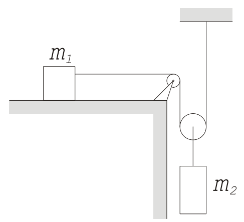
Kapitola 1

Zadania

$\boxed{1.}$ Teleso vrhneme rýchlosťou 2 m/s po uhlom 30°. V akej výške bude jeho rýchlosť polovičná?

$\boxed{2.}$ Určite zrýchlenie telesa m_1 sústavy na obrázku. Trenie ani hmotnosť kladky neuvažujte.



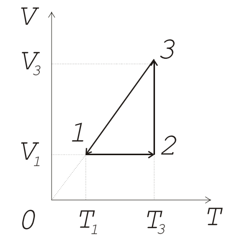
$\boxed{3.}$ Z povrchu planéty polomeru R štartuje zvislo nahor raketa prvou kozmickou rýchlosťou. Do akej výšky h od povrchu planéty sa dostane raketa? Trenie v atmosfére neuvažujte.

$\boxed{4.}$ Častica hmotnosti m_1 narazí na stojacu časticu hmotnosti m_2 ($m_1 > m_2$). Určite, o aký maximálny uhol $\alpha_{\max}$ sa od svojho pôvodného smeru môže odkloniť častica m_1?

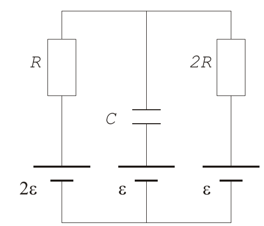
$\boxed{5.}$ Častica 1 sa pružne zrazí so stojacou časticou 2. Po zrážke sa obidve častice budú pohybovať symetricky vzhľadom na pôvodný smer častice 1. Určite pomer hmotností častíc m_1/m_2, ak viete, že uhol medzi ich pohybmi po zrážke je α.

$\boxed{6.}$ Kúsok kovu, ktorý je zliatinou medi a striebra, váži na vzduchu m a pri ponorení do vody „váži" m'. Koľko % hmotnosti kovu tvorí striebro? Nech hustota vody je ρ_0, hustota striebra ρ_{Ag}, hustota medi ρ_{Cu}. Vzduch považujte za nehmotný.

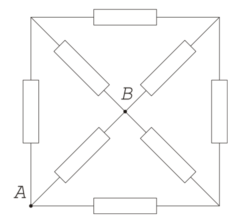
$\boxed{7.}$ Na obrázku je nakreslený plynový cyklus v súradniciach p, V. Nakreslite tento proces v súradniciach p, T a vyznačte zodpovedajúce body 1,2,3.



$\boxed{8.}$ Určite náboj q na kondenzátore kapacity C. Vnútorný odpor batérie zanedbajte.

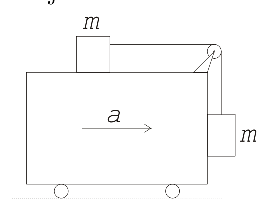


$\boxed{9.}$ Osem rovnakých odporov R je pospájaných podľa nasledovnej schémy. Určite odpor medzi bodmi A a B.

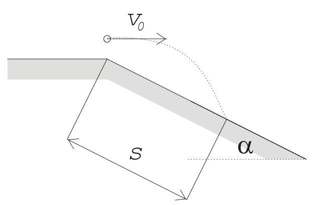


$\boxed{10.}$ Za akú časť periódy prejde teleso, ktoré vykonáva harmonické kmity, polovicu amplitúdy, ak na začiatku sa nachádzalo v strede kmitov?

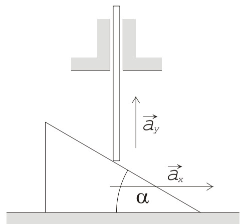
$\boxed{11.}$ S akým zrýchlením a sa má pohybovať vozík, aby sa telesá rovnakej hmotnosti m voči nemu nehýbali? Koeficient trenia je μ. Uvažujeme trenie na oboch stenách vozíka - prednej aj vrchnej.



$\boxed{12.}$ Delo strieľa vodorovne rýchlosťou v_0 z kopca so sklonom α. Vypočítajte vzdialenosť s, kam náboj doletí.

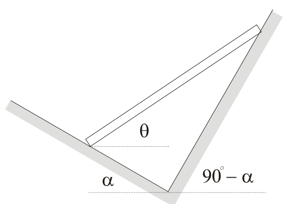


$\boxed{13.}$ Hranol so sklonom α sa pohybuje s vodorovným zrýchlením a_x. S akým zrýchlením sa pohybuje tyč, voľne sa opierajúca o hranol, ktorá sa môže pohybovať len v zvislom smere?



$\boxed{14.}$ Šofér mal prísť do mesta v stanovenom termíne. Keby išiel rýchlosťou 30 km/h, príde 2 hodiny po termíne, ak pôjde rýchlosťou 50 km/h, príde o 1 hodinu skôr. Zistite, ako ďaleko sa šofér nachádzal od mesta?

$\boxed{15.}$ Tyč sa opiera o dve hladké roviny so sklonmi α, $90° - \alpha$. Nájdite uhol ϑ, keď je tyč v rovnováhe.

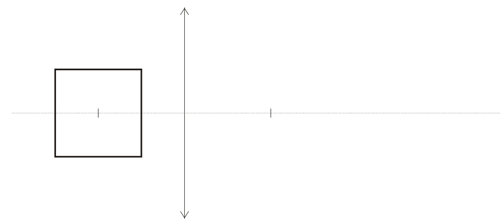


$\boxed{16.}$ Ako veľmi musí byť rozhojdaný chlapec na hojdačke ($\varphi =$?), ak sa chce rozhojdať na jeden pokus tak, aby sa „pretočil" cez hojdačku. Riskantne mu k tomu pomáha jeho rovnako ťažký kamarát, ktorý sa v krajnej polohe na hojdajúceho sa zavesí a "vezie sa" s ním až do najnižšej polohy, kde ho pustí.

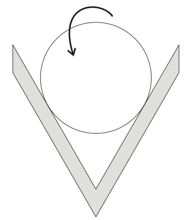
$\boxed{17.}$ Dvaja cyklisti, Cyril a Maťo sú od seba vzdialení $s = 100\,\mathrm{km}$. Maťo bicykluje smerom k Cyrilovi rýchlosťou $v_m = 30\,\mathrm{km/h}$ a Cyril oproti nemu

rýchlosťou $v_c = 20\,\mathrm{km/h}$. Nad ich hlavami obvyklým spôsobom lieta Cyrilov poštový holub od jedného ku druhému a späť, smerom k Cyrilovi rýchlosťou $a = 55\,\mathrm{km/h}$, ale smerom k Maťovi len $b = 45\,\mathrm{km/h}$ (proti vetru). Koľko kilometrov nalieta holub, kým sa cyklisti zrazia? (začína u Maťa)

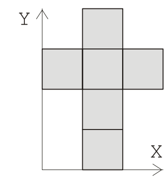
$\boxed{18.}$ Nakreslite obraz štvorčeka na obrázku (jeho stred je v strede jedného z ohnísk spojnej šošovky).



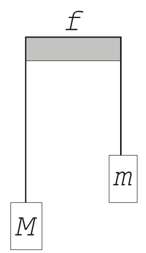
$\boxed{19.}$ Guľka sa kotúľa bez prešmykovania vo vodorovnom žľabe z dvoch rovinných dosiek (ktoré zvierajú uhol 60°) rýchlosťou $10\,\mathrm{cm/h}$. Aká je maximálna rýchlosť, akú dosahuje niektorý z bodov na jej povrchu?



$\boxed{20.}$ Kde je ťažisko krížika $(x,\, y)$? Strana štvorčekov je a.



$\boxed{21.}$ Dve závažia s hmotnosťami $m = 1\,\mathrm{kg}$ a $M = 2\,\mathrm{kg}$ sú spojené šnúrkou, ktorá je prevesená cez dosku. Koeficient trenia medzi doskou a šnúrkou je $\mu = 0,5$. Aké je zrýchlenie tejto sústavy?



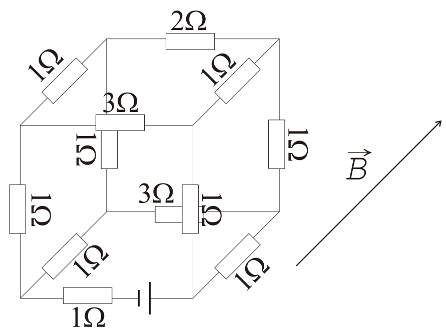
$\boxed{22.}$ Aký je uhol medzi ručičkami na hodinkách o 7^{38}?

$\boxed{23.}$ Dve obruče sa oproti sebe začnú kotúľať rovnakou uhlovou rýchlosťou ω. Aký je pomer ich polomerov, ak sa dotknú práve v tých bodoch, ktorými sa pred začiatkom pohybu dotýkali zeme?

$\boxed{24.}$ Aká hlboká bola priepasť, keď tón revu padajúceho človeka sme počuli na konci o oktávu nižší ($f = \frac{f_0}{2}$), ako bol na začiatku pádu?

$\boxed{25.}$ Určte tlak slnečného žiarenia na solárny panel družice na obežnej dráhe zeme, keď dopadajúci tok energie je $\Phi = 1400\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\,s}}$, panel je natočený kolmo na smer dopadajúceho žiarenia a 75% z neho odrazí späť.

$\boxed{26.}$ Aká je veľká celková sila pôsobiaca na túto „kocku" odporov (každá z hrán je rovný vodič s odporom, aký je naznačený) s hranou $a = 1\,\mathrm{cm}$ so zdrojom dodávajúcim prúd $I = 100\,\mathrm{mA}$ v magnetickom poli $0,1\,\mathrm{T}$, ktoré má smer zrejmý z obrázka (kolmý na prednú a zadnú stenu). Veľkosť sily pôsobiacej na vodič dĺžky a v mag. poli na neho kolmom je BIa a má smer kolmý na $\vec{B}$ aj vodič.



$\boxed{27.}$ Dva červy s rovnakou hmotnosťou lezú cez 10 centimetrov vysokú veľmi tenkú stenu. Jeden z nich je 20 centimetrov dlhý, druhý má dĺžku 10 centimetrov. Aký je pomer medzi prácou, ktorú pri preliezaní steny vykoná dlhší červ a prácou vykonanou kratším červom?

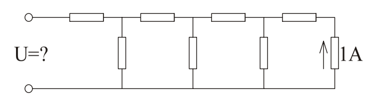
$\boxed{28.}$ Vzdialenosť medzi zdrojom svetla a tienidlom je L. Ak medzi nimi pohybujeme šošovkou, získame dva ostré obrazy, ktorých pomer veľkostí je 1:9. Aká je ohnisková vzdialenosť tejto šošovky?

$\boxed{29.}$ Medzi dvoma rovnobežnými sklenenými doskami je kvapka vody. Vzdialenosť dosiek je d, priemer vodnej škvrny D, pričom $D \gg d$. Určte veľkosť sily, ktorá k sebe priťahuje tieto dve sklenené dosky.

$\boxed{30.}$ Majme dve gule z materiálu s dĺžkovou tepelnou rozťažnosťou λ. Jedna leží na podložke, druhá je zavesená na niti. Obe majú polomer R, tepelnú kapacitu c a teplotu T. Obom dodáme rovnaké množstvo tepla Q. Aký bude potom rozdiel ich teplôt?

$\boxed{31.}$ Na koľko kvapiek musíme rozprášiť vodu s hmotnosťou m a teplotou T_1, aby jej výsledná teplota bola T_2? Merná tepelná kapacita vody je c, povrchové napätie vody je σ.

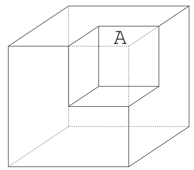
$\boxed{32.}$ Každý odpor siete rezistorov má veľkosť $1\,\Omega$. Cez posledný z rady odporov preteká prúd $1\,\mathrm{mA}$. Aký potenciálový rozdiel je na vstupe tejto reťaze?



$\boxed{33.}$ Pohyblivý piest s malou hmotnosťou rozdeľuje zvislý valec s prierezom S naplnený ideálnym plynom na dve rovnaké časti. V každej z nich je jeden mol plynu. Na piest zavesíme závažie s tiažou G, ten klesne a po niekoľkých osciláciách zastane v rovnovážnej polohe. Aký bude tlak v spodnej časti nádoby? Nádoba si môže vymieňať teplo s okolím.

$\boxed{34.}$ Majme 50% alkohol (ide o hmotnostné percentá). Začnime takýto alkohol s hmotnosťou M teplotou T zohrievať na variči s výkonom P. Po akom čase t začne vrieť voda obsiahnutá v zmesi? Tepelné kapacity a merné skupenské teplo vyparovania pre vodu a lieh sú (postupne) c_1, L_1 a c_2, L_2. Teploty varu sú $72\,^\circ\mathrm{C}$ (lieh), $100\,^\circ\mathrm{C}$ (voda). Odparovanie vody zo zmesi zanedbajte.

$\boxed{35.}$ Kocku s dĺžkou hrany a rovnomerne nabijeme nábojom s objemovou hustotou ϱ. V jednom z jej vrcholov (nech je to A) potom nameriame intenzitu elektrického poľa E. Z kocky teraz vyrežeme menšiu kocku s dĺžkou hrany $a/2$ s vrcholom v A (pozri obrázok). Akú intenzitu elektrického poľa E_1 nameriame vo vrchole A teraz?



$\boxed{36.}$ Fontána strieka vodu do výšky H. Vo vzduchu je vždy naraz M kilogramov vody. Aký je výkon čerpadla fontány?

Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Veľkosť rýchlosti je daná vzťahom $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Keďže však už zložka

$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha = 2\cos 30° = \sqrt{3}\,\mathrm{m/s} > 1\,\mathrm{m/s}$$

je väčšia ako $v_0/2$, zrejme rýchlosť nebude mať *nikdy* polovičnú hodnotu.
Všimnime si, že riešenie cez zákon zachovanie energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{3v_0^2}{8g}$$

je zavádzajúce, pretože zákon zachovania energie v sebe nenesie celú informáciu o pohybe.
$\boxed{2.}$ Označme silu napätia v špagáte (ktorá je vďaka nehmotnosti špagátu rovnaká) T. Potom pohybové rovnice pre jednotlivé telesá sú

$$\begin{aligned} T &= m_1 a_1 \\ m_2 g - 2T &= m_2 a_2 \end{aligned}$$

Zrýchlenia telies sú vo vzťahu $a_1 = 2a_2$. Riešením týchto rovníc dostávame

$$a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

$\boxed{3.}$ Prvá kozmická rýchlosť je rýchlosť potrebná na kruhový pohyb okolo planéty

$$m\frac{v^2}{R} = \kappa\frac{mM}{R^2}$$

Výšku, do ktorej sa dostane teleso vyhodením rýchlosťou v, získame zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM}{R} = -\kappa\frac{mM}{R+h}$$

Odkiaľ

$$h = R$$

$\boxed{4.}$ Nech rýchlosť nalietavajúcej častice je v. Prvá častica sa odkloní od pôvodného smeru o uhol α, druhá o uhol β. Zapíšeme zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania

$$\begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta \\ m_1 v_1 \sin\alpha &= m_2 v_2 \sin\beta \\ m_1 v^2 &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \end{aligned}$$

Keď dosadíme do ostatných rovníc β a rýchlosť v_2, dostávame kvadratickú rovnicu vo v_1

$$(m_1 + m_2)v_1^2 + 2m_1 v v_1 \cos\alpha + (m_1 - m_2)v^2 = 0$$

Odkiaľ z podmienky reálnosti koreňov dostávame podmienku $\sin\alpha \le m_2/m_1$. $\boxed{5.}$ Nech hybnosť nalietavajúcej častice je p. Vzhľadom na to, že druhá častica pred zrážkou stojí a vzhľadom na symetrickosť ich smeru, sú hybnosti oboch častíc po zrážke rovnaké, označme ich p'. Potom zo zákona zachovania hybnosti

$$p = 2p' \cos\frac{\alpha}{2}$$

Podľa zákona zachovania energie

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2}$$

Odtiaľ nakoniec dostávame

$$\frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 + 2\cos\alpha$$

$\boxed{6.}$ Kov váži vo vode menej o vztlakovú silu

$$m'g = mg - V\rho_0 g$$

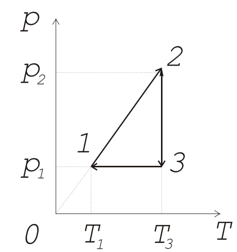
Pre objem platí

$$V = \frac{m_{\mathrm{Ag}}}{\rho_{\mathrm{Ag}}} + \frac{(m - m_{\mathrm{Ag}})}{\rho_{\mathrm{Cu}}}$$

Odtiaľ

$$\frac{m_{\mathrm{Ag}}}{m} = \frac{\rho_{\mathrm{Ag}}\rho_{\mathrm{Cu}}}{(\rho_{\mathrm{Ag}} - \rho_{\mathrm{Cu}})\rho_0}\left[1 - \frac{m'}{m} - \frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{Cu}}}\right]$$

$\boxed{7.}$ V procese $1 \to 2$ je konštantný objem, takže zo stavovej rovnice dostávame $p/T = \mathrm{const}$, odkiaľ $p = \mathrm{const}.T$, teda grafom je priamka. Proces $1 \to 3$ je izotermický, tlak klesá pri konštantnej teplote, nakreslíme zvislú čiaru nadol. Napokon v $3 \to 1$ je konštantný tlak pri klesajúcej teplote, takže výsledný graf má tvar



$\boxed{8.}$ Nech prúd pretekajúci vonkajším obdovom je I. Potom pre ľavú slučku dostávame rovnicu napätí

$$-2\mathcal{E} + RI + \frac{Q}{C} + \mathcal{E} = 0$$

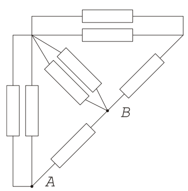
pre pravú slučku

$$-\mathcal{E} - \frac{Q}{C} + 2RI + \mathcal{E} = 0$$

odkiaľ riešením dostávame

$$Q = \frac{2}{3}C\mathcal{E}$$

$\boxed{9.}$ Riešenie sa zjednoduší, keď si uvedomíme, že vrcholy štvorca, kolmé na AB, sú ekvipotenciálne (vďaka symetrii problému) a môžme ich spojiť. Tým dostaneme nasledovnú schému

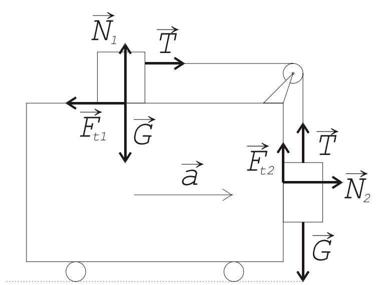


ktorej odpor je $R_{AB} = \frac{7}{15}R$.

$\boxed{10.}$ Rovnica lineárneho harmonického oscilátora má tvar $x = A\sin\omega t$. Nás zaujíma polovica amplitúdy, t.j. $A/2 = A\sin\omega t'$. Odtiaľ

$$t' = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{T}{12}$$

$\boxed{11.}$ Ako vidíme z obrázka



na teleso 1 pôsobí sila špagátu $\vec{T}$, sila podložky $\vec{N}_1$, trecia sila $\vec{F}_{t1}$, teda pohybová rovnica má tvar

$$\begin{aligned} \text{v smere osi } x &: \quad T - F_{t1} = ma_1 \\ \text{v smere osi } y &: \quad N_1 - mg = 0 \end{aligned}$$

Na teleso 2 pôsobí sila špagátu $\vec{T}$, sila podložky $\vec{N}_2$, trecia sila $\vec{F}_{t2}$. Potom pohybová rovnica je

$$\begin{aligned} \text{v smere osi } x &: \quad N_2 = ma \\ \text{v smere osi } y &: \quad mg - T - F_{t2} = ma_2 \end{aligned}$$

Kinematická väzba medzi zrýchleniami a_1 a a_2 je vyjadrená vzťahom $a_1 = a + a_2$. Ak predpokladáme, že teleso sa pohybuje, vtedy

$$F_{t1} = \mu N_1 \qquad F_{t2} = \mu N_2$$

Riešením týchto rovníc dostávame

$$a_2 = \frac{(1-\mu)g - (1+\mu)a}{2}$$

Z nerovnosti $a_2 < 0$ dostávame, kedy nie je splnená podmienka pohybu, teda pre

$$a > \frac{1-\mu}{1+\mu}g$$

$\boxed{12.}$ Podmienkou dopadu je, že súradnice náboja

$$x = v_0\cos\alpha\, t \qquad y = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

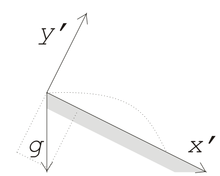
sa ocitnú na priamke kopca, t.j. na priamke

$$y = -\operatorname{tg}\alpha\, x$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame

$$s = \frac{2v_0\operatorname{tg}\alpha}{g}$$

Úlohu môžme riešiť aj alternatívne: otočme súradnicovú sústavu tak, aby os x' bola totožná s povrchom kopca.



Potom v tejto novej báze má vektor $\vec{g}$ súradnice $\vec{g} = [g\sin\alpha, -g\cos\alpha]$. Teda v smere x' sa teleso pohybuje so zrýchlením $g\sin\alpha$ s počiatočnou rýchlosťou $v_0\cos\alpha$. Teda časový vývin x'-ovej súradnice je

$$x' = v_0\cos\alpha\, t + \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$$

a analogicky pre y'-ový smer

$$y' = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2$$

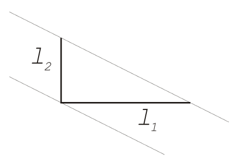
Rovnice sme zostavovali komplikovanejšie ako v predchádzajúcom prípade, ale o to ľahšie ich budeme riešiť. Podmienka dopadu je vyjadrená $y' = 0$, odkiaľ čas letu

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\alpha}$$

a dĺžka dopadu je

$$s = x'(t) = \frac{2v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}{g}$$

$\boxed{13.}$ Ak sa hranol posunie o dĺžku l_1 v smere osi x, potom tyč vyjde nahor



o dĺžku $l_2 = l_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$ a rovnaký vzťah je aj medzi zrýchleniami, teda $a_y = a_x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. $\boxed{14.}$ Nech vzdialenosť od mesta je l. Rozdiel medzi skorým a neskorým príchodom sú 3 hodiny, čiže

$$\frac{l}{30} - \frac{l}{50} = 3$$

odkiaľ $l = 225\,\mathrm{km}$. $\boxed{15.}$ Teleso je v rovnováhe, keď súčet síl je nulový aj výsledný moment síl je nulový. Na tyč pôsobia okrem gravitačnej sily $\vec{G}$ sily podložky $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, kolmé na podložku. Keď podmienku $\vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$ prepíšeme do vodorovnej a zvislej projekcie, dostávame

$$\begin{aligned} N_1\sin\alpha - N_2\sin(90^\circ - \alpha) &= 0 \\ N_1\cos\alpha + N_2\cos(90^\circ - \alpha) - G &= 0 \end{aligned}$$

Podmienka nulovosti momentu síl (vzhľadom na ťažisko tyče) je

$$N_1\frac{l}{2}\cos(\alpha + \vartheta) - N_2\frac{l}{2}\sin(\alpha + \vartheta) = 0$$

Riešením prvej a tretej rovnice dostávame

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{tg}(\alpha + \vartheta)$$

odkiaľ pomocou súčtového vzorca pre tg dostávame $\vartheta = 90^\circ - 2\alpha$. $\boxed{16.}$ Ak ten druhý chlapec vyskočí hore, vezie sa nadol a tam hojdajúceho sa pustí, nedodá mu vlastne nijakú energiu, takže mu nijako nepomôže. Energia na začiatku (tesne po výskoku) bola $E_0 = mgh + mgh$. Energia pri pustení sa je $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$. Chlapec, ktorý „pomáhal" si svoju časť odnesie so sebou, teda vlastne nijako nepomohol, hojdajúci sa hojdá tak, ako predtým. Teda správna odpoveď je $\varphi = 180^o$, teda že na to pomoc už nepotrebuje, lebo takáto pomoc tu vlastne nie je pomocou. $\boxed{17.}$ Potrebujeme si zistiť časy t_A a t_B, ktoré letel holub rýchlosťami a, resp. b, pretože nie sú rovnaké. Holub začína u Maťa. Letí smerom k Cyrilovi a potom späť. Za tento čas Maťo už niečo prebicykloval. Potom to začne znovu. Letí smerom k Cyrilovi a potom späť. Späť musí letieť o toľko menej, koľko za ten čas prešiel Maťo. Teda jeho dráha smerom k Maťovi bude kratšia od tej k Cyrilovi presne o toľko, koľko prejde Maťo za celý čas bicyklovania, ktorý je $t = \frac{s}{v_m + v_c} = \frac{100}{20+30} = 2\,\mathrm{h}$. Teda jeho dráha, ktorú prešiel rýchlosťou b (k Maťovi) je o $v_m t = 30\,\mathrm{km}/\mathrm{h}\;2\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{km}$ kratšia, ako tá, ktorú prešiel rýchlosťou a (k Cyrilovi). Ďalej vieme, že časy t_A a t_B dávajú spolu čas $t = 1\,\mathrm{h}$ celého bicyklovania (kým sa stretli). Máme teda dve rovnice:

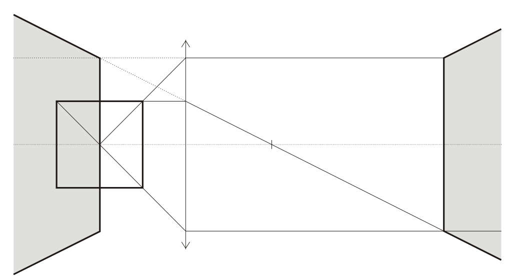
$$\begin{aligned} 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,t_A &= 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,t_B + 60\,\mathrm{km} \\ t_A + t_B &= 2\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Z týchto rovníc dostaneme $t_A = \frac{3}{2}\,\mathrm{h}$ a $t_B = \frac{1}{2}\,\mathrm{h}$. Teda holubova dráha bude $H = \left(\frac{3}{2}\,55 + \frac{1}{2}\,45\right)\mathrm{km} = 105\,\mathrm{km}$.

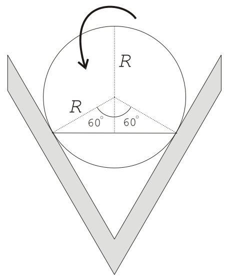
Všeobecné vyjadrenie je:

$$H = at_A + bt_B = a\,\frac{b\,\frac{s}{c+m} + \frac{s}{c+m}\,m}{a+b} + b\,\frac{a\,\frac{s}{c+m} - \frac{s}{c+m}\,m}{a+b} = s\,\frac{2ab + m\,(a-b)}{(c+m)\,(a+b)}$$

$\boxed{18.}$ Obraz sa nám rozpadne na dva donekonečnaidúce obrazy, reálny a nereálny. Obraz je symetrický podľa osi. Pravý horný roh zobrazím pomocou lúča, ktorý prišiel cez ľavé ohnisko a vodorovne prichádzajúceho lúča. Jeho obraz je nereálny pred šošovkou. Pravá polovica hornej hrany sa zobrazí do polpriamky idúcej z obrazu pravého horného rohu - bodu, ktorý sme práve našli. Tak dostaneme ľavú časť obrazu. Ľavý horný roh zobrazím znovu pomocou dvoch lúčov. Vodorovného a toho ktorý ide prvým ohniskom. Dostaneme obdobne teraz reálny obraz za šošovkou.

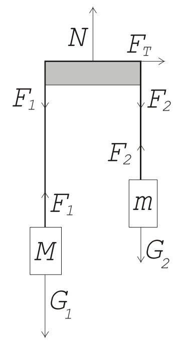


$\boxed{19.}$ Najrýchlejšie sa bude hýbať bod gule, ktorý je najvyššie. Guľa sa otáča okolo osi, ktorá ide bodmi jej dotyku so žľabom. Táto os je vzdialená od stredu gule o $R\cos 60^\circ = \frac{R}{2}$.



Keďže sa nešmýka, môžeme povedať, že body dotyku sa v danom momente nehýbu. Stred gule - ťažisko má rýchlosť $v = 10\,\mathrm{cm/s}$ uhlová rýchlosť otáčania gule okolo našej osi je teda $\omega = \frac{2v}{R}$. Vzdialenosť bodu najďalej od osi je $\frac{3}{2}R$, jeho rýchlosť teda $v_{MAX} = \frac{3}{2}\omega R = 3v = 30\,\mathrm{cm/s}$. $\boxed{20.}$ V x-smere je jasné, že ťažisko bude mať polohu $x = \frac{3}{2}a$. V y-smere potrebujeme počítať. Krížik si môžme rozdeliť na 6 štvorčekov s jednotkovou hmotnosťou. Teraz si určíme moment tiažovej sily krížika vzhľadom na x-os. Bude $M = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}a = 13a$ (spočítame momenty od jednotlivých štvorčekov) Ak si predstavíme, že má byť taký istý, ako keby bola celá hmotnosť (6) v ťažisku, dostaneme z rovnosti momentov y-súradnicu ťažiska. $M = 6y = 13a$. Teda $y = \frac{13}{6}a$. $\boxed{21.}$ Označíme si sily podľa obrázku. $G_1 = Mg$, $G_1 = mg$. Vo všeobecnosti platia tieto pohybové rovnice.

$$ma = F_2 - G_2 \qquad Ma = G_1 - F_1$$
$$N = F_1 + F_2 \qquad F_1 = F_T + F_2$$

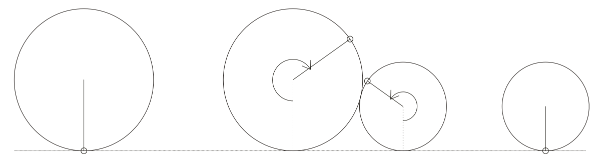


Predpokladajme, že sa sústava hýbe. Vtedy $F_T = \mu N$. Riešením sústavy dostaneme:

$$a = g\left(1 - \frac{m}{M}\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$$

Pri našich hodnotách je výsledok $a = -0,5g$, teda nereálny výsledok, pretože sme predpokladali kladné zrýchlenie (ľahšie závažie nepotiahne to ťažšie...). Výsledok máme taký, lebo sme treciu silu uvažovali rovnú μN. Je však menšia ako μN, ale aj tak nedovolí sústave hýbať sa. teda výsledok je $a = 0\,\mathrm{m/s^2}$. $\boxed{22.}$ Celý ciferník (12 hodín) má uhol 360°. O 7^{38} je minútová ručička na $\frac{38}{60}360°$(čo je 228°) lebo minúta má $\frac{1}{60}$ z 360°. Hodinová je vtedy na $\frac{1}{12}\left(7 + \frac{38}{60}\right)360°$ (čo je 229°), lebo je na siedmej hodine a ešte o $\frac{38}{60}$ ďalej a hodina má $\frac{1}{12}$ z 360°. Uhol medzi ručičkami je teda 1°. $\boxed{23.}$ Ak sa obe obruče kotúľajú rovnakou uhlovou

rýchlosťou, znamená to, že bod, ktorým sa dotýkali zeme, opíše pri obidvoch rovnaký uhol. Z obrázka jasne vidno, že ak obruče nemajú rovnaký polomer, nemajú šancu dotknúť sa v bodoch, ktorými sa na začiatku dotýkali zeme.



$\boxed{24.}$ Pozorovaná frekvencia hýbuceho sa zdroja je $f = f_0\frac{c-v}{c}$. Rýchlosť padajúceho je rýchlosť voľne padajúceho telesa $v = \sqrt{2hg}$. Teda máme rovnicu

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{2} = \frac{c}{c + \sqrt{2hg}}$$
$$h = \frac{c^2}{2g}$$

$\boxed{25.}$ Najprv si vypočítame, koľko fotónov nám dopadá za 1 s. Tok energie (ak energia jedného fotónu je E) je

$$\Phi = \frac{n}{t}\frac{E}{S}$$

Každý z fotónov so sebou prinesie hybnosť $p = \frac{E}{c}$. Z toho sa 75% odrazí a zvyšok pohltí, čiže priemerná zmena hybnosti fotónov za jednotku času bude:

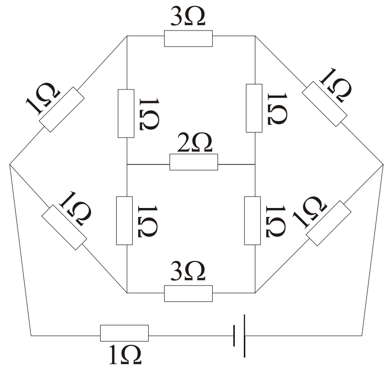
$$\Delta p = n\left[\frac{3}{4}(2p) + \frac{1}{4}(p)\right] = \frac{7}{4}n\frac{E}{c}$$

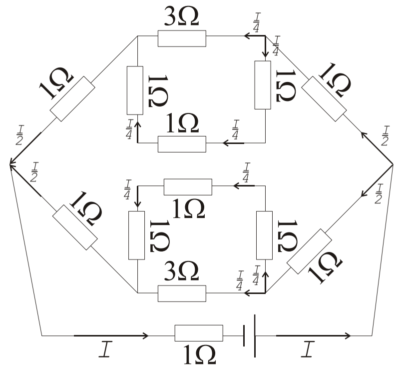
Tlak žiarenia P vyjadríme ako podiel sily $F = \frac{\Delta p}{t}$ a plochy S.

$$P = \frac{\Delta p}{tS} = \frac{n}{t}\frac{\frac{7}{4}\frac{E}{c}}{S} = \frac{7}{4}\frac{\Phi}{c}$$

$\boxed{26.}$ V magnetickom poli na uzavretú slučku s prúdom nepôsobí žiadna sila. Pôsobí iba moment sily, ktorý slučku môže otáčať. Keďže sa nám v obvode nestráca náboj, koľko ho prejde napríklad v smere x doprava, toľko ho musí prejsť inými vodičmi späť opačným smerom. Keď spočítame všeky prúdy v nejakom smere, musíme teda dostať nulu. Sila je úmerná prúdu, bude teda nulová.

Teraz iné, zložitejšie riešenie. Sila pôsobiaca priamy vodič dĺžky a s prúdom I v magnetickom poli (kolmom na vodič) s indukciou B je $F = BIa$. Má smer kolmý na vodič aj smer vektora mag. indukcie. Stačí nám teda zistiť prúdy tečúce hranami kolmými na vektor $\vec{B}$. Na hrany rovnobežné s $\vec{B}$ žiadna sila nepôsobí. Keďže kocka je symetrická podľa roviny idúcej stredmi vodorovných hrán prednej a zadnej steny, prúdy vo zvislých hranách budú na ľavej strane rovnako veľké ako na pravej, budú mať však opačnú veľkosť. Teda ich celkový príspevok k sile bude nulový. Kocku si teda prekreslíme a rozpojíme hornú zadnú hranu (2 Ω) na dva odpory:

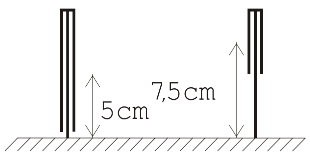




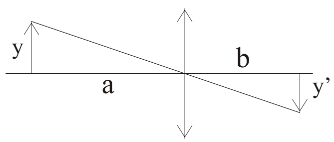
Prúd idúci dolnou zadnou hranou je $\frac{I}{4}+\frac{I}{4}=\frac{I}{2}$. Teraz už stačí len spočítať sily pôsobiace na vodorovné hrany prednej a zadnej steny. Tieto sily budú mať zvislý smer.
Predná stena: dolná hrana - prúd I, sila BIa, horná hrana - prúd $\frac{I}{4}$, sila $-\frac{1}{4}BIa$

Zadná stena: dolná hrana - prúd $\frac{I}{2}$, sila $-\frac{1}{2}BIa$, horná hrana - prúd $\frac{I}{4}$, sila $-\frac{1}{4}BIa$

Teda spolu nulová sila. $\boxed{27.}$ Kľúčom k riešeniu úlohy je všimnúť si zmenu potenciálnej energie červa pri preliezaní steny. Práca, ktorú musí každý z nich vykonať je rovná rozdielu maximálnej a minimálnej potenciálnej energie. Minimálna je zrejme energia červa ležiaceho na podložke, položme ju rovnú nule. Potenciálna energia nadobúda maximum keď je ťažisko červa najvyššie, tieto polohy sú vyznačené na obrázku. Z obrázka ľahko zistíme, že práce vykonané červami sú úmerné 5 cm (dlhý červ), resp. 7,5 cm (krátky červ). Pri rovnakých hmotnostiach oboch červov je hľadaný pomer $5:7,5=2:3$ v prospech dlhšieho červa.



$\boxed{28.}$ Ak si náhodou nepamätáme vzťahy pre zväčšenie obrazu pri jeho zobrazovaní pomocou šošovky, môžeme si pomocou obrázka ľahko odvodiť jeden z nich, ktorý bude pre nás užitočný.



$$\frac{y}{y'}=\frac{a}{b}$$

Prvý ostrý obraz nech dosiahneme pri vzdialenosti šošovky od zdroja a_1. Vzdialenosť obrazu je vtedy b_1, pričom platí zobrazovacia rovnica $1/a_1+1/b_1=1/f$. Zároveň $a+b=L$, lebo sa vytvoril ostrý obraz. Aká je druhá poloha šošovky, pri ktorej získame ostrý obraz? Pri nej budú zrejme iba vymenené hodnoty a_1 a b_1 – šošovková rovnica bude naďalej platiť a

vytvorený obraz bude skutočne ostrý. Pre jednotlivé veľkosti obrazov y', y'' môžeme zapísať vzťahy

$$\frac{y}{y'}=\frac{a_1}{b_1}, \qquad \frac{y}{y''}=\frac{b_1}{a_1}$$

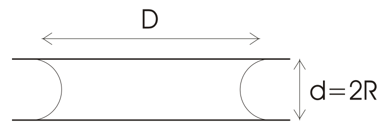
Podľa zadania má byť pomer veľkostí týchto dvoch obrazov (či už y'/y'', alebo y''/y', na tom nezáleží) 1:9. Pomocou predchádzajúcich vzťahov dostávame rovnicu

$$\frac{y'}{y''}=\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2=\frac{1}{9}\Longrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{3}$$

Stačí si uvedomiť, že $a_1+b_1=L$ a dostaneme $a_1=L/4$, $b_1=3L/4$. Dosadením týchto hodôt do šošovkovej rovnice určím neznámu ohniskovú vzdialenosť nami použitej šošovky...

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\Longrightarrow f=\frac{3}{16}L$$

$\boxed{29.}$ Je potrebné si uvedomiť čo sa stane, keď voda zmáča sklo.



Jej povrch (pozri obrázok) bude v priereze polkružnicou, ktorej polomer je daný vzdialenosťou dosiek, teda $R=d/2$. Tu zanedbávame zakrivenie povrchu vody dané rozmermi a tvarom vodnej škvrny (lebo $D\gg d$). Jedným z poznatkov o povrchovom napätí je, že pod takto tvarovaným povrchom vzniká podtlak, ktorého veľkosť je nepriamo úmerná polomeru krivosti R. Rozdiel tlaku vzduchu a tlaku vnútri kvapaliny môžeme vyjadriť ako

$$\Delta p=\frac{\sigma}{R}=\frac{2\sigma}{d}$$

Tým je presne daná sila priťahujúca dosky, pretože ju spôsobuje práve tento rozdiel tlakov.

$$F=S\Delta p=\frac{\pi D^2}{4}\frac{2\sigma}{d}=\frac{\sigma\pi D^2}{2d}$$

$\boxed{30.}$ V oboch prípadoch sa dodané teplo spotrebuje nielen na zmenu vnútornej, ale aj potenciálnej energie. Ťažisko ležiacej gule pri zohrievaní stúpne, ťažisko visiacej klesne a preto sa budú ich teploty líšiť. Môžeme napísať zákony zachovania energie v tvare

$$Q=mc(T_1-T)+mg\Delta h_1, \qquad Q=mc(T_2-T)+mg\Delta h_2$$

Zmeny výšok ťažísk sú dané dĺžkovou rozťažnosťou materiálu gulí, platia vzťahy

$$\begin{aligned}\Delta h_1 &= R\left[1+\lambda\left(T_1-T\right)\right]-R=\lambda R(T_1-T)\\ \Delta h_2 &= -R\left[1+\lambda\left(T_2-T\right)\right]+R=-\lambda R(T_2-T)\end{aligned}$$

Pomocou uvedených rovníc dokážeme vyjadriť ako T_1, T_2, tak aj ich hľadaný rozdiel.

$$T_1=T+\frac{Q}{m(c+R\lambda g)}, \qquad T_2=T+\frac{Q}{m(c-R\lambda g)}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{Q}{m}\left(\frac{1}{c-\lambda Rg} - \frac{1}{c+\lambda Rg}\right)$$

$\boxed{31.}$ Vnútorná energia vody sa premení na jej povrchovú energiu. Označme hľadaný počet kvapiek N. Každá z nich bude mať polomer R, ktorý zistíme ak porovnáme počiatočnú a konečnú hmotnosť vody (musia byť rovnaké). ρ je hustota vody.

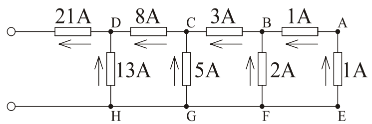
$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho N \Longrightarrow R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Počiatočný povrch vody môžeme zanedbať. Zmena povrchovej energie vody potom závisí iba od konečného povrchu všetkých kvapiek a je rovná zmene vnútornej energie vody. Zo získanej rovnice už ľahko vyjadríme N...

$$\Delta E = \sigma S = \sigma 4\pi R^2 N = \sigma (4\pi N)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3m}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} = mc(T_1 - T_2)$$

$$N = \frac{\rho^2 m^3 c^3 (T_1 - T_2)^3}{36\pi m^2 \sigma^3}$$

$\boxed{32.}$ Na obrázku sú označené jednotlivé uzly (aj neuzly) obvodu.



Rovnaký prúd ako posledným odporom obvodu medzi A a B preteká aj odporom ktorý je s ním v sérii medzi A a B, teda 1 mA. Výsledný potenciálový rozdiel medzi B a F je potom $1\,\Omega \cdot 1\,\text{mA} + 1\,\Omega \cdot 1\,\text{mA} = 2\,\text{V}$. Preto prúd cez tento odpor je 2 mA. Podľa 1. Kirchhoffovho zákona cez odpor medzi B a C tečie súčet oboch prúdov, teda prúd s veľkosťou 3 mA a tým pádom potenciálový rozdiel medzi C a G je $1\,\Omega \cdot 3\,\text{mA} + 2\,\text{V} = 5\,\text{V}$. Prúd tečúci cez odpor medzi C a D je potom 8 mA a napätie medzi D a H je $1\,\Omega \cdot 8\,\text{mA} + 5\,\text{V} = 13\,\text{V}$. Tým pádom je prúd tečúci cez odpor medzi D a H 13 mA a prúd vstupujúci do obvodu (dodáva ho zdroj) je súčtom posledných dvoch, teda 21 mA. Hľadné napätie zdroja (rovné potenciálovému rozdielu na vstupe tejto reťaze) je rovné

$$U = 1\,\Omega \cdot 21\,\text{mA} + 13\,\text{V} = 34\,\text{V}$$

Je užitočné všimnúť si zákonitosť, s akou narastali napätia na jednotlivých odporoch. Ide o postupnosť 1 V, 1 V, 2 V, 3 V, 5 V, 8 V, 13 V, 21 V, čo je postupnosť známa pod názvom Fibonacciho. $\boxed{33.}$ Počiatočný tlak v častiach nádoby označme p_0, objem oboch častí V_0. Počkajme, kým nastane v nádobe výmenou tepla s okolím rovnovážny stav. Teraz označme tlak v dolnej časti nádoby p, tlak v hornej časti nádoby p'. Keďže ide o izotermický dej, môžeme zapísať nasledujúce rovnice (x je vzdialenosť, o ktorú poklesol piest)

$$p_0 V_0 = p(V_0 - Sx), \qquad p_0 V_0 = p'(V_0 + Sx)$$

Na základe týchto rovníc dokážeme určiť rozdiel tlakových síl pôsobiacich na piest veľkosti S. Tento rozdiel musí vykompenzovať silu G pôsobiacu na piest vplyvom zaveseného závažia. Dosadením získame rovnicu, ktorú upravíme na kvadratickú:

$$(p - p')S = p_0 S V_0 \left(\frac{1}{V_0 - Sx} - \frac{1}{V_0 + Sx}\right) = G$$

$$GS^2x^2 + 2p_0V_0S^2x - GV_0^2 = 0$$

Zmysel má iba kladné riešenie rovnice. Takto dostávame vzdialenosť, o ktorú poklesol piest. Keď ju dosadíme do ľubovoľnej zo začiatočných rovníc pre izotermické deje, dostaneme hľadaný tlak p.

$$x = \frac{V_0}{G}\left(p_0 S + \sqrt{p_0^2 S^2 + G^2}\right) \Longrightarrow p = \frac{G p_0}{G - p_0 S - \sqrt{p_0^2 S^2 + G^2}}$$

$\boxed{34.}$ Čo všetko sa musí stať, kým začne vrieť voda? Celá zmes sa musí zohriať na teplotu varu liehu. Potom začne lieh vrieť a musí sa celý vypariť. Následne začne teplota zmesi opäť stúpať, až kým nedosiahne 100 °C a voda nezačne vrieť. Označme celkové na to potrebné teplo Q. Platí:

$$Q = c_2\frac{M}{2}(72 - T) + c_1\frac{M}{2}(72 - T) + \frac{M}{2}L_2 + c_1\frac{M}{2}(100 - 72)$$
$$Q = \frac{M}{2}\left[c_1(100 - T) + c_2(72 - T) + L_2\right]$$

Toto teplo Q musí dodať varič s výkonom P. Hľadaný čas t, ktorý je na to potrebný už ľahko vyjadríme ako

$$t = \frac{E}{P} = \frac{M\left[c_1(100 - T) + c_2(72 - T) + L_2\right]}{2P}$$

$\boxed{35.}$ Pokúsme určiť intenzitu E' vo vrchole A, ktorú tam vyvoláva malá nami vyrezaná kocka s hranou $a/2$. Všimnime si, že malá kocka je obrazom veľkej (pôvodnej) v rovnoľahlosti so stredom v A a koeficientom 1/2. Preto každému malému kúsku (objem δV) malej kocky zodpovedá dvakrát väčší (lineárne, objemovo je to 8-krát viac) a dvakrát vzdialenejší kúsok veľkej kocky. Všimnime si ich príspevky k celkovej intenzite pôsobiacej vo vrchole A.

$$\delta E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\,\delta V}{r^2}, \qquad \delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{8\rho\,\delta V}{(2r)^2} \Longrightarrow \delta E' = \frac{1}{2}\,\delta E$$

Zisťujeme, že každý z príspevkov k intenzite malej kocky je polovičný oproti príspevku k intenzite veľkej kocky. Preto aj celková intenzita malej kocky meraná vo vrchole A bude dvakrát menšia než intenzita veľkej kocky meraná v rovnakom bode, teda $E' = 1/2E$. Podľa princípu superpozície má platiť medzi hľadanou intenzitou E_1, E, E' vzťah z ktorý nám dá túžený výsledok

$$E = E' + E_1 \Longrightarrow E_1 = \frac{1}{2}E$$

$\boxed{36.}$ Od okamihu vypustenia nejakej malej konkrétnej kvapke vody čerpadlom do jej pádu späť do jazierka okolo fontány prejde čas $T = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Striekanie fontány je v rovnovážnom stave – vo vzduchu je vždy masa vody s konštantnou hmotnosťou M. Koľko vody čerpadlo dodá za čas t, toľko za tento čas dopadne späť na hladinu jazierka okolo fontány. Označme počet vody vypustenej čerpadlom za čas t ako m. Zrejme platí:

$$\frac{m}{t} = \frac{M}{T} \Longrightarrow t = T\,\frac{m}{M}$$

Čerpadlo koná prácu, keď urýchľuje stojacu vodu na rýchlosť $v = \sqrt{2hg}$ potrebnú na to, aby fontána striekala do výšky H. Práca potrebná na urýchlenie vody o hmotnosti m je $W = \frac{1}{2}mv^2$. Výkon čerpadla už teraz získame jednoduchým vydelením získaných výrazov:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{T\frac{m}{M}} = \frac{\frac{1}{2}mM2Hg}{2m\sqrt{\frac{2H}{g}}} = \frac{gM}{2}\sqrt{Hg}$$