). To je $\frac{1}{6}$ h·60 km.h^{-1} = 10 km. Keď potom znovu zrýchli na 90 km.h^{-1}, prejde túto vzdialenosť za $\dfrac{10\,\text{km}}{90\,\text{km.h}^{-1}} = \dfrac{1}{9}\,h \doteq 6,7\,\text{min}$.

$\boxed{2.}$ Dĺžka lana l je zanedbateľná voči polomeru kladky R. Potom môžme výšku ťažiska voľne preveseného lana zobrať v polovici jeho jednej prevesenej časti (viď. obr.).



Potom je jasné že ťažisko lana kleslo o $\frac{l}{4}$. A keďže zmena potenciálnej energie je rovná kinetickej energii lana pri opúšťaní kladky (lebo na začiatku bola kinetická energia lena rovná nule), môžme napísať:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_k \\ mg\frac{l}{4} &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

a teda $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

$\boxed{3.}$ Hydrostatický tlak v ľavom ramene musí byť v okamihu rovnováhy rovný hydrostatickému tlaku v pravom ramene. Označme si hľadanú výšku rozhrania x, potom platí

$$h_1\rho_1 g = x\rho_1 g + (h_2 - x)\rho_2 g$$

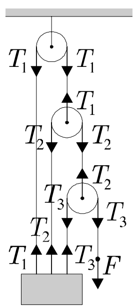
Odtiaľ dostávame

$$x = \frac{h_2\rho_2 - h_1\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$\boxed{4.}$ Ak bude d dĺžka schodiska, v_s, rýchlosť schodov a v_p rýchlosť pasažiera, bude čas za ktorý vynesú pohyblivé schody stojaceho pasažiera $t_s = \frac{d}{v_s} = 10\,\mathrm{s}$ a čas za ktorý vyjde pasažier sám po schodoch $t_p = \frac{d}{v_p} = 20\,\mathrm{s}$. Potom čas, za ktorý sa dostane kráčajúci pasažier po pohybujúcich sa schodoch z jedného podlažia na druhé, je rovný

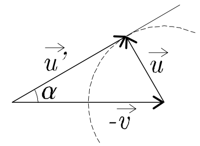
$$t = \frac{d}{v_s + v_p} = \frac{1}{\frac{v_s}{d} + \frac{v_p}{d}} = \frac{1}{\frac{1}{t_s} + \frac{1}{t_p}} = \frac{20}{3}\,\mathrm{s}$$

$\boxed{5.}$ Označme sily napätia v lanách T_1, T_2, T_3.

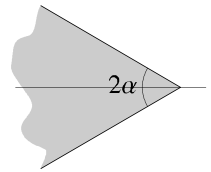


Ak je sústava v rovnováhe, výslednica síl pôsobiacich na každé teleso je nulová. Čiže

$$\begin{aligned} T_1 &= 2T_2 \\ T_2 &= 2T_3 \\ T_3 &= F \\ T_1 + T_2 + T_3 &= mg \end{aligned}$$

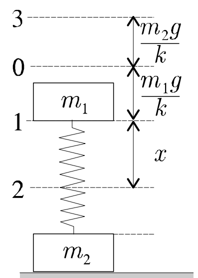


Vidíme, že najväčší uhol α dosiahneme vtedy, keď $\vec{u} \perp \vec{u}'$, teda keď bežíme k ceste pod uhlom $\alpha = \arcsin u/v$. Oblasť, z ktorej zastihneme autobus, je teda výplň uhla s vrcholom v autobuse a s vrcholovým uhlom 2α:

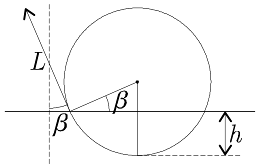


Pre $u > v$ dobehneme autobus z ľubovoľného miesta.

$\boxed{35.}$ Počas celého pohybu sa sústreďme na nasledovné polohy závažia m_1



Poloha 0 je poloha, keď sme na pružinu ešte nepoložili závažie m_1 – pružina je v základnom stave. V okamihu položenia sa po ustálení dostane do rovnovážneho stavu 1 – to je stav, v ktorom je znázornená v zadaní. Voči stavu 0 závažie kleslo o hodnotu m_1g/k. My teraz stlačíme teliesko ešte o x, čím sa dostane do stavu 2. Teraz je potrebné, ako sa bude pohybovať. Ešte predpokladajme, že výchylka je dosť malá, aby pohla so spodným telesom. Teleso 1 bude vykonávať harmonické pohyby okolo polohy 1 s amplitúdou x. Maximálna sila, napínajúca pružinu v smere nahor nastane pri hornej amplitúde – označme túto polohu 3. Zo symetrie pohybu je jasné, že vzdialenosť 1 a 2 sa rovná vzdialenosti 1 a 3. Sila, ktorou je napínaná pružina, sa rovná k krát vzdialenosť 3 od 0 (pozor: nie od 1). My teraz hľadáme také kmity, aby tesne zdvihli spodné závažie. Teda v okamihu 3 má byť sila napätia pružiny rovná m_2g, čiže vzdialenosť 3 od 0 je

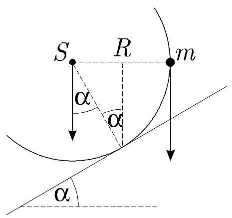


Tieto lúče dopadaju pod uhlom β, pre ktorý platí:

$$\sin\beta = \frac{R-h}{R}$$

Aby bolo $\beta \geq \alpha$, musí byť $\sin\beta \geq \sin\alpha$, teda $\frac{R-h}{R} \geq \frac{1}{n}$, odkiaľ $h \leq (1-\frac{1}{n})R$.

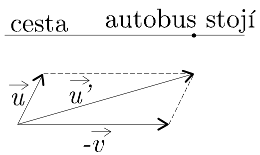
$\boxed{33.}$ Keďže sústava je v pokoji, výslednica všetkých síl a momentov síl pôsobiacich na obruč musí byť nulová. Najvýhodnejšie je zapísať si momentovú vetu vzhľadom na styčný bod obruče a naklonenej roviny.



Rameno tiažovej sily obruče je rovné $R\sin\alpha$, rameno tiažovej sily guličky je rovné $R - R\sin\alpha$, teda platí $MgR = mgR(1-\sin\alpha)$, odkiaľ

$$\sin\alpha = \frac{m}{m+M}$$

$\boxed{34.}$ Základnou fintou riešenia je pohľad na sústavu vo vzťažnej sústave autobusu. V tejto vzťažnej sústave autobus stojí a my sa pohybujeme rýchlosťou $\vec{u}' = \vec{u} + (-\vec{v})$



My máme možnosť meniť smer behu (t.j. "otáčať" šípkou $\vec{u}$). Chceme bežať takým smerom, aby sme autobus dobehli (resp. predbehli). Vo vzťažnej sústave autobusu to znamená, že sa musíme dostať pred neho. Teda hlavným kritériom pri voľbe smeru $\vec{u}$ je to, aby uhol, ktorý zviera $\vec{u}'$ s priamkou autobusu, bol čo najväčší. Pozrime si, ako ovplyvňuje tento uhol voľba smeru $\vec{u}$:

Riešením tejto sústavy dostávame $F = mg/7$.

$\boxed{6.}$ Označme $d = 600\,\mathrm{m}$ vzdialenosť, ktorú je potrebné prekonať. Výsledná rýchlosť plavca $\vec{u}$, ktorou sa pohybuje vzhľadom na breh rieky, je rovná vektorovému súčtu $\vec{u} = \vec{c} + \vec{v}$.

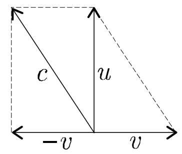
i) Trasa pozdĺž toku rieky:

Keď zálesák pláva pozdĺž toku rieky jeho rýchlosť voči brehu je $c + v$, keď pláva proti prúdu jeho rýchlosť voči brehu je $c - v$. Potrebný čas je potom:

$$t = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = 13,5\,\mathrm{min}$$

ii) Trasa naprieč riekou:

Keďže sa zálesák musí vrátiť na pôvodné miesto, musí plávať šikmo proti prúdu rieky. Z vektorového skladania.



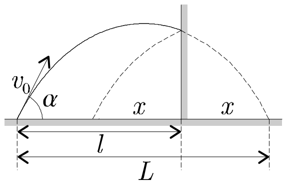
Odtiaľ z Pythagorovej vety:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{c^2 - v^2} = \sqrt{8}\,\mathrm{km.h^{-1}} \\ t &= \frac{2d}{u} \doteq 12,73\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

Pre zálesáka je teda výhodnejšie plávať naprieč riekou. Vyhrá asi o 46 s.

$\boxed{7.}$ Jednou z ciest ako riešiť tento príklad je zapísať si pohybové rovnice jablka a vystrelenej gule a rátať, pri akom uhle sa vyskytnú v nejakom čase v jednom bode. Existuje však aj oveľa jednoduchšia finta. Náboj vykonáva pohyb zložený z rovnomerného priamočiareho pohybu pod uhlom akým bol z dela vystrelený a voľného pádu. Jablko vykonáva iba voľný pád. Oba tieto pády sú identické, čo sa týka prejdenej dráhy, resp. rýchlosti v určitom čase. Preto vzhľadom na jablko sa náboj pohybuje stále rovnomerne priamočiaro. Delostrelec teda musí zamieriť priamo na jablko, teda pod uhlom $\arcsin(\frac{l}{3l}) = \arcsin(\frac{1}{3})$.

$\boxed{8.}$ Dôležité je, že ide o pružnú zrážku so stenou a že platí zákon odrazu. Veľkosť rýchlosti sa teda nezmení a zo zákona odrazu vyplýva, že uhol dopadu bude rovný uhlu odrazu. Ak toto všetko uvážime, uvedomíme si, že po odraze má trajektória guličky presne taký istý tvar akoby tam stena nebola (obr.), len je jej zrkadlovým obrazom (podľa steny).



Potom je už ľahké dopočítať správny výsledok. Pre L platí:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Vzdialenosť x dostaneme ako $x = L - l$. Čo po dosadení dá hľadaný výsledok

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha - l$$

9. Keby ponorka stála, dĺžka signálu bude rovná ct_0. Keďže sa však za dobu vysielania signálu posunie nadol o dĺžku vt_0, dĺžka signálu bude rovná $ct_0 - vt_0$. Dĺžka signálu sa počas pohybu, ani po odraze odo dna nezmení. Keby ponorka pri prijímaní signálu stála, prijme ho za čas $\frac{ct_0 - vt_0}{c}$. Keďže sa však oproti signálu hýbe rýchlosťou v, prijme ho za čas

$$t = \frac{ct_0 - vt_0}{v + c}$$

odkiaľ

$$v = \frac{t_0 - t}{t_0 + t}\, c$$

10. Keďže vieme, že sa má električka pohybovať rovnomerne spomalene, musí pre jej okamžitú rýchlosť v a pre prejdenú dráhu s platiť:

$$\begin{aligned} v &= v_0 - at \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

kde a je spomalenie električky. Odtiaľ po dosadení hodnôt dostaneme, že v čase $t = 2\,\mathrm{s}$ má električka rýchlosť $v = -2\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Električka sa teda v tomto momente už vracia. V tom prípade si ale treba ešte uvedomiť, že už daným miestom raz prešla a to konkrétne v čase $t = \frac{4}{3}\,\mathrm{s}$ (dopočítame aké má električka spomalenie a a potom v druhej rovnici zoberieme za neznámu čas). A v tomto čase mala električka rýchlosť $v = 2\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

31. Vypočítajme najskôr, aké budú napätia a prúdy na kondenzátoroch pred zapnutím spínača. Nech Q_2 a U_2 je náboj a napätie na kondenzátore $2C$ a nech Q_3 a U_3 je náboj a napätie na kondenzátore $3C$. Potom platí

$$\begin{aligned} U_2 + U_3 &= U \\ Q_2 &= Q_3 \end{aligned}$$

Pomocou vzťahov $Q_2 = 2CU$ a $Q_3 = 3CU$ dostávame, že náboje kondenzátorov pred zopnutím spínača sú rovné

$$Q_2 = Q_3 = \frac{6}{5} CU \tag{1}$$

Vypočítajme teraz náboje na kondenzátoroch po zopnútí spínača. Náboje a napätia budeme teraz označovať čiarkovanúmi písmenami. Kondenzátory C a $2C$ budú mať rovnaké napätie, t.j.

$$U_1' = U_2' \tag{2}$$

Náboj z kondenzátora $3C$ sa medzi ne prerozdelí, t.j.

$$Q_3' = Q_1' + Q_2' \tag{3}$$

Nakoniec uvážime, že súčet napätí v spodnej slučke je rovný napätiu zdroja, t.j.

$$U_2' + U_3' = U \tag{4}$$

S využitím rovníc (2)-(4) a pomocou $Q_1' = CU_1'$, $Q_2' = 2CU_2'$, $Q_3' = 3CU_3'$ dostávame

$$Q_2' = CU \tag{5}$$

Takže s využitím (1) dostávame, že ampérmetrom pretečie náboj

$$\Delta Q = Q_1' - Q_2' = \frac{1}{5} CU$$

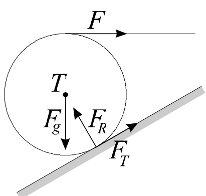
32. Aby lúč nevyletel z kvapaliny do vzduchu, musí byť jeho uhol dopadu väčší ako $\alpha = \arcsin(\frac{1}{n})$. Pri ponáraní budú zrejme kritické tie lúče, ktoré budú na hladinu dopadať s minimálnym uhlom dopadu. To sú zrejme tie, čo vychádzajú z gule čo najtesnejšie pod hladinou, idú v smere dotyčnice ku guli a sú vo vertikálnej rovine. (pozri obrázok, L je kritický lúč).

28. Najprv sa pozrime na situáciu bez zrkadla. Vzdialenosť predmetu od šošovky je 5 cm. Označme b vzdialenosť obrazu od šošovky. Potom podľa zobrazovacej rovnice platí $\frac{1}{b} + \frac{1}{5\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{3\,\mathrm{cm}}$, odkiaľ $b = 7{,}5$ cm. Teraz si do toho pridajme zrkadlo. Označme vzdialenosť obrazu od zrkadla x. Zrejme $x + 5\,\mathrm{cm} = 7{,}5$ cm, čiže $x = 2{,}5$ cm. Vzdialenosť predmetu od obrazu je potom $10\,\mathrm{cm} - x = 7{,}5$ cm.

29. Predpokladajme, že vodu v jednom z ramien stlačíme smerom dolu o malú dĺžku x. Voda v opačnom ramene tým stúpne o x. Celkovo voda v U-trubici bude v rovnováhe s výnimkou malého stĺpca vody s výškou $2x$, ktorý bude v opačnom ramene než je to, v ktorom sme stlačili vodu. Na tento stĺpec pôsobí gravitačná sila veľkosti $2xS\rho g$. Sila je priamo úmerná výchylke, jedná sa teda o harmonické kmity. Pre harmonický oscilátor platí $F = kx$ kde F je sila, ktorá spôsobuje zrýchlenie telesa pri výchylke o x. Vidíme, že v našej sústave je koeficient tuhosti rovný $k = 2S\rho g$. Pri kmitaní vody v U-trubici, musí kmitať všetka voda v nej, celkovo teda hmotnosť $V\rho$. Keď to dosadíme do vzorca pre periódu harmonických kmitov oscilátora, dostávame

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{V\rho}{2S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{V}{2Sg}}$$

30. Aby bol valec v pokoji, musí sa výslednica všetkých síl a aj výslednica všetkých momentov síl rovnať nule. Na valec pôsobí sila lana F, tiažová sila valca F_g, sila reakcie podložky F_r a trecia sila F_t.



Zrejme najvýhodnejšie bude napísať momentovú vetu vzhľadom na styčný bod podložky a valca. Vtedy majú nenulový moment len dve sily (tiažová sila valca a sila F). Zapísaním rovnosti týchto momentov síl dostávame

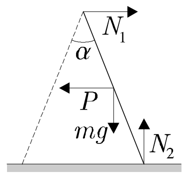
$$F(R + R\cos\alpha) = mgR\sin\alpha$$

odkiaľ

$$F = mg\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Rýchlosť električky vo vzdialenosti 8 m od spustenia spätného chodu je teda $v = \pm 2\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

11. Zapíšme rovnice, vyjadrujúce rovnováhu, pre jedno rameno rebríka. Na rameno pôsobia štyri sily: gravitačná sila mg, sila pružiny $P = k\Delta x = kL\sin(\alpha/2)$, sila zo strany druhého ramena rebríka N_1, a sila zo strany podložky N_2.



Keďže rebrík je v rovnovážnom stave, súčet síl vo vodorovnom aj zvislom smere je nulový:

$$kL\sin\frac{\alpha}{2} = N_1 \qquad (1)$$
$$mg = N_2 \qquad (2)$$

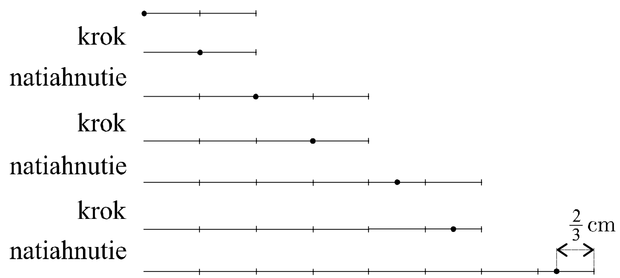
Výsledný moment síl vzhľadom na ľubovoľný bod je nulový – je výhodné zvoliť si stred rebríka

$$N_1\frac{L}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = N_2\frac{L}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

Riešením rovníc (1)-(3) dostávame

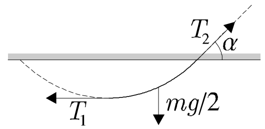
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{mg}{kL}$$

12. Pri krokovaní si treba len uvedomiť, že ak je mravček pred natiahnutím v polovici lana, musí byť po natiahnutí tiež v polovici lana. Takže:



Na koniec lana sa dostane mravček za $3\frac{2}{3}$ s.

$\boxed{13.}$ Budeme pracovať len s jednou polovicou retiazky. Zakreslime si sily, ktoré na ňu pôsobia:



Jedná sa o tri sily: hľadaná sila napätia T_1, ktorá pôsobí vodorovne, tiažová sila polovice retiazky $mg/2$, a sila od bodu úchytu T_2, ktorá zviera s horizontálou uhol α. Tieto sily sú v rovnováhe, t.j. pre ich zvislé a vodorovné priemety platí:

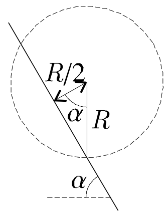
$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \cos\alpha && (1) \\ mg/2 &= T_2 \sin\alpha && (2) \end{aligned}$$

Riešením rovníc (1), (2) dostávame

$$T_1 = \frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Všimnime si, že ak budeme konce retiazky od seba vzďaľovať, aby bola retiazka čo najvodorovnejšia ($\alpha \to 0$), vtedy $T_1 \to \infty$, čo zodpovedá našej intuícii, že retiazka bude silno napínaná.

$\boxed{14.}$ Guľa sa vykotúľa z jamky v kritickom okamihu, keď jej stred (ťažisko) sa bude nachádzať nad spodnou hranou jamky. Toto je okamih labilnej rovnováhy. Ak uhol naklonenej roviny zväčšíme, guľa sa z jamky vykotúľa. Kritický uhol α vypočítame podľa nasledovného obrázku:



Vidíme, že $\cos\alpha = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$, teda $\alpha = 60°$.

$\boxed{15.}$ Rýchlosť prvej gule tesne pred nárazom získame zo zákona zachovania energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

je gravitačná konštanta. Nech polomer planétky je R. Potom platí

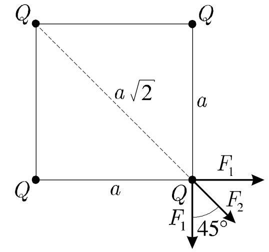
$$\frac{\varkappa M}{R^2} = 100\,\frac{\varkappa M}{(R+450)^2}$$

po úprave dostaneme

$$99R^2 - 900R - 202500 = 0$$

odkiaľ $R = 50\,(\mathrm{km})$. Druhý koreň kvadratickej rovnice je záporné číslo a teda nemá fyzikálny zmysel.

$\boxed{26.}$ V prvom rade si treba uvedomiť, že ak vypočítam nejakú hodnotu pre jednu niť, zo symetrie úlohy vyplýva, že rovnaká sila bude napínať aj ostatné nite. Na jeden náboj pôsobia tri sily od zvyšných troch nábojov (viď. obr.).



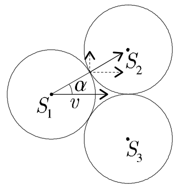
A to dve rovnako veľké sily $F_1 = k\frac{Q^2}{a^2}$ a menšia sila $F_2 = k\frac{Q^2}{2a^2}$. Keďže hľadáme akou silou sú napínané nite, rozložíme sily do smerov pozdĺž nití. Pre jednu takúto silu dostaneme:

$$F = F_1 + F_2\cos 45° = k\,\frac{Q^2}{a^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

kde $k = 1/(4\pi\varepsilon)$. A to je zároveň výsledná sila akou je napínaná daná niť.

$\boxed{27.}$ Príklad sa podobá na obyčajný šikmý vrh, len s tým rozdielom, že vodorovná zložka rýchlosti nie je konštantná. Ale teleso je urýchľované v tomto smere silou $F = QE$. Otázka zo zadania sa dá preformulovať aj inak. Pýtame sa vlastne, aká musí byť intenzita poľa E, aby malo teleso v najvyššom bode dráhy takú istú rýchlosť ako na začiatku letu. A keďže v najvyššom bode dráhy má teleso len vodorovnú zložku rýchlosti, pre ktorú navyše platí $v = v_0\cos\alpha + \frac{QE}{m}T$, stačí len zistiť za aký čas T sa naše teleso dostane do najvyššieho bodu dráhy. A to vieme z klasickej úlohy o šikmom vrhu $T = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$. Potom vieme napísať:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0\cos\alpha + \frac{QE}{m}\frac{v_0\sin\alpha}{g} \\ E &= \frac{mg}{Q}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}$$



Druhá z narazených gúľ potom z dôvodov symetrie dostane impulz hybnosti so zložkami p_x, $-p_y$. Zapíšme teraz zákon zachovania kinetickej energie pre gule, využijeme pri tom vzťahy

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}$$

kde m je hmotnosť telesa, v, p sú jeho rýchlosť a hybnosť, v_x, v_y, p_x, p_y sú x-ové a y-ové zložky jeho rýchlosti a hybnosti. Máme teda

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v - \frac{2p_x}{m}\right)^2}{2} + 2\,\frac{p_x^2}{2m} + 2\,\frac{p_y^2}{2m}$$

výraz $v - \frac{2p_x}{m}$ označuje vlastne rýchlosť narážajúcej gule po zrážke. Pri zrážke zvierala spojnica stredov narážajúcej gule a jednej z narazených so smerom rýchlosti narážajúcej gule uhol 30°. Pre p_x, p_y teda platí $\dfrac{p_y}{p_x} = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a teda $p_y = \dfrac{p_x}{\sqrt{3}}$. Zo zákona zachovania energie, ktorý sme zapísali, za predpokladu $p_x \neq 0$, dostávame $p_x = \frac{3}{5}\,vm$. Dosadíme do vzťahu pre p_y, máme $p_y = \frac{\sqrt{3}}{5}\,vm$. Pre vzdialenosť narazených gúľ po zrážke bude rozhodujúca zrejme iba y-ová zložka ich rýchlosti. Tá má veľkosť $v_y = \dfrac{p_y}{m} = \frac{\sqrt{3}}{5}\,v$. Vzdialenosť gúľ v čase t bude teda $2\,\frac{\sqrt{3}}{5}\,vt$

$\boxed{24.}$ Pre kapacitu kondenzátora ktorého dosky majú plochu S, sú od seba vzdialené d a prostredie medzi nimi má relatívnu permitivitu ε_r (teda má permitivitu $\varepsilon_r\varepsilon_0$), platí $C = \dfrac{S\varepsilon_r\varepsilon_0}{d}$. Keďže v našom prípade $\varepsilon_r \doteq 1$, máme $C = \dfrac{S\varepsilon_0}{d}$. Keď polovicu kondenzátora zaplníme vodou, je to to isté, akoby sme kondenzátor rozdelili na dva paralelne zapojené kondenzátory s plochou dosiek $\frac{1}{2}S$. Výsledná kapacita bude súčtom kapacít týchto dvoch kondenzátorov, teda

$$\frac{\frac{S}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0}{d} + \frac{\frac{S}{2}\varepsilon_0}{d} = \frac{S.\varepsilon_0}{d}\,\frac{\varepsilon_r + 1}{2} = C\,\frac{\varepsilon_r + 1}{2}$$

$\boxed{25.}$ Pre gravitačne zrýchlenie platí $g = \dfrac{\varkappa M}{l^2}$, kde M je hmotnosť planétky, l je vzdialenosť miesta v ktorom nás zrýchlenie zaujíma od stredu platnétky a $\varkappa$

V priebehu zrážky sa časť energie premení na teplo, ale hybnosť sa zachová, teda

$$mv = 2mu \tag{2}$$

kde u sme označili rýchlosť "zlepenca" po zrážke. Jeho maximálnu výšku h' vypočítame pomocou zákona zachovania energie:

$$\frac{1}{2}(2m)u^2 = (2m)gh' \tag{3}$$

Riešením rovníc (1)-(3) dostávame $h' = h/4$.

$\boxed{16.}$ Výška ťažiska je daná vzťahom

$$h_T = \frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i} = \frac{0.m + 4m.\frac{h}{2}}{5m} = \frac{2}{5}\,h$$

Prvý člen v čitateli reprezentuje základňu (vo výške h), druhý člen reprezentuje 4 bočné steny hmotností m s výškou ťažiska $\frac{h}{2}$.

$\boxed{17.}$ Keď bude gulička prechádzať najspodnejšou polohou, bude mať rýchlosť v, ktorú získame zo zákona zachovania energie

$$mgl = \frac{1}{2}\,mv^2 \tag{1}$$

Po zachytení o klinec sa zmení polomer otáčania na hodnotu $l - x$ a sila napínajúca niť bude (uvažujúc už rovno maximálnu hodnotu)

$$T = m\,\frac{v^2}{l - x} \tag{2}$$

Riešením rovníc (1), (2) dostávame

$$x = l\left(1 - \frac{2mg}{T}\right)$$

Pre hodnoty $T < 2mg$ sa niť pretrhne ešte pred zvislou polohou.

$\boxed{18.}$ Najskôr si ujasnime, aký prúd vlastne prechádza obvodom s vonkajším odporom R, ak budeme uvažovať aj vnútorný odpor zdroja R_0. Dôležité je vedieť, že vnútorný odpor zdroja je vlastne efektívny odpor, cez ktorý tečie prúd. Prúd prechádzajúci obvodom je $I = U/(R + R_0)$, a teda výkon uvoľnený na odpore R je rovný

$$P = RI^2 = R\left(\frac{U}{R + R_0}\right)^2$$

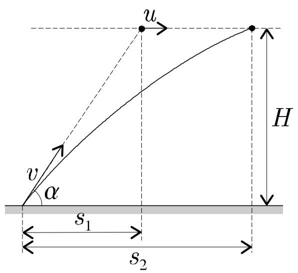
V našom prípade sú výkony na vonkajšom odpore pre hodnoty R_1 a R_2 rovnaké, teda

$$R_1\left(\frac{U}{R_1+R_0}\right)^2 = R_2\left(\frac{U}{R_2+R_0}\right)^2$$

odkiaľ po úpravách dostávame $R=\sqrt{R_1R_2}$.

19. Uvažujme, čo sa stane za veľmi malý čas Δt. Kolenom pretečie voda s hmotnosťou $\Delta tQ\rho$. Táto voda mala pred zmenou smeru v kolene hybnosť $\Delta tQ\rho v$ orientovanú smerom dole. Po prechode kolenom bude mať hybnosť rovnako veľkú, orientovanú smerom doprava. Vektorový rozdiel hybností má teda podľa Pytagorovej vety veľkosť $\sqrt{2}\,\Delta tQ\rho v$. Koleno túto zmenu hybnosti spôsobilo tým, že po čas Δt pôsobilo na tento kúsok vody silou F. To znamená $\sqrt{2}\,\Delta tQ\rho v = F\Delta t$, odkiaľ $F=\sqrt{2}\,Q\rho v$.

20. Na obrázku je stručne znázornená situácia.



Ak začneme čas počítať od okamihu hodu, potom označíme T okamih, keď pytliak trafil kačku. Za tento čas preletela kačka vzdialenosť $s_2=uT$. Aby kameň zasiahol kačku musí za ten istý čas preletieť vzdialenosť $s_1+s_2=Tv\cos\alpha$. Ak teraz uvážime $s_1=\frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}$, môžeme napísať:

$$\begin{aligned} s_1+s_2 &= v\cos\alpha T \\ \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}+uT &= v\cos\alpha T \qquad (1) \end{aligned}$$

Ďalej pre výšku kačky platí:

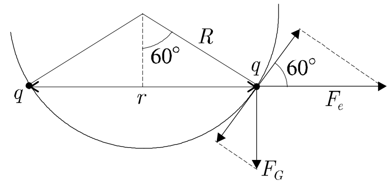
$$H = v\sin\alpha T-\frac{1}{2}gT^2 \qquad (2)$$

Aby bola úloha fyzikálne riešiteľná musí platiť $v\cos\alpha>u$. Potom riešením sústavy rovníc (1) a (2) získame:

$$H\left(\frac{g}{2\,(v\sin\alpha-u\operatorname{tg}\alpha)}H-u\operatorname{tg}\alpha\right)=0$$

Z toho vidieť, že ak má pytliak trafiť kačku, tá musí letieť vo výške $H=\frac{2u\operatorname{tg}^2\alpha}{g}\,(v\cos\alpha-u)$.

21. Na korálku tri sily: tiažová, elektrická a normálová sila zo strany obruče:



Keďže sa korálka nepohybuje v smere kolmom na polomer, musia byť priemety tiažovej a elektrickej sily v tomto smere rovnako veľké:

$$F_G\sin 60^\circ = F_e\cos 60^\circ$$

Označme r vzdialenosť medzi nábojmi, potom môžeme túto rovnicu napísať v tvare

$$mg\sin 60^\circ = k\,\frac{q^2}{r^2}\,\cos 60^\circ$$

pričom $r=2R\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,R$. Úpravou dostaneme pre náboj hodnotu

$$q=R\sqrt{\frac{3\sqrt{3}\,mg}{k}}=R\sqrt{12\sqrt{3}\,\pi\varepsilon mg}$$

22. Keďže vieme, že sa má električka pohybovať rovnomerne spomalene, musí pre jej okamžitú rýchlosť v a pre prejdenú dráhu s platiť:

$$\begin{aligned} v &= v_0-at \\ s &= v_0t-\frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

kde a je spomalenie električky. Odtiaľ po dosadení hodnôt dostaneme, že v čase $t=2\,\mathrm{s}$ má električka rýchlosť $v=-2\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Električka sa teda v tomto momente už vracia. V tom prípade si ale treba ešte uvedomiť, že už daným miestom raz prešla a to konkrétne v čase $t=\frac{4}{3}\,\mathrm{s}$ (dopočítame aké má električka spomalenie a a potom v druhej rovnici zoberieme za neznámu čas). A v tomto čase mala električka rýchlosť $v=2\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Rýchlosť električky vo vzdialenosti 8 m od spustenia spätného chodu je teda $v=\pm 2\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

23. Označme p_x, p_y x-ovú a y-ovú zložku impulzu hybnosti, ktorý narážajúca guľa predá jednej z dvoch narazených. (Impulz hybnosti je rozdiel medzi hybnosťou telesa po zrážke a pred zrážkou).