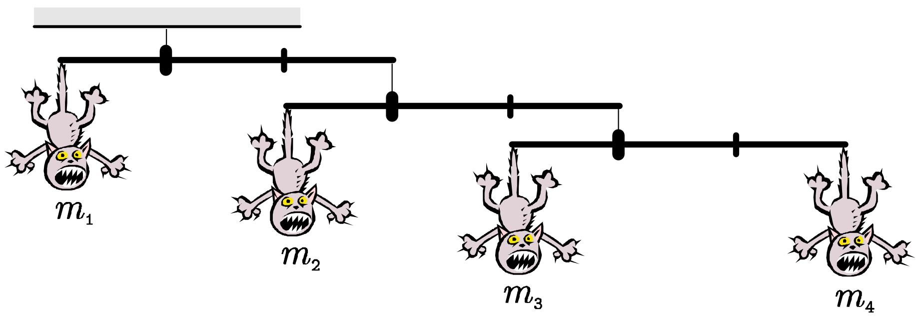
Kapitola 1

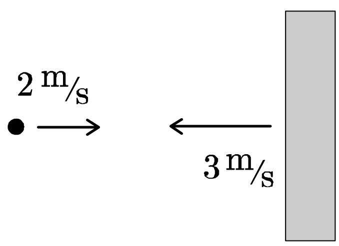
Zadania

$\boxed{1.}$ Určitá sila udelí telesu s hmotnosťou m_1 zrýchlenie $12\,\mathrm{m/s^2}$, tá istá sila udelí telesu s hmotnosťou m_2 zrýchlenie $2\,\mathrm{m/s^2}$. Aké zrýchlenie udelí táto sila telesu s hmotnosťou $m_1 + m_2$?

$\boxed{2.}$ Na obrázku je znázornená sústava troch tyčí, ktoré sú uchytené v jednej tretine svojej dĺžky. Na konci tyčí sú zavesené mačky rôznych hmotností. aký musí byť pomer hmotností $m_1 : m_4$ prvej a štvrtej mačky, aby bola celá sústava v rovnováhe?



$\boxed{3.}$ Gulička nalietava vodorovne rýchlosťou $2\,\mathrm{m/s}$ na ťažkú stenu, ktorá sa proti nej pohybuje rýchlosťou $3\,\mathrm{m/s}$. Aká bude rýchlosť guličky po odraze, ak je zrážka dokonale pružná?



$\boxed{4.}$ Teplovzdušný balón hmotnosti M klesá nadol so zrýchlením a. Akú časť hmotnosti balóna (vo forme sáčkov s pieskom) treba z balóna vyhodiť, aby stúpal so zrýchlením a nahor?

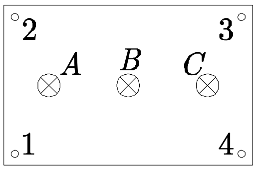
$\boxed{5.}$ Cyril chce byť rekordér a zabehnúť 100 metrov za 9 sekúnd. Vypracoval si aj plán svojho behu: Prvú polovicu času rovnomerne zrýchľuje, potom udrží tempo a je to! Akou rýchlosťou vbehne do cieľa?

$\boxed{6.}$ Do vane priteká voda z dvoch kohútikov. Prvým z nich tečie voda s teplotou 12 °C v množstve 7 litrov za minútu. Druhým pritekajú za minútu 4 litre vody s teplotou 60 °C. Ak bol kohútik so studenou vodou otvorený 8 minút, ako dlho musí byť otvorený kohútik so studenou vodou, ak chceme získať vodu s teplotou 36 °C?

$\boxed{7.}$ Vrcholy štvorca spojíme každý s každým odporom veľkosti R. Aký odpor nameriame medzi protiľahlými vrcholmi tohto štvorca?

$\boxed{8.}$ Aká maximálna časť retiazky dĺžky l môže presahovať zo stola, aby sa ešte nezošmykla? Koeficient trenia retiazky o stôl je μ.

$\boxed{9.}$ Na krabičke sú štyri svorky – 1, 2, 3, 4 a tri žiarovky – A, B a C tak, ako na obrázku. Ak pripojíme zdroj napätia medzi svorky 2 a 3, svieti žiarovka B. Ak ho pripojíme medzi svorky 1 a 3, svietia A a B, ak medzi 2 a 4, svietia B a C. Nakreslite schému zapojenia. Vodiče v skrinkách majú nulový odpor.

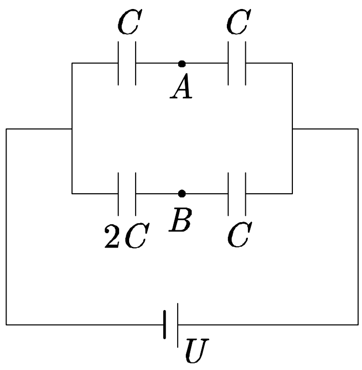


$\boxed{10.}$ Cez kladku je prevesené lano na koncoch ktorého sú zavesené telesá s hmotnosťami m_1, m_2. Akou silou je napínané lano?

$\boxed{11.}$ Objem bubliny pri vyplávaní je 3-krát väčší ako bol na dne jazera. Aká je hĺbka jazera? Jeho teplotu uvažujte rovnakú v každej hĺbke.

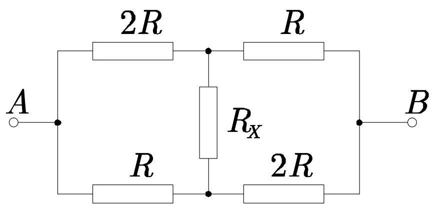
$\boxed{12.}$ Cyklista stúpa do kopca so sklonom 5° maximálnou rýchlosťou 40 km/h. Aká bude jeho maximálna rýchlosť, ak bude stúpať do svahu so sklonom 20°? Odpor vzduchu, bicykla ako aj valivé trenie kolies o vozovku zanedbajte.

$\boxed{13.}$ Na obrázku je schéma kondenzátorov pripojených k zdroju jednosmerného napätia U. Vypočítajte napätie medzi bodmi A a B.



$\boxed{14.}$ Na prepravníku auta je naložená bedňa tvaru kvádra so štvorcovou podstavou s dĺžkou hrany d a výškou h. Aká je najväčšia hodnota tejto výšky, aby sa bedňa pri zrýchľovaní auta šmýkala, ale neprevracala? Koeficient trenia medzi bedňou a podložkou je μ.

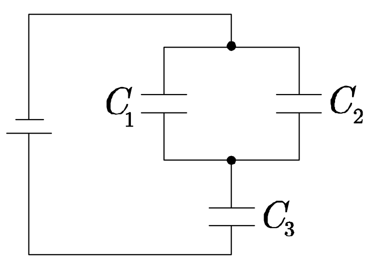
$\boxed{15.}$ Do schémy na obrázku vkladáme na miesto odporu R_X odpory s rôznou hodnotou a meriame celkový odpor medzi bodmi A a B. V akom rozsahu ich nameriame – aká bude minimálna a maximálna takto dosiahnutá hodnota?



$\boxed{16.}$ Tarzan stojí na okraji brala a v rukách zviera svoju lianu dĺžky R. Húpne sa na nej tak, že najnižší bod jeho trajektórie je o h metrov nižšie ako bralo, na ktorom Tarzan stál. Aká musí byť najmenšia pevnosť liany, pri ktorej táto nepraskne a udrží kráľa pralesa pri jeho lete? Hmotnosť Tarzana je m.

$\boxed{17.}$ Priehrada má výpusty umiestnené tesne nad dnom. Pri prietoku Q [m^3/s] a výpustoch otvorených na polovicu siaha voda do výšky h. Aký najväčší prietok je schopný vydržať bez úhony prierada, ktorej výška je $2h$?

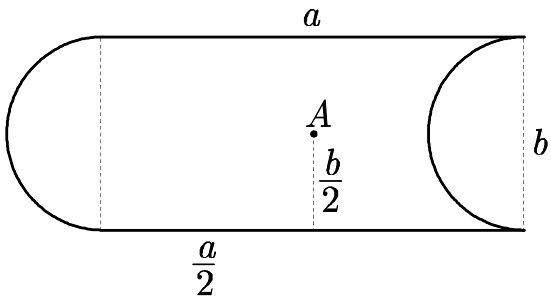
$\boxed{18.}$ Koľkokrát sa zmení náboj na kondenzátore C_3, ak sa kondenzátor C_2 prebije?



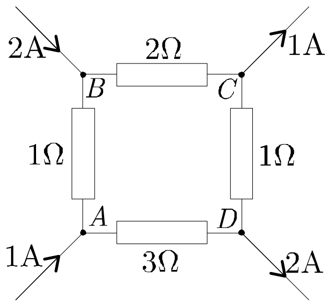
$\boxed{19.}$ Aký je pomer kinetickej a potenciálnej energie telesa, konajúceho harmonický kmitavý pohyb, v okamihu, keď je od rovnovážnej polohy vzdialené štvrtinu amplitúdy?

$\boxed{20.}$ Aký najkratší tieň počas roka vrhá v Bratislave zapichnutá tyč s výškou h? Zemepisná šírka Bratislavy je δ, sklon zemskej osi k rovine zemskej dráhy je α.

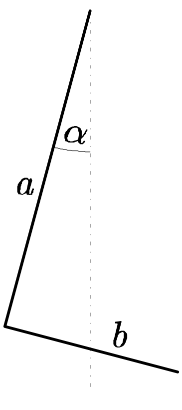
$\boxed{21.}$ Nájdite vzdialenosť ťažiska útvaru na obrázku od bodu A (stred obdĺžnika).



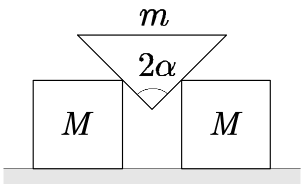
$\boxed{22.}$ Aké je potenciálový rozdiel (napätie) medzi uzlami A a B na obrázku?



$\boxed{23.}$ Zalomená tyč tvaru L s ramenami z rovnakého materiálu dĺžky a, b je upevnená v koncovom bode ramena a tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, prechádzajúcej bodom upevnenia kolmo na rovinu určenú ramenami tyče. Aký uhol zviera rameno a zalomenej tyče so zvislým smerom k rovnovážnej polohe?



$\boxed{24.}$ Na vodorovnom povrchu stoja dve rovnaké kocky hmotnosti M. Medzi kockami sa nachádza klin hmotnosti m s vrcholovým uhlom 2α. Vypočítajte zrýchlenia kociek. Trenie neuvažujte.

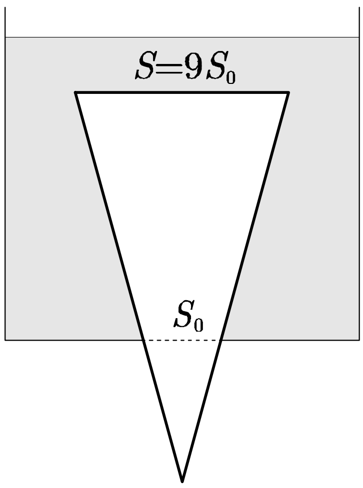


$\boxed{25.}$ Akou najväčšou rýchlosťou v môžeme prechádzať klopenou zátačkou? Polomer zatáčky je R, jej klopenie α, tiažové zrýchlenie g a koeficient trenia o podložku je μ.

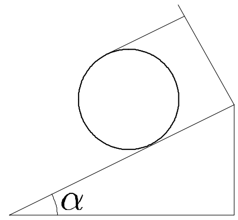
$\boxed{26.}$ Veľká guľa je zhotovená zo skla s indexom lomu $n = 2$. Sedí na nej pavúk. V akej vzdialenosti (meranej po povrchu gule) od pavúka sa môže nachádzať mucha tak, aby ju pavúk cez sklo nezbadal? Rozmery hmyzu zanedbajte.

$\boxed{27.}$ Šialený bungeejumper Herbert si vybral na skok lano s neznámou dĺžkou (meranou bez záťaže). Skočil z mosta vo výške h nad cestou. Lano ho ubrzdilo iba tesne pred tvrdým dopadom na betón. Keď ním lano prestalo hompáľať hore-dole, úbožiak Herbert ostal visieť vo výške y nad cestou. Aká bola dĺžka lana?

$\boxed{28.}$ Vo vaničke je kruhový otvor s plochou S_0. Doňho vložíme kužeľ s plochou podstavy $S = 9S_0$ (obr.). Pri akej najväčšej hustote kužeľa ho môžeme doliatím vody zdvihnúť? Hustota vody je ρ_0.



$\boxed{29.}$ Na valec je namotaná niť, koniec ktorej je uchytený na vrchu naklonenej roviny (obr.). Koeficient trenia valca o podložku je μ. Pri akej maximálnej hodnote uhla α valec nebude skĺzavať dole po naklonenej rovine?



$\boxed{30.}$ Po naklonenej rovine s uhlom sklonu α bol smerom nahor vystrelený puk. Po určitom čase sa puk zastavil a začal sa kĺzať nadol. Určte koeficient trenia μ medzi pukom a podložkou, ak čas návratu puku do východiskového bodu je n-krát väčší ako čas jeho výstupu.

$\boxed{31.}$ Kyvadlo dĺžky l zavesené v kabíne lietadla vykonáva malé harmonické kmity. Vypočítajte periódu malých kmitov T kyvadla, ak sa lietadlo pohybuje v horizontálnom smere so zrýchlením a.

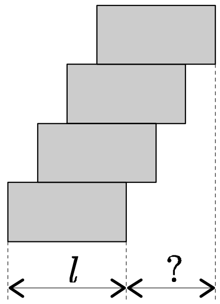
$\boxed{32.}$ V úzkej sklenenej rúrke všade rovnakého prierezu a na jednom konci zatavenej je vzduch uzavretý stĺpcom ortuti dĺžky l_0. Keď je rúrka v zvislej polohe uzavretým koncom hore, dĺžka vzdušného stĺpca bude l_1; keď je uzavretý koniec dole, dĺžka vzdušného stĺpca bude l_2. Aká bude dĺžka vzdušného stĺpca l_3, keď rúrku s uzavretým koncom hore odkloníme od zvislej polohy o uhol α?

$\boxed{33.}$ Na vozíku stojí valcová nádoba naplnená vodou do výšky h. V nádobe sú na protiľahlých stranách dva rovnaké ventily s otvormi s plošnými obsahmi S. Jeden ventil je vo výške h_1 nad dnom nádoby, druhý ventil vo výške h_2. Aká veľká sila F a v ktorom smere musí pôsobiť na vozík, aby sa nepohyboval, keď sú obidva ventily otvorené.

$\boxed{34.}$ Na sklenenú doštičku s indexom lomu n dopadá svetelný lúč. Pod akým uhlom dopadol, keď lomený lúč zviera s odrazeným lúčom na rozhraní uhol γ?

$\boxed{35.}$ Minimálna rýchlosť, ktorou strela prebije uchytenú dosku, je v_0. S akou minimálnou rýchlosťou prebije strela neuchytenú dosku? Hmotnosť strely je m, hmotnosť dosky je M, guľka vletí do stredu dosky.

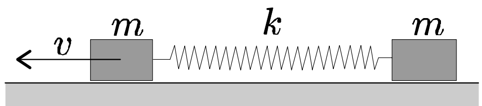
$\boxed{36.}$ S akým najväčším presahom môžeme na seba uložiť štyri tehly dĺžky l?



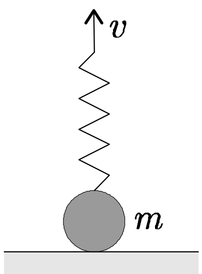
37. Martinko sa vozí na kolotoči, jeho rýchlosť v sedačke zavesenej na tyči dĺžky l je v. kolotoč nemá vodorovnú časť ramien, lano je pripevnené priamo k otáčajúcej sa tyči. Aká je uhlová rýchlosť otáčania kolotoča?

38. Kocka s dĺžkou hrany a je položená na vodorovnej podložke. Chceme ju premiestniť do vzdialenosti a. Pri akom najväčšom koeficiente trenia medzi kockou a podoložkou (μ) vykonáme pri ťahaní kocky po podložke menšiu prácu než pri prevaľovaní?

39. Na vodorovnej podložke sú položené 2 závažia hmotnosti m spojené pružinou tuhosti k. Závažiu 1 udelíme rýchlosť v smerom od závažia 1. Aký musí byť koeficient trenia závaží o podložku, aby sa závažie 2 počas pohybu závažia 1 nepohlo?



40. Na stole leží guľôčka hmotnosti m, ku ktorej je pripevnená pružinka tuhosti k. Pružinku začneme dvíhať za voľný koniec kolmo nahor rýchlosťou v. Nájdite maximálne predĺženie pružinky počas pohybu, ak jej počiatočná deformácia bola nulová.



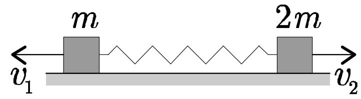
41. V láske neštastný Mirko chce kameňom trafiť Janku a tak upútať jej pozornosť. Janka stojí na kopci, jej vodorovná vzdialenost od Mirka je l a navyše stojí o h vyššie ako on. Akou minimálnou rýchlosťou musí Mirko hodiť kameň, ak ju chce trafiť?

42. 20 minútová gramofónová platňa (20 min = 1 strana) sa otáča s periódou 3 s. Polomer platne je 15 cm, polomer vnútorného kruhu, ktorý už neobsahuje drážky je 5 cm. Približne akú dráhu prejde ihla po drážkach platne, ak počúvame celú 1 stranu?

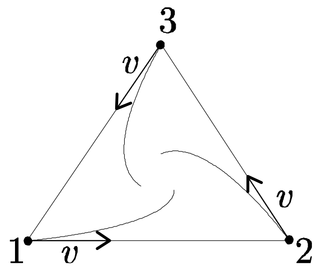
43. Družica obieha okolo Zeme po kruhovej dráhe vo vzdialenosti R od jej stredu. Narazí do nej meteorit s hmotnosťou desaťkrát menšou ako je hmotnosť družice tak, že jeho rýchlosť je kolmá na jej, pritom v družici uviazne. Nová

dráha družice sa približuje k stredu Zeme na najmenšiu vzdialenosť $R/2$. Aká bola rýchloť u meteoritu?

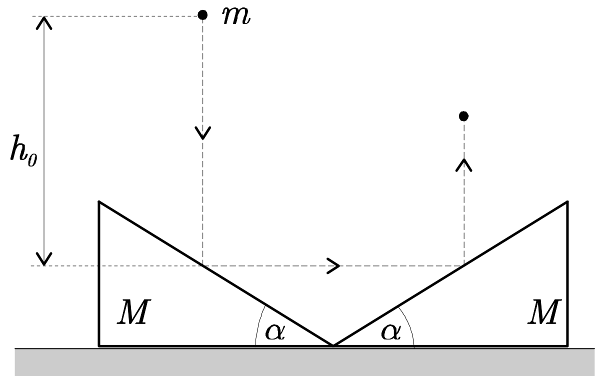
44. Dve závažia s hmotnosťami m a $2m$ sú spojené pružinou tuhosti k, ktorá má na začiatku pokojovú dĺžku. Udelíme im rýchlosti v_1, v_2 tak, ako na obrázku. Aké bude maximálne predĺženie pružiny?



45. Traja psy sa hrajú na naháňačku: postavia sa do rovnostranného trojuholníka s dĺžkou a, ktorého vrcholy označme 1, 2, 3. Pes 1 beží vždy na psa 2, pes 2 vždy na psa 3 a pes 3 vždy na psa 1. Za aký čas sa stretnú v strede trojuholníka, ak každý beží rovnakou rýchlosťou v?



46. Na horizontálnej rovine ležia dva kliny s uhlami sklonu $\alpha = 45°$, každý hmotnosti M (viď. obr.). Z výšky h_0 voľne padá guľôčka hmotnosti m, ktorá narazí najprv na šikmú plochu jedného klina a odrazí sa vartikálne nahor. Nájdite výšku, do ktorej guľôčka po tomto náraze vystúpi! Predpokladá sa, že obidva nárazy sú pružné a že trenie medzi klinmi a rovinou možno zanedbať.



47. Majme nabitý kondenzátor kapacity C_0 s napätím U_0. Pripojíme ho k nenabitému kondenazátoru kapacity C_1. Potom ho od kondenzátora C_1 odpojíme a pripojíme ho k nemu „opačne”, t.j.prehodíme drôtiky. Určite výsledné napätie na kondenzátore C_0.

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Budeme túto úlohu riešiť pre všeobecné zrýchlenia a_1, a_2. Zo zadania vyplýva, že

$$\begin{aligned} F &= m_1 a_1, & (1) \\ F &= m_2 a_2. & (2) \end{aligned}$$

Ak zrýchlenie spojeného telesa označíme a, potom platí

$$F = (m_1 + m_2)a. \tag{3}$$

Túto sústavu môžeme riešiť tak, že rovnicu (3) upravíme pomocou (1) a (2) na tvar

$$F = \left(\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}\right) a,$$

odkiaľ

$$a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{12}{7}\,\mathrm{m/s^2}.$$

$\boxed{2.}$ Úvahu treba začať mačkami 3 a 4. Aby boli tieto v rovnováhe, musí platiť, že momenty síl sú v rovnováhe, teda $m_3 \cdot l/3 = m_4 \cdot 2l/3$, a pre pomer hmotností platí $m_3 = 2m_4$. Teda ľavá mačka musí byť 2-krát ťažšia ako pravá. Analogicky $m_2 = 2(m_3 + m_4) = 6m_4$. A konečne $m_1 = 2(m_2 + m_3 + m_4) = 18m_4$.

$\boxed{3.}$ Ak sa dáme do vzťažnej sústavy spojenej so stenou, bude sa nám zdať, že sa gulička pohybuje proti nám rýchlosťou $5\,\mathrm{m/s}$. Keďže je stena veľmi ťažká, neprejaví sa na nej náraz guličky a keďže je zrážka dokonale pružná, bude sa gulička v našej vzťažnej sústave naďalej pohybovať rýchlosťou 5 m/s, ale teraz to bude smerom od steny. Ak chceme znova prejsť do vzťažnej sústavy spojenej so Zemou musíme k rýchlosti guličky, ešte pripočítať rýchlosť steny. Preto je rýchlosť guličky, po odraze od steny vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou, 8 m/s.

$\boxed{4.}$ Ak balón klesá nadol, je zrejmé, že gravitačná sila prevažuje nad silou F, ktorá nadľahčuje balón. Pre silu F môžeme písať:

$$Ma = Mg - F. \tag{1}$$

Ak naopak balón stúpa, prevažuje nadľahčovacia sila F nad gravitačnou. Ešte si treba uvedomiť, že odhodením sáčkov sa nezmení nadľahčovacia sila F a že odhodené sáčky mali hmotnosť m a preto má balón teraz hmotnosť $M - m$. Potom:

$$(M - m)\,a = F - (M - m)g. \tag{2}$$

Riešením rovníc (1) a (2) dostávame

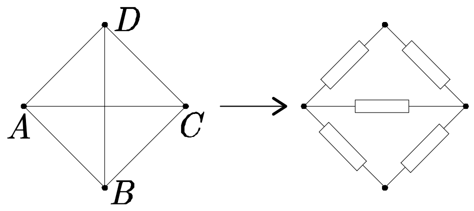
$$m = \frac{2Ma}{a + g}.$$

$\boxed{5.}$ Označme zrýchlenie Cyrila počas prvej polovice času a, podľa zadania sa nemení. Celkové trvanie behu je t, preto počas prvej polovice tohto času, bežiac rovnomerne zrýchlene (vzorec $s = 1/2\,aT^2$ poznáme), prejde Cyril dráhu $s_1 = a(t/2)^2/2 = at^2/8$. Ak označíme jeho rýchlosť na konci tohto času v, zrejme musí platiť $v = at/2$. Ak toto dosadíme do vyjadrenia s_1, dostaneme $s_1 = vt/4$. Zvyšnú časť času beží Cyril podľa zadania nezmenenou rýchlosťou do cieľa. Ubehne takto dráhu $s_2 = vt/2$. Spolu teda prebehol dráhu $3vt/4$, čo má byť vytýčených 100 metrov pri čase $t = 9\,\mathrm{s}$. Preto je jeho rýchlosť pri prebehnutí cieľovou páskou (je rovná v, prirodzene) rovná $v = 400/27\,\mathrm{m/s}$.

$\boxed{6.}$ Ak je studený kohútik otvorený 8 minút, v nádrži získame $7 \cdot 8 = 56$ litrov studenej vody s teplotou 12 °C. Označme čas, počas ktorého je potrebné napúšťať teplú vodu t. Spolu zaň natečie $4t$ litrov vody s teplotou 60 °C. Výsledná zmes má mať teplotu 36 °C. Pritom musí platiť zákon zachovania energie (v slovách fyziky 2. ročníka gymnázií kalorimetrická rovnica) – teplo odovzdané teplo vodou musí byť rovné množstvu tepla prijatého studenou vodou. Teda môžeme zapísať rovnicu

$$\begin{aligned}
56(36\,°\mathrm{C} - 12\,°\mathrm{C}) &= 4t(60\,°\mathrm{C} - 36\,°\mathrm{C}),\\
56 \cdot 24 &= 4t \cdot 24,\\
t &= 14\,\mathrm{min}.
\end{aligned}$$

$\boxed{7.}$ Náš štvorec s pospájanými vrcholmi je na obrázku. Vidíme, že ak pripojíme napätie k vrcholom A a C (tak, ako to robíme pri meraní odporu medzi týmito vrcholmi), napätie medzi vrcholmi B a D bude nulové. Tí, čo to nevidia na prvý pohľad si môžu predstaviť prúd tečúci z bodu A. Časť z neho sa vyberie priamo do bodu C, časť sa rozhoduje medzi tečením cez vrcholy B a D. Z pohľadu prúdu nemá ani jeden z vrcholov žiadnu výhodu, obe cesty sú uplne rovnocenné, preto oboma smermi tečie rovnako veľký prúd. Ten keď príde do vrcholu B, resp. D, opäť nemá dôvod tiecť do D, resp. B – je nejaký dôvod, prečo by mal tiecť práve z B do D? Ak áno, prečo nefunguje to isté zdôvodnenie pre zrkadlovo symetrickú cestu z D do B? Preto vetvou BD obvodu netečie prúd.

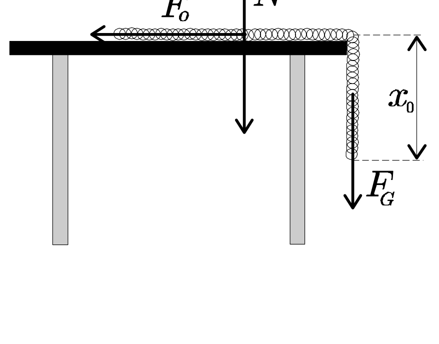


Môžeme teda spojenie BD z obvodu odstrániť. Ostane nám jednoduchá paralelná kombinácia odporov $2R$, R a $2R$ tak ako na druhom obrázku. Jej odpor už určíme ľahko

$$\frac{1}{R_X} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{R}.$$

Hľadaný odpor medzi protiľahlými vrcholmi štvorca je preto $R_X = R/2$.

$\boxed{8.}$



Aby bola retiazka v pokoji, musí sa gravitačná sila pôsobiaca na jej prevísajúcu časť, práve rovnať trecej sile, pôsobiacej na neprevísajúcu časť retiazky. Zapísané do rovnice

$$F_G = F_o.$$

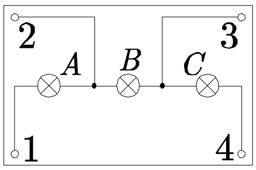
Ak nastane rovnovážny stav, keď retiazka prevísa o x_0, píšeme pre danú rovnicu (zavedieme dĺžkovú hustou retiazky $\lambda = \frac{m_0}{x_0} = \frac{m_1}{l-x_0}$):

$$m_0 g = \mu N.$$

N je normálová sila podložky na retiazku. A keďže sa retiazka v tomto smere nepohybuje, je rovná tiažovej sile jej neprevísajúcej časti:

$$\begin{aligned} m_0 g &= \mu m_1 g, \\ \lambda x_0 g &= \mu \lambda \left(l - x_0\right) g, \\ x_0 &= \frac{\mu l}{1+\mu}. \end{aligned}$$

$\boxed{9.}$ Podľa zadaných podmienok zostavíme schému na obrázku. Je ľahké overiť, že spĺňa podmienky zo zadania úlohy.



$\boxed{10.}$ Označme T silu napínania lana, a zrýchlenie sústavy v smere ťažšieho telesa. Pre obe telesá zapíšeme pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= -m_1 a, \\ m_2 g - T &= m_2 a. \end{aligned}$$

Riešením rovníc dostávame $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

$\boxed{11.}$ Proces vyplávania bubliny na povrch budeme považovať za izotermický dej, kapilárny tlak budeme považovať za zanedbateľný. Pri dne má vzduch v bubline tlak $p_0 + h\rho g$, na hladine len atmosferický tlak p_0. Potom podľa stavovej rovnice plynu

$$(p_0 + h\rho g)V_1 = p_0 V_2$$

S uvážením $V_2 = 3V_1$ dostávame $h = \frac{2p_0}{\rho g} \approx 20\,\mathrm{m}$.

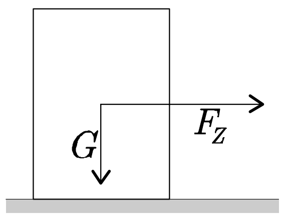
$\boxed{12.}$ Označme v hľadanú rýchlosť. Ak sa cyklista pohybuje rýchlosťou u do kopca so sklonom α, znamená to, že jeho rýchlosť vo zvislom smere je $u \sin \alpha$. Táto rýchlosť bude zrejme v oboch prípadoch rovnaká, pretože predpokladáme, že v oboch prípadoch cyklista šlape s rovnakým výkonom. Máme teda

$$40\,\mathrm{km/h} \cdot \sin 5^\circ = v \sin 20^\circ.$$

Z čoho $v = 40\,\mathrm{km/h}\,\dfrac{\sin 5^\circ}{\sin 20^\circ} \doteq 10\,\mathrm{km/h}$.

$\boxed{13.}$ Ak máme vo všeobecnosti za sebou zaradené kondenzátory C_1 a C_2, na nich sa nachádza rovnaký náboj Q. Napätie na nich je potom Q/C_1 a Q/C_2 a teda pomer napätí na prvom a druhom napätí je $C_2 : C_1$. V našom prípade sa napätia na hornej vetve delia v pomere $1 : 1$, napätia v dolnej vetve sa delia v pomere $2 : 1$. Označme X je pravý uzol v hornej vetve. Potom $U_{XA} = U/2$, $U_{XB} = 2U/3$ a nakoniec $U_{AB} = U_{XB} - U_{XA} = U/6$.

$\boxed{14.}$ Ťažisko prázdnej kvádrovej bedne výšky h sa nachádza vo výške $h/2$. Pri zrýchľovaní auta na bedňu pôsobí zotrvačná sila $F_Z = ma$ práve v tomto ťažisku, rovnako ako tiažová sila $G = mg$. Bedňa sa začne prevracať vtedy, ak moment zotrvačnej sily $M_Z = F_Z h/2$ je väčší ako moment tiažovej sily pôsobiacej na bedňu $M_G = Gd/2$, teda ak (po úprave) $a \geq gd/h$.

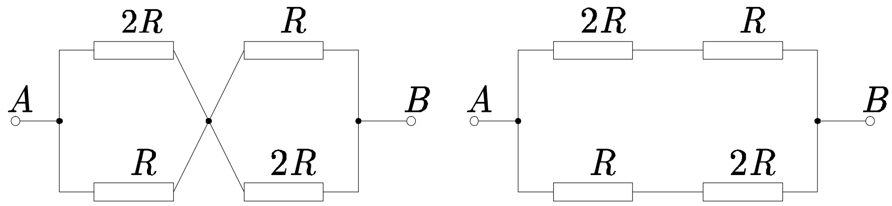


Bedňa sa začína po dlážke auta šmýkať až od istého jeho zrýchlenia a. To je dané tým, či trecia sila pôsobiaca proti takémuto jej pohybu prevýši veľkosť zotrvačnej sily. Ak $F_Z \geq F_T = mg\mu$, bedňa sa začne šmýkať. Úpravou dostaneme $a \geq g\mu$. Ak je toto a menšie než ohraničenie zistené pri skúmaní prevracania bedne, tá sa skôr začne šmýkať než prevracať. Teda dostávame pre neprevracajúcu sa bedňu nerovnosť

$$g\mu < \frac{gd}{h} \Longrightarrow h < \frac{d}{\mu}.$$

Pri splnení tejto podmienky sa bedňa skôr šmýka než prevracia.

15. Hľadané rozmedzie nájdeme najjednoduchšie úvahou. Zrejme najmenší odpor môžeme namerať vtedy, keď cestu prúdu cez schému čo najviac uľahčíme, ak nami zapojený odpor R_X bude mať čo najmenšiu hodnotu. Tou je $R_X = 0\,\Omega$, obrázok takejto schémy je nakreslený na prvom obrázku. Tu sme navyše využili, že keď bude odpor R_X nulový, môžeme spojiť uzly obvodu tak ako na obrázku. Vidíme, že táto schéma je vlastne zapojením za sebou dvoch paralelných kombinácií odporov R a $2R$. Tie majú obe odpor $R_1 = R \cdot 2R/(R + 2R) = 2R/3$, výsledný odpor $R_{\min}$ je preto $R_{\min} = 4R/3$.



Ak chceme cestu prúdu čo najviac sťažiť, volíme odpor R_X čo najväčší. Takýmto je zapojenie, keď medzi uzly siete nezapojíme vôbec nič, odpor bude nekonečný (pozri obrázok). Teraz ide o jednoduchú paralelnú kombináciu dvoch odporov s hodnotou $(R + 2R) = 3R$, teda $R_{\max} = 3R/2$.

16. Otázkou, je či liana, namáhaná odstredivou silou, udrží Tarzana. Kritické to je práve v najnižšom bode trajektórie, pretože tam má Tarzan najväčšiu rýchlosť (a tým pádom naňho pôsobiaca odstredivá sila je tiež najväčšia). Navyše práve tam je pôsobiaca odstredivá sila rovnobežná s Tarzanovou tiažou a skladá sa s ňou bez strát. Skúmajme preto okamih, keď sa Tarzan nachádza v najnižšom bode svojej trajektórie.

Veľkosť spomínanej odstredivej sily určíme ako zvyčajne vzťahom $F_O = mv^2/R$, kde zrejme R je dĺžka liany, m hmotnosť Tarzana, v jeho rýchlosť v najnižšom bode. Tú určíme pomocou zákona zachovania energie, podľa ktorého sa potenciálna energia premieňa na kinetickú. Najnižší bod oblúka je podľa zadania nižšie o h oproti začiatočnému bodu. Preto je zmena potenciálnej energie $\Delta E_P = mgh$. Zmena kinetickej energie je $\Delta E_K = mv^2/2$ (na začiatku skoku Tarzan stál, nemal žiadnu kinetickú energiu). Preto $mv^2 = 2mgh$. Dosadením do vzťahu pre F_O máme $F_O = 2mgh/R$. Aby liana nepraskla, musí byť táto sila v súčte s Tarzanovou tiažou mg menšia než hľadaná pevnosť liany T, teda

$$F_O + mg \leq T \Longrightarrow mg\left(\frac{2h}{R} + 1\right) \leq T.$$

17. Skúmajme najskôr situáciu pri priepustoch otvorených na polovicu. Označme ich plný prierez S. Rýchlosť vytekajúcej vody bude podľa známeho vzťahu

$v = \sqrt{2hg}$, kde h je výška vody a g je tiažové zrýchlenie. Celkový objem vytekajúcej vody je podľa zadania v tomto okamihu Q. Pritom platí $Q = vS/2$, preto $S = 2Q/\sqrt{2hg}$. Maximálny udržateľný prietok sa dosiahne pri úplne naplnenej nádrži, keď bude výška vody $2h$. Vtedy bude opäť $Q' = S'v'$, dosadením predchádzajúcich vzťahov a toho, že priepusty sú otvorené naplno, teda $S' = S$, dostaneme výsledok

$$Q' = Sv' = \frac{2Q}{\sqrt{2hg}}\sqrt{2 \cdot 2hg} = Q \cdot 2\sqrt{2}.$$

$\boxed{18.}$ Sústavu kondenzátorov môžeme na začiatku nahradiť jedným kondenzátorom s kapacitou $C_1 + C_2$. Nech na začiatku je na kondenzátore C_3 náboj Q. Náboj rovnakej veľkosti musí byť (pri sériovom zapojení kondenzátorov majú tieto vždy rovnaký náboj, to čo je na platni jedného, musí byť na platni suseda s opačným znamienkom...) aj na platniach spojeného kondenzátora s kapacitou $C_1 + C_2$. Pre napätia v obvode potom platí

$$\frac{Q}{C_1 + C_2} + \frac{Q}{C_3} = U \tag{1}$$

Keď sa kondenzátor C_2 prebije, na kondenzátore C_3 bude iný náboj Q' a pre napätia bude platiť

$$\frac{Q'}{C_1} + \frac{Q'}{C_3} = U \tag{2}$$

Riešením rovníc (1), (2) dostávame

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{C_1(C_1 + C_2 + C_3)}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3)}$$

$\boxed{19.}$ Celá energia, ktorá sa skladá z kinetickej a potenciálnej, sa počas pohybu nemení, sa dá vyjadriť v tvare $\frac{1}{2}\,mA^2$, kde A je amplitúda pohybu. Teda

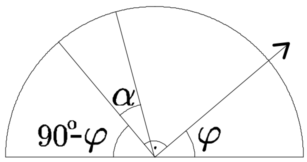
$$\frac{1}{2}\,mA^2 = E_k + E_p.$$

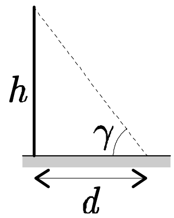
V okamihu, keď je teleso vzdialené štvrtinu amplitúdy, je $E_p = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{A}{4}\right)^2$. Z toho vyplýva, že

$$E_k = \frac{1}{2}\,mA^2 - \frac{1}{2}\,m\left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{15}{32}\,mA^2.$$

A teda $E_k : E_p = 15 : 1$.

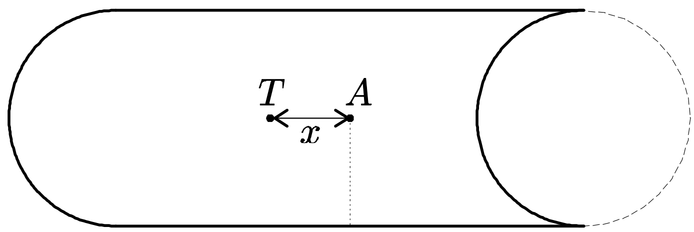
$\boxed{20.}$ Ak sme na severnom póle ($\delta = 90°$), máme severný pól (Polárku) stále nad hlavou, naopak na rovníku ju vidíme na horizonte. Vo všeobecnosti pri zemepisnej šírke δ ju vidíme vo výške δ nad obzorom (v stupňoch). Na obrázku je smer k Polárke vyznačený šípkou. Z obrázka vidieť, že výška rovníka nad obzorom je $90° - \delta$. Teraz k tomu prirátajme sklon zemskej osi k rovine jej obehu (α). Ten spôsobuje, že Slnko je počas roka striedavo raz nad, raz pod rovníkom, najväčšia jeho vzdialenosť je pritom práve α. Preto najväčšia výška Slnka nad obzorom v Bratislave je $\gamma = 90° + \alpha - \delta$. Zrejme práve vtedy vrhá tyč najkratší tieň.





Označme hľadanú najmenšiu dĺžku tieňa d, z obrázka plynie, že platí $l/d = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(90°+\alpha-\delta)$. Pomocou vlastností goniometrických funkcií ($\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = 1/\operatorname{tg}\varphi$)môžeme tento výsledok upraviť do tvaru $d/l = \operatorname{tg}(\delta - \alpha)$, odkiaľ už je jasné, že hľadaná minimálna dĺžka tieňa spĺňa vzťah $d = l \operatorname{tg}(\delta-\alpha)$.

$\boxed{21.}$ Na prvý pohľad, by sme na výpočet ťažiska potrebovali poznať aj polohu ťažiska polkruhu. Použijeme však trik, že ak celý útvar doplníme na symetrický:

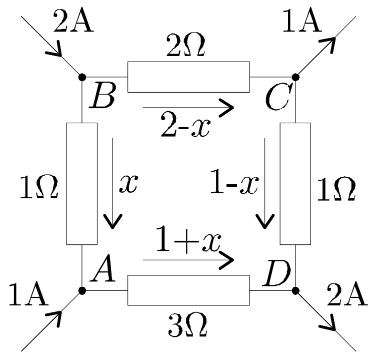


potom jeho ťažisko bude v bode A. Teda inými slovami momenty gravitačných síl pôvodného útvaru a doplneného kruhu sú vzhľadom na bod A rovnaké. Plocha pôvodného útvaru je ab, plocha doplneného kruhu je $\pi(b/2)^2$, potom pre momenty síl platí

$$ab \cdot x = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}.$$

odkiaľ dostáveme, že ťažisko je od bodu A je vzdialené o $x = \frac{\pi b}{8}$.

$\boxed{22.}$ Označme x prúd prechádzajúci odporom medzi bodmi A, B. Z Kirchhoffových zákonov pre prúdy nám teraz plynie rozdelenie prúdov tečúcich v obvode také, ako na obrázku (súčet prúdov vcádzajúcich do každého uzla musí byť rovný súčtu prúdov z uzla vychádzajúcich).

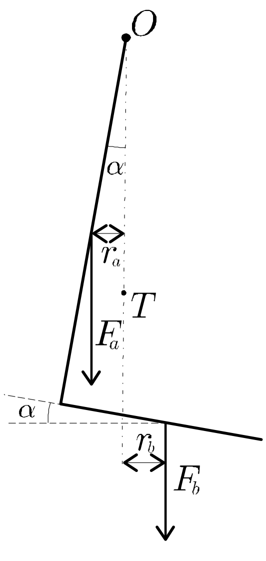


Posledným krokom riešenia je zapísanie posledného Kirchhoffovho zákona – pre napätia. Podľa neho musí byť v každej zo slučiek obovodu súčet napätí zdrojov rovný súčtu úbytkov napätia na odporoch. V našom obvode zdroje nie sú, preto musí byť súčet úbytkov napätí na odporoch rovný nule. V rovnici to môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} U_{BA} + U_{AD} + U_{DC} + U_{CB} &= 0, \\ 1x + 3\,(1 + x) + 1\,(-1 + x) + 2\,(-2 + x) &= 0. \end{aligned}$$

Úpravou poslednej rovnice dostaneme $x = 2/7\,\mathrm{A}$. Zrejme je potom napätie medzi uzlami AB rovné $U_{AB} = x \cdot 1\,\Omega = 2/7\,\mathrm{V}$.

$\boxed{23.}$ Podmienka rovnováhy vyžaduje, aby
(a) bol vektorový súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso rovný nule
(b) bol súčet momentov všetkých síl vzhľadom na ľubovoľný bod rovný nule
Podmienka (a) je splnená tým, že tiež tyče je kompenzovaná upevnením tyče v bode O. Podmienka (b) bude splnená, keď ťažisko, bude ležať na zvislej priamke prechádzajúcej bodom upevnenia.



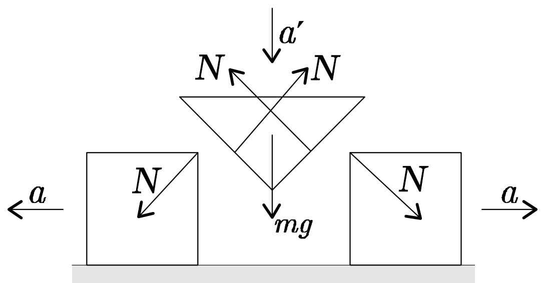
Môžeme si teda vypočítať polohu ťažiska a z toho uhol odklonu, alebo si hneď napíšeme podmienku rovnosti momentov (momenty, ktoré spôsobujú jednotlivé ramená, počítame vzhľadom na bod O)

$$\begin{aligned} r_a F_a &= r_b F_b, \\ \frac{a}{2} \sin\alpha \, F_a &= \left(\frac{b}{2} - a \operatorname{tg}\alpha\right) \cos\alpha \, F_b. \end{aligned}$$

Sily F_a a F_b sú tiažové sily jednotlivých ramien, teda $F_a/F_b = a/b$. Riešením týchto rovníc nakoniec dostávame

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}.$$

$\boxed{24.}$ Na kocku pôsobí zo strany klinu pôsobí na kocku sila N. Taká istá sila opačného smeru pôsobí zo strany kocky na klin. Na obrázku sú znázornené sily, pôsobiace na jednotlivé telesá:



Newtonova pohybová rovnica pre klin má v zvislom smere tvar

$$mg - 2N \sin\alpha = ma', \tag{1}$$

kde a' je zrýchlenie klinu. Pre kocku budeme písať pohybovú rovnicu vo vodorovnom smere:

$$N \cos\alpha = Ma, \tag{2}$$

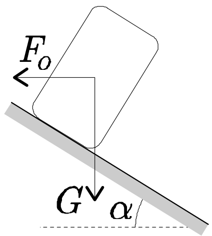
kde a je zrýchlenie kocky. Zrýchlenia a a a' nie sú nezávislé, ale sú viazané vzťahom

$$a = a' \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Riešením rovníc (1)–(3) dostávame

$$a = \frac{mg \operatorname{tg}\alpha}{m + 2M \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$\boxed{25.}$ Na teleso pohybujúce sa po klopenej zatáčke pôsobia sily tak, ako na obrázku. Zložky síl $G = mg$ a $F_O = mv^2/R$ kolmé na podložku vytvárajú prítlačnú silu F_N, ktorej veľkosť je $F_N = G\cos\alpha + F_0\sin\alpha = mg\cos\alpha + mv^2\sin\alpha/R$. Vonku zo zátačky je teleso vynášané rozdielom zložiek síl G a F_O, ktoré sú rovnobežné s podložkou. Označme ich výslednicu F_X, z obrázka vidieť, že má veľkosť $F_X = F_O\cos\alpha - G\sin\alpha = mv^2\cos\alpha/R - mg\sin\alpha$.

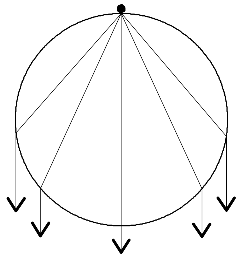


Zátačkou prejdeme bez úhony iba ak trecia sila F_T daná prítlačnou silou telesa k podložke ($F_T \le \mu F_N$) stačí kompenzovať silu F_X. Dosadením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{mv^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) &\ge \frac{mv^2}{R}\cos\alpha - mg\sin\alpha,\\ v^2 &\le gR\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť udáva obmedzenie pre rýchlosť prechodu zátačkou, teda hľadanú maximálnu rýchlosť (či skôr jej druhú mocninu...).

$\boxed{26.}$ Mucha na guli sa správa ako bodový zdroj svetla: do všetkých smerov z nej vychádzajú svetelné lúče. Každý z lúčov, ktorý dopadá na guľu, na ňu dopadá pod uhlom dopadu $0 \le \alpha < 90°$.



Podľa zákona lomu pre uhol lomu β platí

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Ak uvážime, že $\sin\alpha \in \langle 0,1)$, ľaho zistíme, že $\beta \in \left\langle 0, \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, $\beta \in \langle 0, 30°)$. Pavúk teda muchu nezbadá, ak uhol stred gule – pavúk – mucha bude menší ako 30°. Keďže trojuholník mucha – pavúk – stred gule je rovnoramenný, platí, že uhol mucha – stred gule – pavúk je $\pi - 2\beta$. a teda preň platí, že je z intervalu $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right\rangle$. Hľadaná vzdialenosť je teda z intervalu $\left(0, \frac{2}{3}\pi R\right\rangle$. Ostáva ešte overiť, či všetky lúče vo vnútri gule po dopade na rozhranie guľa – sklo naozaj vstupujú do vzduchu a sú teda zachytiteľné pavúkom. Mohol by totiž nastať prípad, že by sa niektoré lúče odrazili späť do gule, čo by potom značne skomplikovalo ďalší výpočet. V tomto prípade však všetky lúče skutočne vyjdú von z gule bez ďalších odrazov.

$\boxed{27.}$ Označme hľadanú dĺžku lana v pokoji l. Zo zadania plynie, že lano sa počas skoku natiahlo na maximálnu dĺžku h. Vtedy sa všetka Herbertova energia $E_P = mgh$ (m je jeho hmotnosť) premenila na potenciálnu energiu pružnosti lana $E_L = kx^2/2$, kde x je predĺženie lana, teda $x = h - l$. Zo zákona zachovania energie plynie, že sa tieto dve energie naozaj musia rovnať (energia sa nemala kam stratiť!), teda

$$(h-l)^2 = \frac{2mgh}{k}.$$

Nakoniec ostal Herbet visieť y metrov nad cestou. Vtedy boli v rovnováhe sily naňho pôsobiace, teda $mg = k(h - l - y)$. Toto môžeme priamo dosadiť do predchádzajúcej rovnice a dostaneme

$$(h-l)^2 = \frac{2k(h-l-y)h}{k} = h^2 - hl - yh,$$

čo je kvadratická rovnica pre l. Úpravou dostaneme $l^2 - hl + yh = 0$, riešenia sú

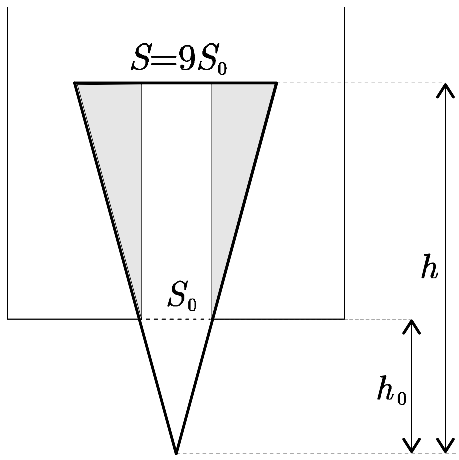
$$l = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4yh}}{2}.$$

Zrejme tá väčšia zo získaných dĺžok je väčšia než výška mosta. Tá nemá fyzikálny zmysel, pretože s takýmto lanom sa Herbert obúcha o zem. Riešenie je teda jediné, to so znamienkom mínus.

$\boxed{28.}$ Kužeľ sa začne dvíhať vtedy, keď tiažová sila sa vyrovná vztlakovej sile. Najväčia hodnota vztlakovej sily bude v okamihu, keď hladina vody bude zarovno s podstavou kužeľa. Ak hustota kužeľa je ρ a jeho výška h, potom tiažová sila je rovná

$$G = \frac{1}{3} Sh\rho g.$$

Pri výpočte vztlakovej sily postupujeme nasledovne: označme číslom 1 časť kužeľa vo vaničke a číslom 2 časť kužeľa mimo vaničky.



Vztlaková sila *nie je* rovná $V_1\rho_0 g$ (V_1 je objem časti 1), to by bola len v prípade, keby časť jedna bola obklopená vodou aj zdola. V prípade, keby zdola ešte pôsobila voda silou $S(h-h_0)\rho_0 g$, potom by bola výslednica rovná $V_1\rho_0 g$. Keďže ale zdola voda nepôsobí, je výsledná vztlaková sila rovná $V_1\rho_0 g - S(h-h_0)\rho_0 g$. Toto je ekvivalentné tomu, ako keby sa za objem v známom vzorci $V\rho g$ uvažovala len vyšrafovaná časť. A teda výsledná vztlaková sila je rovná

$$F_{\mathrm{vz}} = \left[\frac{1}{3}\,Sh - \frac{1}{3}\,S_0 h_0 - S_0(h-h_0)\right]\rho_0 g.$$

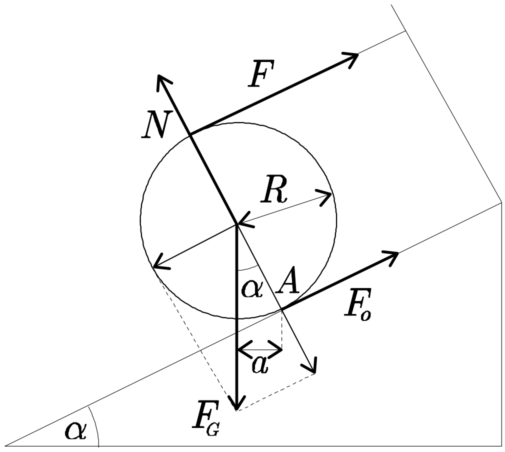
Výšky h a h_0 sú zviazané vzťahom

$$\frac{h_0^2}{h^2} = \frac{S_0}{S}.$$

Z rovnosti $F_{\mathrm{vz}} = G$ a uvážením $S = 9S_0$ nakoniec dostávame

$$\rho = \frac{20}{27}\,\rho_0.$$

$\boxed{29.}$ Aby bola daná sústava v rovnováhe, musí byť súčet všetkých síl na ňu pôsobiacich rovný nule a rovnako súčet momentov týchto síl vzhľadom na ľubovolný bod musí byť rovný nule.



Na valec pôsobia dohromady štyri sily: gravitačná sila F_G, trecia sila $F_o = N\mu$, normálová sila N a sila ťahu lana F. Momenty síl budeme počítať vzhľadom na bod A, aby nám hneď vypadli normálová a trecia sila, ktorých moment je vzhľadom na tento bod nulový:

$$mgR\sin\alpha - 2RF = 0. \tag{1}$$

Podmienkou rovnováhy je okrem nulového výsledného momentu síl aj nulový súčet síl. Ten zapísaný pre smer kolmý na podložku má tvar

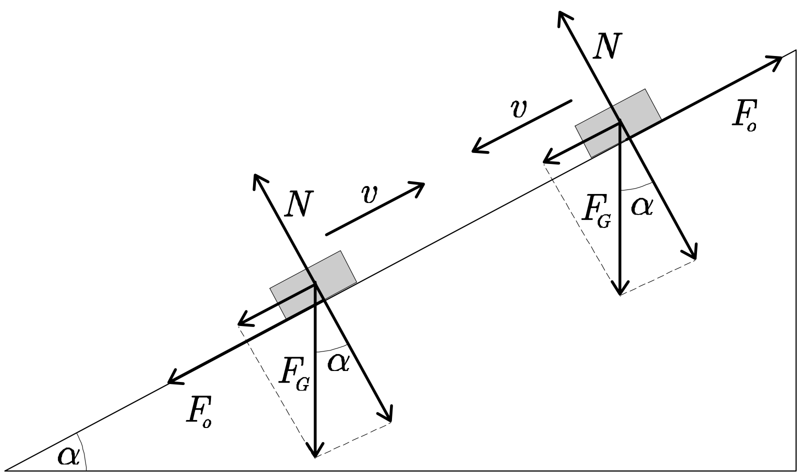
$$N - mg\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

a v smere rovnobežnom s naklonenou rovinou

$$mg\sin\alpha - N\mu - F = 0. \tag{3}$$

Riešením rovníc (1)–(3) dostávame $\alpha = \operatorname{arctg} 2\mu$.

$\boxed{30.}$ Pri pohybe telesa nahor, resp. nadol naň pôsobia tri sily: gravitačná $\vec{F}_G$, normálová $\vec{N}$ a odporová $\vec{F}_o$.



Keďže sa teleso pohybuje len v smere naklonenej roviny má normálová sila práve veľkosť kosínusovej zložky gravitačnej sily (pre odporovú silu preto platí $F_o = \mu N = \mu F_G \cos\alpha$): Teda pri pohybe nahor pôsobí na teleso sila

$$F = F_G \sin\alpha + \mu F_G \cos\alpha,$$

pričom spôsobuje spomalenie:

$$a_1 = g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right). \tag{1}$$

Pri pohybe nadol to bude:

$$\begin{aligned} F &= F_G \sin\alpha - \mu F_G \cos\alpha, \\ a_2 &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Dráha, ktorú prejde teleso pri pohybe nahor, je rovná

$$s = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\,a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\,a_1 t_1^2 \quad \left[\text{s uvážením } v_0 = a_1 t_1\right].$$

Pri pohybe nadol prejde teleso dráhu

$$s = \frac{1}{2}\,a_2 t_2^2.$$

Tieto dráhy sú rovnaké, teda

$$\frac{1}{2}\,a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\,a_2 t_2^2. \tag{3}$$

Pomocou rovníc (1), (2), (3) a s uvážením $nt_1 = t_2$ dostávame

$$\mu = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\,\operatorname{tg}\alpha.$$

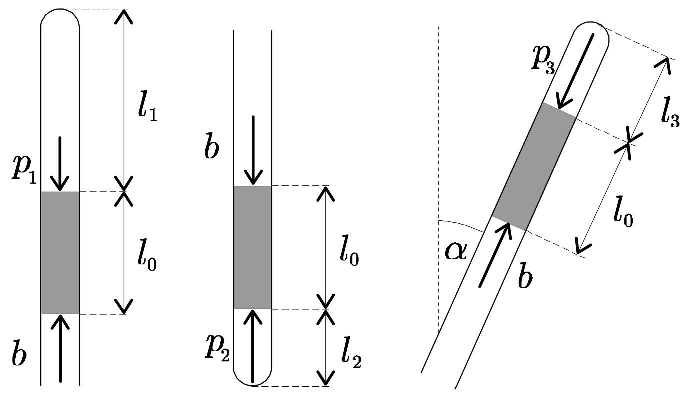
$\boxed{31.}$ Vzťah pre periódu kmitov v gravitačnom poli Zeme poznáme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Na riešenie tohto príkladu si stačí dobre uvedomiť čo tento vzťah znamená. A síce, máme kyvadlo dĺžky l, ktorého perióda v gravitačnom poli s gravitačným zrýchlením g je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Keby sme teda mali kyvadlo na Mesiaci a vykonávalo by malé kmity. Jeho perióda by bola $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}$, kde a je gravitačné zrýchlenie na Mesiaci. V lietadle sme tiež akoby na nejakom mesiaci, ktorého „efektívne" gravitačné zrýchlenie je $\sqrt{g^2 + a^2}$ (lebo na kyvadlo pôsobí gravitačné zrýchlenie g a zotrvačné zrýchlenie a, ktoré je kolmé na gravitačné). Výsledná perióda kmitov kyvadla v lietadle teda je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

$\boxed{32.}$ Označme atmosferický tlak b a príslušné tlaky uzavretého vzdušného stĺpca v prvej a druhej polohe p_1 a p_2 (viď. obr.)



Potom sú v rovnovážnom stave splnené vzťahy:

$$\begin{aligned} p_1 + l_0\rho g &= b, \\ b + l_0\rho g &= p_2. \end{aligned}$$

Za predpokladu, že teplota vzduchu sa počas pokusu nemení a kapilára má všade rovnaký prierez, podľa Boylovho-Mariottovho zákona

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

alebo

$$(b - l_0\rho g)\, Sl_1 = (b + l_0\rho g)\, Sl_2,$$

odkiaľ

$$b = l_0\,\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\,\rho g. \tag{1}$$

Tým istým spôsobom budeme pokračovať aj ďalej len hydrostatický tlak treba upresniť o uhol α. Takže

$$\begin{aligned} p_3 V_3 &= p_1 V_1, \\ (b - l_0 \rho g \cos\alpha) S l_3 &= (b - l_0 \rho g) S l_1. \end{aligned}$$

Odkiaľ vychádza

$$l_3 = l_1 \frac{b - l_0 \rho g}{b - l_0 \rho g \cos\alpha}.$$

a spolu s (1) dostaneme:

$$l_3 = \frac{2 l_2 l_1}{l_1 (1 - \cos\alpha) + l_2 (1 + \cos\alpha)}$$

$\boxed{33.}$ Predpokladajme, že prvý otvor je v nižšej výške ako druhý $h_1 < h_2$. Za čas Δt z prvého otvoru vytečie $V_1 = S v_1 \Delta t$ metrov kubických vody. Obdobne z druhého otvoru $V_2 = S v_2 \Delta t$. Výsledná hybnosť vody potom bude

$$\Delta p = m_1 v_1 - m_2 v_2 = \rho V_1 v_1 - \rho V_2 v_2 = \rho S \left(v_1^2 - v_2^2 \right) \Delta t. \tag{1}$$

Pre silu, ktorá poháňa vozík, podľa Newtonovho zákona platí

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S \left(v_1^2 - v_2^2 \right). \tag{2}$$

Z Bernoulliho rovnice ($p + \frac{1}{2} \rho v^2 =$konšt, kde p je v našom prípade hydrostatický tlak) dostaneme pre rýchlosti výtoku

$$v_1^2 = 2g (h - h_1) \qquad v_2^2 = 2g (h - h_2). \tag{3}$$

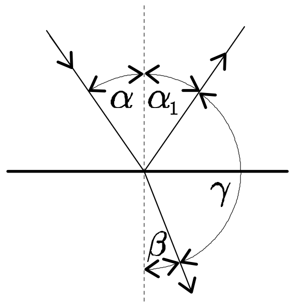
Dosadíme (3) do (2) a upravíme :

$$F = \rho S \left[2g (h - h_1) - 2g (h - h_2) \right] = 2 g \rho S (h_2 - h_1).$$

To je veľkosť sily, ktorá rozbieha vozík. Ak chceme, aby sa nepohyboval, musíme pôsobiť rovnako veľou silou na strane ventila, vo väčšej výške.

$\boxed{34.}$ Keď svetelný lúč dopadá na rozhranie pod uhlom α, odráža sa pod uhlom $\alpha_1 = \alpha$ a láme sa pod uhlom β, pre ktorý podľa zákona lomu platí:

$$\sin\alpha = n \sin\beta.$$



Odrazený lúč zviera s lomeným uhol γ, preto podľa obr. je splnená rovnica

$$\beta = \pi - (\alpha + \gamma)\,.$$

Dosadením do zákona lomu dostaneme:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= n\sin\left[\pi - (\alpha+\gamma)\right],\\ \sin\alpha &= n\sin(\alpha+\gamma)\,,\\ \sin\alpha &= n\,(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)\,.\end{aligned}$$

Čo po vydelení $\cos\alpha$ dáva

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= n\,(\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma + \sin\gamma)\,,\\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{n\sin\gamma}{1-n\cos\gamma}.\end{aligned}$$

Svetelný lúč teda dopadol pod uhlom $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{n\sin\gamma}{1-n\cos\gamma}$.

$\boxed{35.}$ Keď je doska uchytená, celá jej kinetická energia sa premení na energiu potrebnú na prebitie dosky. Čiže ak si túto energiu označíme A, môžeme pre ňu napísať:

$$A = \frac{1}{2}\,mv_0^2. \tag{1}$$

Keď doska nie je uchytená, časť z kinetickej energie strely sa premení aj na kinetickú energiu dosky. Rýchlosť ktorou strela prebije neuchytenú dosku si uznačíme v_1. Skôr než zapíšeme ZZH, si treba uvedomiť, že gulička v doske ostane, čiže (rýchlosť dosky po jej prebití je u)

$$mv_1 = (M+m)\,u. \tag{2}$$

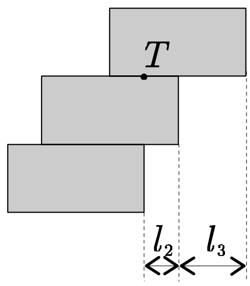
Ďalej podľa zákona zachovania energie:

$$\frac{1}{2}\,mv_1^2 = A + \frac{1}{2}\,(M+m)\,u^2. \tag{3}$$

Riešením rovníc (1), (2), (3) dostávame hľadanú rýchlosť v_1:

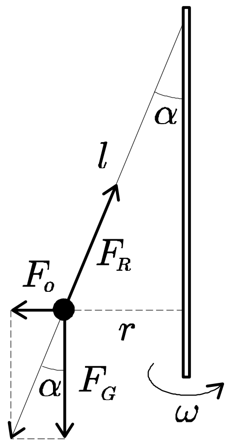
$$v_1 = v_0\sqrt{1+\frac{m}{M}}.$$

$\boxed{36.}$ Označme presah druhej tehly nad spodnou l_1, presah tretej tehly nad druhou l_2 a presah štvrtej tehly nad treťou l_3. Potom celkový hľadaný presah bude $l_1+l_2+l_3$. Základná myšlienka riešenia je, že tehly budeme „ukladať" zhora. Najskôr „položíme" (do vzduchu) hornú tehlu. Ako môžeme pod ňu podložiť tehlu tak, aby nespadla? Zrejme horná tehla môže prečnievať do polovice. Teda $l_3 = l/2$. Ideme podložiť druhú tehlu pod tretiu. Zrejme ju môžeme podložiť tak, aby ťažisko dvoch tehál nad ňou bolo presne na hrane:



Keďže ťažisko horných dvoch tehál leží „v strede", odtiaľ $l_2 = l/4$. Ťažisko troch tehál určíme z rovnosti momentov tiažových síl: $mg(l/2 - l_3) = 2mgl_3$. Odtiaľ $l_3 = l/6$. A teda celkový presah je rovný $l_1 + l_2 + l_3 = 11/12\,l$.

$\boxed{37.}$ Nech m je hmotnosť Martinka, α je uhol ktorý zviera lano so zvislicou. Na Martinka pôsobia 3 sily: Tiažová (F_g), odstredivá (F_o) a reakčná sila lana (F_r).



Uvedomme si, že vodorovná vzdialenosť Martinka od osi otáčania je $r = l\sin\alpha$.

Pre jednotlivé sily teda platí:

$$F_g = mg, \tag{1}$$
$$F_o = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}. \tag{2}$$

Veľkosť sily F_r nevieme priamo vyjadriť. Vieme však, že všetky 3 sily musia byť v rovnováhe. To ale znamená, že

$$\frac{F_o}{F_g} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Uhlová rýchlosť súvisí s obvodovou podľa vzťahu:

$$\omega l \sin\alpha = v. \tag{4}$$

Túto sústavu teraz vyriešime: Z (3) a (4) vyjadríme F_o a dosadíme do (2). Dostávame tak dosť odpornú rovnicu, ktorú treba zriešiť:

$$mg\operatorname{tg}\alpha = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}.$$

Využijeme pritom, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Upravíme a dostávame trošku menej odporný vzťah

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\,\frac{v^4}{l^2g^2} - \frac{v^4}{l^2g^2} = 0.$$

Použijeme substitúciu

$$\sin^2\alpha = x, \quad \frac{v^4}{l^2g^2} = b.$$

A dostávame celkom príjemnú kvadratickú rovničku. Uvážime ktorý z jej 2 koreňov môže byť reálny výsledok našej úlohy a máme:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{b^2+4b}-b}{2}}.$$

Potom dosadením do (4) a drobnými úpravami dostávame

$$\omega = \frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{v^4+4l^2g^2}-v^2}}.$$

$\boxed{38.}$ Pri prevaľovaní spotrebujeme energiu na to, aby sme ťažisko kocky zdvihli z výšky $a/2$ do výšky $\sqrt{2}\,a/2$, čo je, ako z Pytagorovej vety ľahko zrátame, maximálna výška do ktorej sa ťažisko kocky dostane. Ak m je hmotnosť kocky, tak vykonaná práca je rovná $W_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) mg$. Pri ťahaní pôsobíme na dĺžke a silou $mg\mu$, vykonáme teda prácu $W_2 = mg\mu a$. Porovnaním W_1, W_2 zistíme, že ak $\mu \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, kocku sa nám oplatí ťahať.

$\boxed{39.}$ Predpokladajme, že závažie 2 sa počas pohybu závažia 1 skutočne nepohne. Závažie 1 bude vykonávať čosi ako tlmený kmitavý pohyb. Najväčšou silou bude na druhé závažie pôsobiť vtedy, keď prvýkrát dosiahne maximálnu výchylku smerom od tohto telesa. Zrátajme teda, v akej vzdialenosti l od svojej pôvodnej polohy vtedy bude. Použijeme na to zákon zachovania energie, podľa ktorého platí

$$\frac{1}{2}kl^2 + lmg\mu = \frac{mv^2}{2},$$

kde μ je koeficient trenia závaží o podložku, $kl^2/2$ je energia napnutej pružiny, $lmg\mu$ práca trecej sily. Vyriešime túto kvadratickú rovnicu, pričom usúdime, ktorý z jej dvoch koreňov má zmysel. Dostávame tak po úprave

$$l = \frac{-mg\mu + \sqrt{(mg\mu)^2 + kmv^2}}{k}.$$

Na závažie 2 bude vtedy pôsobiť sila lk, to sa nepohne, ak $lk \leq mg\mu$. Po dosadení:

$$-mg\mu + \sqrt{(mg\mu)^2 + kmv^2} \leq mg\mu,$$

odkiaľ

$$\mu \geq \sqrt{\frac{kv^2}{3mg^2}}.$$

$\boxed{40.}$ Pružina začne dvíhať teliesku v okamihu, keď $kx_0 = mg$, kde x_0 je predĺženie pružiny v danom okamihu. Prejdime do sústavy hýbucej sa nahor rýchlosťou v. V tejto sústave teleso v momente odtrhnutia od stola sa pohybuje nadol rýchlosťou v. Nech x je maximálne predĺženie pružiny, vtedy vzhľadom na najnižší bod je potenciálna energia telieska rovná $mg(x - x_0)$. Podľa zákona zachovania energie

$$\frac{mv^2}{2} + mg(x - x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Odtiaľ použítím $x_0 = mg/k$ dostávame kvadratickú rovnicu

$$kx^2 - 2mgx - mv^2 + m^2g^2/k = 0.$$

A teda

$$x = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$\boxed{41.}$ Predstavme si celú situáciu v súradnicovej sústave, v ktorej počiatku je neštastný Mirko, os x je vodorovná, os y zvislá. Nech Mirko hodí kameň rýchlosťou v pod uhlom α od osi x. Pre vodorovnú, resp. zvislú zložku rýchlosti kameňa potom platí

$$v_x = v\cos\alpha \qquad v_y = v.\sin\alpha.$$

Šikmý vrh kameňa sa skladá z 2 pohybov: rovnomerný priamočiary v smere osi x a kolmý vrh nahor v smere osi y. Každý z týchto pohybov sa deje nezávisle na tom druhom. Ak sú teda x, y súradnice kameňa v čase t, platí

$$x = v\cos\alpha\, t \qquad y = -\frac{1}{2}\,gt^2 + v\sin\alpha\, t.$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme t a dosadíme do druhej, máme:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{2gx^2}{v^2\cos^2\alpha}.$$

Využijeme vzorec

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Ten nie je celkom triviálny, ale dá sa naň prísť (skúste rozpísať tgα ako $\sin\alpha/\cos\alpha$ a uvidíte). Na našej rovnici sa nám nepáči práve to, že v nej vystupuje $\operatorname{tg}\alpha$ a aj $\cos\alpha$. Preto potrebujeme jednu z týchto funkcií nahradiť pomocou druhej. Mohli by sme to vyjadriť aj naopak, no tg má pre nás tú výhodu, že obor hodnôt tejto funkcie sú všetky reálne císla. Práve táto vlastnosť sa nám neskôr zíde. Rovnicu si teda upravíme na takýto tvar:

$$\operatorname{tg}^2\alpha\,\frac{gx^2}{2v^2} - \operatorname{tg}\alpha\, x + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0.$$

Z tejto rovnice by sme mohli vyjadriť $\operatorname{tg}\alpha$. Nie je to však nutné. Stačí, ak si uvedomíme, že táto rovnica urcite bude mať 1 kladný koreň. No a kedže $\operatorname{tg}\alpha$ na $\langle 0, 90^\circ)$ nadobúda všetky reálne čísla, stačí nám zapísať podmienku, aby sa táto rovnica dala riešiť, t.j. aby jej diskriminant bol nezáporný. To znamená:

$$x^2 \geq \frac{gx^2}{v^2}\left(\frac{gx^2}{v^2} + 2y\right),$$

čo upravíme na

$$v^4x^2 - 2ygx^2v^2 - g^2x^4 \geq 0.$$

Ak sa na toto pozrieme ako na kvadratickú nerovnicu s neznámou v^2, o ktorej určite vieme, že je nezáporná, ľahko zrátame:

$$v \geq \sqrt{yg + \sqrt{y^2g^2 + x^2g^2}}.$$

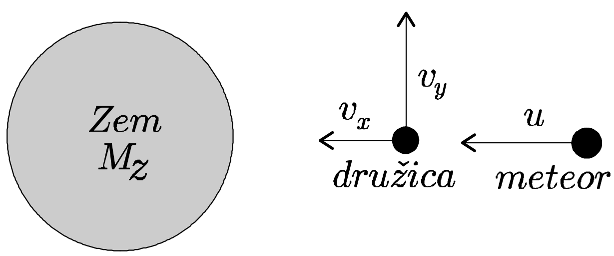
Ak chce Mirko Janku trafiť, musí v istom okamihu platiť $x = l$, $y = h$. Dosadením získame konečnú podmienku pre minimálnu rýchlosť:

$$v \geq \sqrt{hg + \sqrt{h^2g^2 + l^2g^2}}.$$

P.S. Ak v predposlednej rovnici budeme predpokladať $v =$konšt, dostaneme rovnicu paraboly. Táto krivka je hraničná množina bodov, ktoré pri istej počiatočnej rýchlosti možme kamenom zasiahnuť.

$\boxed{42.}$ Platňa sa počas hrania 1 strany otočí $\dfrac{20 \cdot 60}{3} = 400$ krát. Ihla sa po platni pohybuje po približne kruhovej trajektórii, ktorej polomer sa posupne mení. Nakoľko ale obvod kruhu je priamo úmerný polomeru, môžme plynule sa meniaci polomer nahradiť priemerným polomerom, ktorý je v našom prípade $\dfrac{15+5}{2}\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$. Ihla teda prejde dráhu $400 \cdot 10 \cdot 2\pi\,\mathrm{cm} \doteq 251\,\mathrm{m}$. Mohli by sme uvažovať, že ihla sa vzhľadom na platňu nepohybuje po kruhovej, ale po špirálovitej trajektórii. V takomto prípade by sme dostali výsledok, ktorý by sa od našeho líšil menej ako 0,0000003 krát.

$\boxed{43.}$ Na vyriešenie tejto úlohy budeme potrebovať 3 zákony zachovania: Zákon zachovania hybnosti, energie a momentu hybnosti. Označme v rýchlosť, m hmotnosť družice pred zrážkou, v_x, v_y jej príslušné rýchlosti tesne po zrážke



Hmotnosť družice po zrážke bude zrejme $m\,11/10$. Hmotnosť Zeme označme M. Začneme tým, že z rovnováhy gravitačnej a odstredivej sily ktoré pôsobili na družicu pred zrážkou zrátame jej rýchlosť v

$$m\,\frac{v^2}{R} = \varkappa\,\frac{Mm}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}.$$

Pokračujeme so zákonom zachovania hybnosti. Z neho ľahko zrátame

$$\begin{aligned} v_x\,(m + m/10) &= u\,m/10 \Rightarrow v_x = \frac{1}{11}\,u, \\ v_y\,(m + m/10) &= v\,m \Rightarrow v_y = \frac{10}{11}\,v. \end{aligned}$$

Označme w rýchlosť družice s meteoritom v bode, keď je k Zemi najbližšie. Zapíšme teraz zákon zachovania energie v 2 okamihoch: tesne po zrážke a v okamihu, keď je družica k Zemi najbližšie. Pozor! Pri zrážke zákon zachovania energie neplatí, lebo sa jedná o nepružnú zrážku. Uvážme, že tesne po zrážke je celková rýchlosť družice rovná $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, dostaneme

$$\frac{\frac{11}{10}\,m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{2} + \varkappa M\,\frac{11}{10}\,m\left(\frac{1}{R/2} - \frac{1}{R}\right) = \frac{m\,11/10\,w^2}{2}.$$

Zaklincujeme to zákonom zachovania momentu hybnosti. Pred zrážkou nemal meteorit vzhľadom na stred Zeme nulový moment hybnosti, pretože letel presne do stredu Zeme, ako to vyplýva zo zadania. Celý moment hybnosti sústavy bol teda moment hybnosti družice. Znamená to, že

$$mvR = \frac{11}{10}\,mw\,\frac{R}{2} \Rightarrow w = \frac{20}{11}\,v.$$

Tento výsledok spolu s vyjadreniami v_x a v_y dosadíme do už napísaného vzťahu pre zákon zachovania energie, ktorý pre prehľadnosť vynásobíme $\frac{2}{m}$:

$$\frac{11}{10}\left(\frac{u^2}{11^2} + v^2\frac{10^2}{11^2}\right) + \frac{22}{10}\,v^2 = \frac{11}{10}\left(\frac{20}{11}\right)^2 v^2,$$

odkiaľ $u = \sqrt{58}\,v = \sqrt{\dfrac{58\varkappa M}{R}}$.

$\boxed{44.}$ Po tom, čo závažiam udelíme rýchlosti v_1 a v_2 tak ako na obrázku, začnú sa tieto od seba vzďaľovať. Pritom bude naťahovaná pružina, ktorá ich spája. Táto ich bude brzdiť pri ich vzďaľovaní sa od seba. V určitom okamihu budú mať závažia rovnaké rýchlosti rovnakého smeru, vtedy bude predĺženie pružiny najväčšie. Potom sa k sebe začnú závažia približovať.

Toľko kvalitatívny pohľad. Pre výpočty bude vhodné prejsť do ťažiskovej sústavy, pozrieť sa na situáciu z takého vlaku, aby boli hybnosti závaží navzájom opačné a teda výsledná hybnosť systému nulová. Označme rýchlosť našej pohybujúcej sa sústavy u, nech má smer rýchlosti v_2. Teraz sa nám zdá byť rýchlosť prvého závažia $w_1 = v_1 + u$, rýchlosť druhého závažia zas $w_2 = v_2 - u$. Chceme, aby celková hybnosť závaží bola nulová. Musí teda platiť

$$mw_1 + 2mw_2 = 0 \Longrightarrow -v_1 - u + 2\left(v_2 - u\right) = 0 \Longrightarrow u = \frac{2v_2 - v_1}{3}.$$

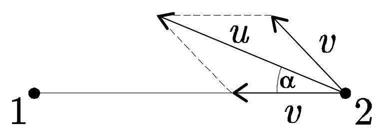
Naša hľadaná sústava má rýchlosť u. Vidíme, že na sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie sily, jej hybnosť sa teda meniť nebude. Preto aj hybnosť v okamihu, keď sa od seba závažia už nevzďaľujú je rovnaká ako na začiatku, teda nulová. To v spojení s tým, že sa voči sebe nepohybujú znamená, že v zvolenej sústave obe stoja! Na začiatku deja bola energia závaží v tejto sústave rovná

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}2mw_2^2 = \frac{1}{2}m\left(-v_1 - \frac{2v_2 - v_1}{3}\right)^2 + m\left(v_2 - \frac{2v_2 - v_1}{3}\right)^2, \\ E_K &= \frac{m}{3}\left(v_1 + v_2\right)^2. \end{aligned}$$

Na konci, v okamihu, keď sa závažia nehýbu sa celá táto energia nestratila, je uložená v potenciálnej energii $E_P = kx^2/2$ pružiny (tá sa predĺžila). Teda môžeme zapísať

$$E_K = E_P \Longrightarrow x_{\max}^2 = \frac{2m}{3k}(v_1 + v_2)^2.$$

$\boxed{45.}$ Základná myšlienka (priznávame, že fintová) spočíva vo hodnej voľbe vzťažnej sústavy. Ak sa posadíme na psa č. 1, potom tento pes v mojej vzťažnej sústave stojí. Pes č. 2 sa pohybuje (v tejto vzťažnej sústave) rýchlosťou $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ($\vec{v}_1$ je rýchlosť psa 1 voči zemi, $\vec{v}_2$ rýchlosť psa 2 voči zemi).



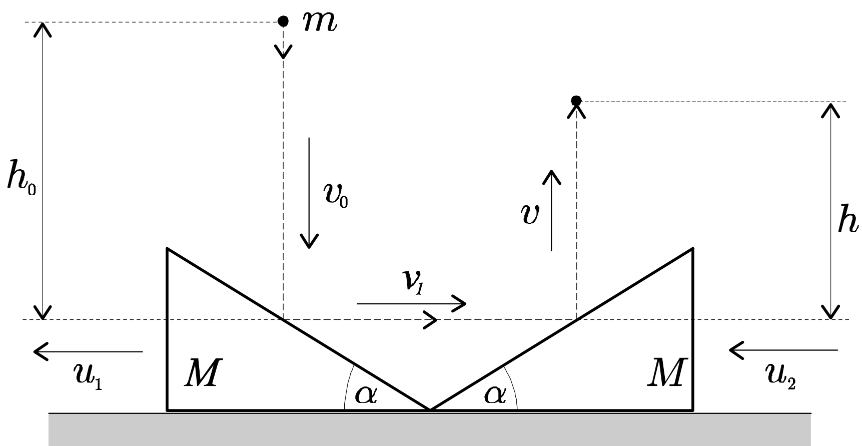
Túto rýchlosť sme označili $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. To je rýchlosť, ktorou sa pohybuje pes 2 v sústave psa 1. Nás zaujíma čas, za ktorý dôjde pes 2 k 1, na to potrebujeme zistiť priemet rýchlosti $\vec{u}$ na spojnicu 1–2. Tento priemet je pre $\alpha = 60°$ rovný $u \cos 60° = 3/2\, v$. A teda čas do stretnutia je rovný $t = 2a/3v$.

Existuje aj alternatívne riešenie, spočívajúce v tom, že rýchlosť každého psa zviera so spojnicou so stredom vždy ten istý uhol – 30°. A teda sa ku stredu trojuholníka približuje rýchlosťou $v\cos 30°$. Jeho počiatočná vzdialenosť od stredu je rovná $\frac{2}{3}a\cos 30°$, odkiaľ dostávame ten istý výsledok

$$t = \frac{\frac{2}{3}\,a\cos 30°}{v\cos 30°} = \frac{2a}{3v}$$

$\boxed{46.}$ K riešeniu sa dá dopracovať pomocou zákonov zachovania. Tesne pred dopadom guľôčky na prvý hranol bude jej rýchlosť (zo zákona zachovania energie - ZZE):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgh_0, \\ v_0 &= \sqrt{2gh_0}. \end{aligned} \tag{1}$$



Na výpočet rýchlosti po odraze, však už musíme použiť aj zákon zachovania hybnosti, keďže hranoly nie sú k podložke pevne uchytené (a došlo k dokonale pružnej zrážke). Vo vodorovnom smere zo ZZH píšeme

$$Mu_1 = mv_1 \tag{2}$$

a zo ZZE:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2. \tag{3}$$

Toto je všetko pekné, ale ZZH musí platiť aj vo zvislom smere a tu sa nám viditelne nejká hybnosť stratila. Čo teda s tým? Asi každého napadne, že stratená hybnosť sa v skutočnosti vôbec nestratila, len sme nepočítali s tým, že aj Zem nejakú získa. Ak je teda hmotnosť Zeme M_z, zákon zachovania hybnosti vo vertikálnom smere nám hovorí:

$$M_z v_z = mv_0.$$

To by sedelo, ale čo s jej kinetickou energiou? Veď ak má nejakú rýchlosť, musí mať aj energiu. Jej veľkosť je:

$$E_{k_z} = \frac{1}{2}\, M_z v_z^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M_z}.$$

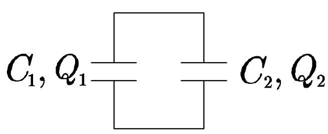
Vieme, že veľkosť hmotnosti Zeme je veľmi veľká, potom z posledného výrazu vyplýva, že jej kinetická energia bude zanedbateľne malá (pri bežných hodnotách $m = 1\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ je jej veľkosť $E_{k_z} = 8.10^{-21}\,\mathrm{J}$, čo je zanedbateľne malé číslo). Stretli sme sa tu so zaujímavým javom. Aj keď Zem získa nezanedbateľnú hybnosť, jej kinetická energia je zanedbateľná. Do našich úvah teda Zem nemusíme zahrňovať, lebo hybnosť nás zaujíma len vo vodorovnom smere a kinetická energia je zanedbateľná. Pre odraz od druhého hranola píšeme:

$$\begin{aligned} mv_1 &= Mu_2, & (4)\\ \frac{1}{2}\, mv_1^2 &= \frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\, Mu_2^2, & (5)\\ mgh &= \frac{1}{2}\, mv^2. & (6) \end{aligned}$$

Nakoniec z rovníc (1), (2), (3), (4), (5) a (6) dostaneme výsledok:

$$h = \frac{M - m}{M + m}\, h_0.$$

$\boxed{47.}$ Táto úloha sa vlastne skladá z dvoch úloh, ktoré sú až na počiatočné podmienky rovnaké. Jedná sa o úlohu typu: Majme dva kondenzátory s kapacitami C_1, C_2 a nábojmi Q_1, Q_2. Keď ich spojíme, aké budú ich napätia U_1', U_2' a náboje Q_1', Q_2'?



Tok náboja sa ustáli, keď budú napätia na kondenzátoroch rovnaké ($U_1' = U_2'$). Zároveň vieme, že náboj, ktorý odtečie z jedného kondenzátora, je rovnaký ako náboj, ktorý pritečie na druhý kondenzátor – označme tento náboj Q. Potom rovnosť výsledných napätí môžeme zapísať v tvare

$$\frac{Q_1 - Q}{C_1} = \frac{Q_2 + Q}{C_2}.$$

Odtiaľ vyjadríme Q, a pre výsledné napätie a náboj na kondenzátore C_1 dostávame

$$U_1' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2},$$

odkiaľ je potom jasné ($Q = UC$)

$$Q_1' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} C_1.$$

V našom prípade je po pripojení C_0 k C_1 napätie a náboj na kondenzátore C_0

$$\begin{aligned} U_0' &= \frac{C_0 U_0}{C_0 + C_1}, \\ Q_0' &= U_0' C_0 = \frac{C_0^2 U_0}{C_0 + C_1}. \end{aligned}$$

Na kondenzátore C_1 bude náboj

$$Q_1' = U_0' C_1 = \frac{C_0 C_1 U_0}{C_0 + C_1}.$$

Túto procedúru zopakujeme ešte raz s tým rozdielom, že namiesto náboja Q_1' budeme uvažovať náboj $-Q_1'$ kvôli zmene polarizácie. Potom výsledné napätie na kondenzátore C_0 je rovné

$$U_0'' = \frac{C_0(C_0 - C_1)}{(C_0 + C_1)^2} U_0.$$